Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та інформатики

В.Й. Могілевський
Ю.Г. Подошвелев

Математичний аналіз. Частина 1

Полтава – 2018

УДК 517(075)
М74

Математичний аналіз. Частина 1

В.Й. Могілевський, vadim.mogilevskii@gmail.com

Ю.Г. Подошвелев optimist1618@outlook.com

11 травня 2018 р.

Анотація

Електронний інтерактивний навчальний посібник розроблено для використання в умовах кредитно-модульної системи організації навчального процесу. У ньому викладено вступ до математичного аналізу, розділи диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної, що вивчаються студентами першого курсу. Кожний розділ містить теоретичний матеріал із доведенням основних теорем та практичні завдання. Зміст структурований у відповідності до навчальних модулів, кожний із яких містить інтерактивні тести для перевірки знань студентів.

Для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за спеціальностями 014.08 "Середня освіта (фізика)" та 014.09 "Середня освіта (інформатика)".

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса **Деркач В.О.**

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та інформатики ПНПУ ім. В.Г. Короленка **Кононович Т.О.**

Ухвалено вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка. Протокол № 13 від 26 квітня 2018 року

Зміст

Вступ

Електронний інтерактивний навчальний посібник, що призначений для студентів, які цікавляться математичним аналізом і прагнуть поглибити свої знання з цього предмету.

Мета цього видання:

- сформувати математичне мислення студентів, розвити в них практичні навички та вміння розв'язування задач;
- допомогти студентам самостійно вивчити нові прийоми та методи розв'язання вправ, а також ознайомити з основними теоретичними відомостями.

Даний навчальний посібник відповідає програмі курсу математичного аналізу у першому семестрі Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленко. Навчальний посібник поділено на три розділи: вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної та інтегральне числення функцій однієї змінної.

Вступ до математичного аналізу передбачає вивчення базових понять та методів математичного аналізу, пов'язаних із числовими послідовностями та дійсними функціями дійсного аргументу, обчисленням їх границь та дослідженням останніх на неперервність.

Центральні поняття диференціального числення – похідна та диференціал, а також розроблений на основі них апарат дослідження функцій, викладено в другому розділі посібника.

У третьому розділі викладено необхідний теоретичний матеріал стосовно невизначеного та визначеного інтегралів, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули розрахунків. Для кращого сприйняття матеріалу наводиться достатня кількість рисунків.

Кожний розділ складається з параграфів, що містять короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання типових вправ. Для самостійної роботи студентів наводиться комплекс типових вправ. Наприкінці кожного з параграфів запропоновано інтерактивні тестові завдання, що розроблені на основі LaTeX-технологій. Варто зазначити, що тести будуть повнофункціональними, якщо використовувати для перегляду pdf-файлів програму Adobe Reader від 9 версії. Наведена інструкція щодо використання тестів (стор. 46), як засобу модульно-рейтингового контролю знань студентів при вивченні відповідних розділів математичного аналізу.

Автори висловлюють щиру подяку колегам — викладачам кафедри математичного аналізу та інформатики фізико-математичного факультету Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленко, спілкування з якими сприяло написанню цього навчального посібника.

Розділ 1

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Цей розділ є теоретичною основою для подальшого вивчення інших розділів математичного аналізу, що є базовими для таких фундаментальних курсів, як «Рівняння математичної фізики», «Прикладна механіка», «Загальна фізика» та ін.

Відмітимо, що основи математичного аналізу закладено в працях І. Ньютона, Г. Лейбніца, Л. Ейлера та інших математиків 17-18 ст. Обґрунтування математичного аналізу за допомогою поняття границі належить О. Л. Коші.

Даний розділ передбачає вивчення базових понять та методів математичного аналізу, пов'язаних із числовими послідовностями та дійсними функціями дійсного аргументу, обчисленням їх границь та дослідженням останніх на неперервність.

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці вступу до математичного аналізу – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості.

1.1. Множини та функції

1.1.1. Множини та операції над ними.

Множина є основним поняттям сучасної математики. Поняття множини введено аксіоматично як сукупність певних об'єктів довільної природи, і тому множину не можна означити застосовуючи інші означені поняття. Навпаки, за допомогою поняття «множина» означають багато інших понять, і не лише в математиці. Об'єкти, які складають множину, називають елементами цієї множини. Наприклад, можна говорити про множину всіх книг у певній бібліотеці, множину літер українського алфавіту, або про множину всіх коренів певного рівняння тощо. Множини позначають великими літерами, тоді як їх елементи – маленькими.

Твердження, що множина A складається з елементів a_1, a_2, ..., a_n, умовно записується як

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Порядок елементів множини не має значення.

Належність, наприклад, елемента a_1 до множини A записують так $a_1 \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть: $b \notin A$.

Означення 1.1.1. *Множина A називається підмножиною множини B, якщо всі її елементи належать множині B. Записують $A \subset B$.*

У літературі також зустрічається позначення $A \subseteq B$. У цьому випадку під $A \subset B$ слід розуміти строге включення, яке не припускає рівності. Якщо $A \subset B$ й $A \neq B$ та $A \neq \varnothing$, то A називають власною підмножиною множини B. Нестроге включення $A \subseteq B$ допускає рівність (тоді A називається невласною підмножиною множини B).

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 8 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Означення 1.1.2. *Множини A и B називаються рівними (позначається $A = B$), якщо $A \subset B$ та $B \subset A$, тобто A і B складаються з однакових елементів.*

Означення 1.1.3. *Порожньою множиною називається множина, яка не містить жодного елемента. Позначається для такої множини $\varnothing$.*

Існують наступні операції над множинами:

1. **Об'єднання.** Множина C називається об'єднанням множин A і B, якщо вона складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б до однієї з множин A чи B. Запис: $C = A \cup B$.

2. **Перетин.** Множина C називається перетином множин A і B, якщо вона складається з тих і тільки тих елементів, які належать як до множини A, так і до множини B. Запис: $C = A \cap B$.

3. **Різниця.** Множина C називається різницею множин A і B, якщо вона складається з тих і тільки тих елементів, які належать до множини A і не належать до множини B. Запис: $C = A \setminus B$.

   Зокрема, якщо $A \subset B$, то різниця $B \setminus A$ називається доповненням множини A до множини B. Позначається $\overline{A} = B \setminus A$

Окрім об'єднання та перетину двох множин можна розглядати об'єднання та перетин довільної сукупності множин - скінченої або нескінченної. Наприклад, нехай $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ – нескінченна послідовність множин. Тоді об'єднання $C = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ множин A_k — це множина, яка складається виключно з єлементів, що належать хоча б одній з множин $A_k, k = 1, 2, 3, ..$; перетин $C = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ множин A_k - це множина, яка складається виключно з елементів, що належать кожній з множин $A_k, k = 1, 2, 3, ...$

1.1.2. Логічні символи.

У подальшому ми будемо використовувати наступні символи логіки:

1. **Імплікація($\Rightarrow$)** – символ, який ставиться між двома висловлюваннями A і B, тобто $A \Rightarrow B$. Означає, що із висловлювання A випливає висловлювання B. Наприклад, нехай $A = \{$чотирикутник є квадрат$\}$, $B = \{$усі сторони чотирикутника рівні між собою$\}$. Тоді $A \Rightarrow B$.

2. **Еквівалентність($\Leftrightarrow$)**– символ, який також ставиться між двома висловлюваннями A і B, тобто $A \Leftrightarrow B$. Означає, що висловлювання A і B еквівалентні, тобто із висловлювання A випливає висловлювання B і навпаки, із висловлювання B випливає висловлювання A. Наприклад, нехай $A = \{$усі сторони трикутника рівні між собою$\}$, $B = \{$усі кути трикутника рівні між собою$\}$. Тоді $A \Leftrightarrow B$.

3. **Квантор загальності** ($\forall$) – символ, що ставиться замість слова "кожний". Означає, що висловлювання є вірним для кожного елемента множини.

4. **Квантор існування** ($\exists$) – символ, що ставиться замість слова "існує". Означає, що серед елементів множини можна знайти такий, для якого висловлювання є вірним.

Використання логічних символів дозволяє у компактному вигляді записувати різноманітні математичні висловлювання. Наведемо декілька прикладів.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 10 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Приклад 1. Нехай $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ – нескінченна послідовність множин. Тоді перетин і об'єднання множин цієї послідовності може бути записано у наступному вигляді:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : \forall k \;\; x \in A_k\}, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : \exists k \;\; x \in A_k\},$$

тобто об'єднання множин $A_k \;\; (k = 1, 2, ...)$ – це сукупність усіх елементів x, які задовольняють наступній умові: існує натуральне число k, таке що x належить множині A_k. Аналогічно перетин множин $A_k \;\; (k = 1, 2, ...)$ – це сукупність усіх елементів x, які задовольняють наступній умові: для кожного натурального числа k елемент x належить множині A_k.

Приклад 2. Означення 1.1.1 може бути записано у наступному вигляді

$$(A \subset B) \iff (\forall a \in A \;\; a \in B)$$

Приклад 3. Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0$ – множина парних чисел. Тоді

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in N : \exists k \in N \;\; n = 2k\},$$

тобто множина парних чисел складається з усіх натуральних чисел n, які можна зобразити у вигляді $n = 2k$, де k – деяке натуральне число.

Приклад 4. Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. Як відомо, визначена на множині $\mathbb{R}$ числова функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує число $T > 0$ (період функції), таке що для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. Таке означення можна записати наступним чином:

$$\exists T > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x + T) = f(x).$$

1.1.3. Функції, види функцій.

Означення 1.1.4. *Припустимо, що X та Y – довільні множини і кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом (законом) ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$. Тоді говорять, що на множині X задана функція (або відображення) f зі значеннями в множині Y. Функцію f, що діє із множини X у множину Y, записують у вигляді $f : X \to Y$.*

Елемент $y \in Y$, що ставиться у відповідність елементу $x \in X$ функцією f, називається значенням функції в точці x (або образом елемента x); при цьому пишемо $y = f(x)$. Очевидно, що різні елементи $x \in X$ можуть мати той самий образ $f(x)$. В подальшому функцію $f : X \to Y$ будемо також позначати $y = f(x)$, $x \in X$ або просто $f(x)$.

Нехай $f : X \to Y$ – деяка функція. Тоді множина X називається областю визначення функції f і позначується D_f, а множина $E_f = \{y \in Y : \exists x \in X \quad f(x) = y\}$ називається множиною значень функції f. Таким чином, елемент $y \in Y$ належить до E_f тоді й тільки тоді, коли він є образом деякого елемента $x \in X$.

Означення 1.1.5. *Функція $f : X \to Y$ називається бієкцією (взаємно-однозначною функцією), якщо $E_f = Y$ і з нерівності $x_1 \neq x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

З наданого означення випливає, що функція $f : X \to Y$ є бієкцією, якщо для кожного $y \in Y$ існує єдине $x \in X$, таке що $f(x) = y$.

Означення 1.1.6. *Нехай задана бієкція $f : X \to Y$. Тоді оберненою до f функцією називається функція $f^{-1} : Y \to X$, яка кожному елементу $y \in Y$ ставить у відповідність (єдиний) елемент $x \in X$, для якого $f(x) = y$.*

Практичні завдання 1.1

1. Довести наступні твердження:
а) із $A \subset B$ випливає, що $A \cap B = A$ і $A \cup B = B$;
б) із $A \cap B = A$ випливає, що $A \subset B$;
в) із $A \cup B = B$ випливає, що $A \subset B$.
2. Довести рівності:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. Довести наступні включення:
а) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$; $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
4. Чи випливає з рівності $A \setminus B = C$ рівність $A = B \cap C$?
5. Чи випливає з рівності $A = B \cup C$ рівність $A \setminus B = C$?
6. За допомогою логічних символів опишіть наступні множини (див. приклади у підрозділі 1.1.2):

а) множину непарних чисел $\mathbb{N}_1$; б) множину $C = (A_1 \cap A_2) \setminus A_3$, де A_1, A_2 та A_3 – деякі множини; в) множину R усіх рівнобічних трикутників на площині (трикутник із вершинами A, B, C позначається $\triangle ABC$).

7. Яка з наступних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, визначених на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ із значеннями в $\mathbb{R}$, буде бієкцією? Побудуйте графіки цих функцій. Якщо функція f – бієкція, то знайдіть обернену до неї функцію.

а)$f(x) = x$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = \sin x$.

8. Нехай $f : X \to Y$ – функція, що діє з множини X у множину Y. Для множини $A \subset X$ позначимо через $f(A)$ множину всіх $y \in Y$, таких що рівність $y = f(x)$ виконується хоча б для одного $x \in A$. Для множини $B \subset Y$ позначимо через $f^{-1}(B)$ множину всіх $x \in X$, для яких $f(x) \in B$. Множина $f(A)$ називається образом множини A, а множина $f^{-1}(B)$ називається прообразом множини B.

а) за допомогою логічних символів запишіть множини $f(A)$ та $f^{-1}(B)$;
б) чи є вірними рівності $f^{-1}[f(A)] = A$, $f[f^{-1}(B)] = B$?
в) які з наступних тверджень є вірними

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Чи будуть усі написані співвідношення вірними, якщо f – бієкція?

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 14 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

1.2. Множина дійсних чисел

1.2.1. Раціональні та ірраціональні числа. Означення множини дійсних чисел.

Як відомо, в курсі елементарної математики розглядаються наступні числові множини:

1) множина натуральних чисел $\mathbb{N}$;
2) множина цілих чисел $\mathbb{Z}$;
3) множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$;
4) множина ірраціональних чисел $\mathbb{J}$;
5) множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Нагадаємо, що множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ складається з натуральних чисел, нуля і чисел, протилежних натуральним. Таким чином, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$. Далі, кожне раціональне число $r \in \mathbb{Q}$ є нескоротним дробом вигляду $r = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{N}$. Відомо, що кожне раціональне число можна зобразити нескінченним періодичним десятковим дробом і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є раціональним числом.

Означення 1.2.1. *Ірраціональним числом називається нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Дійсним числом називається нескінченний десятковий дріб (періодичний або ні).*

Таким чином, множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ – це об'єднання множин раціональних і ірраціональних чисел, тобто $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$.

Очевидно також, що

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Як відомо, кожне дійсне число x зображається точкою на числовій прямій і, навпаки, кожна точка на числовій прямій зображає деяке дійсне число (див. рис.).

Тому в подальшому дійсне число будемо називати також точкою.

1.2.2. Модуль дійсного числа та його властивості.

Означення 1.2.2. *Модулем дійсного числа a називається саме число a, якщо воно невід'ємне, і протилежне до нього, якщо число a від'ємне. Модуль дійсного числа a позначається $|a|$.*

Таким чином,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Відзначмо наступні властивості модуля:

1. Модуль довільного числа a задовольняє очевидним нерівностям

$$|a| \geq 0, \qquad -|a| \leq a \leq |a| \tag{1.2.2.1}$$

2. Для довільних $a, b \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{1.2.2.2}$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b| \tag{1.2.2.3}$$

$$|ab| = |a||b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0 \tag{1.2.2.4}$$

Доведемо формули (1.2.2.2)-(1.2.2.4). Внаслідок останньої нерівності в (1.2.2.1) маємо

$$-|a| \le a \le |a|, \qquad -|b| \le b \le |b|,$$

звідки

$$a + b \le |a| + |b|, \qquad -(a+b) \le |a| + |b| \tag{1.2.2.5}$$

Оскільки одне з чисел $a+b$ або $-(a+b)$ збігається з $|a+b|$, то нерівність (1.2.2.2) випливає з (1.2.2.5).

Далі, з формули (1.2.2.2) маємо

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|, \qquad |b| = |(b-a)+a| \le |a-b| + |a|,$$

і, отже,

$$|a| - |b| \le |a-b|, \qquad -(|a|-|b|) \le |a-b| \tag{1.2.2.6}$$

Оскільки одно з чисел $|a|-|b|$ або $-(|a|-|b|)$ збігається з $||a|-|b||$, то формула (1.2.2.3) є наслідком (1.2.2.6).

Нарешті, формула (1.2.2.4) випливає з означення модуля і правила знаків для множення та ділення.

Зауваження 1.2.3. *Властивості* 3) *і* 4) *справедливі для любого скінченного числа доданків та співмножників, тобто:*

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

$$|a_1 a_2 \ldots a_n| \le |a_1||a_2| \ldots |a_n|$$

1.2.3. Проміжки та околи.

Як відомо, існують наступні різновиди проміжків:

1. інтервал $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. відрізок $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
3. півінтервали $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ та $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

В цих нерівностях a та b $(a < b)$ – деякі числа (кінці проміжку).

Крім того, розглядаються нескінченні проміжки (проміжки із нескінченними кінцями) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Надалі позначатимемо через $\langle a, b\rangle$ будь який із зазначених вище проміжків із скінченними або нескінченними кінцями (це означає, що у випадку скінченного кінця a або b цей кінець може як належати, так і не належати до $\langle a, b\rangle$).

Означення 1.2.4. *Нехай $a \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$ – деяке число. Тоді ε- околом точки a називається інтервал $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

Проколотим ε- околом точки a називається множина $\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Таким чином, проколотий ε-окіл точки a – це ε-окіл точки a, з якого видалили саму точку a.

1.2.4. Обмежені множини. Верхня та нижня межа.

Нехай A – деяка числова множина (тобто множина, елементами якої є дійсні числа).

Означення 1.2.5. *Множина A називається обмеженою зверху, якщо існує дійсне число L таке, що $x \le L$ для кожного $x \in A$.*

Означення 1.2.6. *Множина A називається обмеженою знизу, коли існує дійсне число l таке, що $x \ge l$ для кожного $x \in A$.*

Очевидно, у обмеженої зверху (знизу) множини A існує нескінченно багато чисел, що обмежують її зверху (знизу).

Означення 1.2.7. *Множина A називається обмеженою , якщо вона обмежена як зверху так і знизу, тобто існують дійсні числа L и l такі, що $l \le x \le L$ для кожного $x \in A$.*

Прикладом обмеженої множини може бути будь-який скінчений проміжок в $\mathbb{R}$ (наприклад, відрізок $[a, b]$). Використовуючи властивості модуля, можна легко довести, що попереднє визначення обмеженої множини рівносильне наступному.

Означення 1.2.8. *Множина A називається обмеженою, якщо існує дійсне число $c > 0$ таке, що $\mathtt{x} \le c$ для довільного $x \in A$.*

Оскільки у обмеженої зверху(знизу) множини існує нескінченно багато чисел, що її обмежують зверху(знизу), то виникають наступні два означення.

Означення 1.2.9. *Найменше з усіх чисел, що обмежують зверху множину A, називається точною верхньою межею множини A і позначається $\sup\, A$(читається 'супремум').*

Наприклад, коли $A = (-\infty; 5]$, то $\sup A = 5$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 19 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Означення 1.2.10. *Найбільше з усіх чисел, що обмежують знизу множину A, називається точною нижньою межею множини A і позначається* $\inf A$*(читається 'інфімум').*

Наприклад, якщо $A = \{+1, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, \dots, +\frac{1}{n}, \dots\}$, то $\inf A = 0$.
Із наведених прикладів можна зробити висновок, що точна межа можуть як належати множині A, так і не належати їй.

Проаналізуємо більш детально означення 1.2.9. Нехай $\beta = \sup A$. Тоді: 1) число β обмежує зверху множину A, тобто нерівність $x \le \beta$ виконуються для кожного $x \in A$; 2) для довільного $\varepsilon > 0$ число $\beta - \varepsilon$ вже не обмежує множину A, і тому знайдеться точка $x \in A$, така що $x > \beta - \varepsilon$.

Таким чином, означення 1.2.9 рівносильне наступному означенню.

Означення 1.2.11. *Число β називається точною верхньою межею множини A, якщо:*
1) $\forall x \in A \;\; x \le \beta$
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \;:\; x > \beta - \varepsilon$

Аналогічно означення 1.2.10 рівносильне наступному означенню.

Означення 1.2.12. *Число α називається точною нижньою межею множини A, якщо:*
1) $\forall x \in A \;\; x \ge \alpha$
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \;:\; x < \beta + \varepsilon$

Теорема 1.2.1 (Про існування точних меж)**.** *Будь-яка обмежена зверху(знизу) числова множина A має точну верхню(нижню) межу.*

Практичні завдання 1.2

1. Розв'язати нерівності:

а) `x+1` $\le 0,01$; б) `x-2` ≥ 10; в) `x` $\ge$ `x+1`;

2.Чи будуть наступні множини дійсних чисел: а) обмеженими знизу; б) обмеженими зверху; в) обмеженими?

$A = [1;3]$; $B = (2;+\infty)$; $C = (-\infty;1]$; $D = [1;2) \bigcup [4;8]$; $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}[2k;2k+1]$

3. Для наведених множин знайти точну верхню та точну нижню межі

$A = (0;5)$; $B = [1;2) \bigcup [3;8)$; $C = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

4. Нехай X та Y — дві числові множини такі, що $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (x \le y)$. Довести, що $\sup X \le \inf Y$.

5. Нехай X— числова множина і Y — множина усіх чисел, протилежних до X, тобто $Y = \{-x : x \in X\}$. Довести, що $\inf Y = -\sup X$, $\sup Y = -\inf X$.

6. Нехай X та Y — числові множини, $Z = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ — множина усіх сум вигляду $x + y$, де $x \in X, y \in Y$. Довести, що $\inf Z = \inf X + \inf Y$, $\sup Z = \sup X + \sup Y$.

7. Нехай X та Y — числові множини такі, що $\forall x \in X \quad (x \ge 0)$, $\forall y \in Y \quad (y \ge 0)$. Розглянемо множину Z усіх добутків xy, де $x \in X, y \in Y$. Довести, що $\inf Z = \inf X \inf Y$, $\sup Z = \sup X \sup Y$.

8. Нехай числова множина X має найбільший елемент a, тобто число a належить множині X і є найбільшим серед усіх чисел $x \in X$. Довести, що $a = \sup X$. Довести, що для найменшого елемента b множини X (якщо він є) є вірною рівність $b = \inf X$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 21 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

1.3. Границя послідовності

1.3.1. Означення числової послідовності та її границі.

Означення 1.3.1. *Числовою послідовністю називається функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, яка відображує множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ у множину дійсних чисел $\mathbb{R}$.*

Позначається послідовність $\{x_n\}_1^\infty$, де число $x_n = f(n)$ називається загальним членом послідовності. Наприклад, $\{\frac{1}{n}\}_1^\infty$ – це нескінченна послідовність чисел
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ ..., \ \frac{1}{n}, \ ....$

Означення 1.3.2. *Числова послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо множина значень відповідної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ обмежена зверху (відповідно, знизу). Це означає, що існує число C, таке що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leq C$ (відповідно $x_n \geq C$).*
Числова послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ називається обмеженою, якщо вона обмежена зверху та знизу. Це означає, що існує число C, таке що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|x_n| \leq C$

Означення 1.3.3. *Число a називається границею послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, якщо для довільного додатного числа ε можна підібрати натуральне число $N = N_\varepsilon$ таке, що при всіх $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому пишуть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, або $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, або просто $x_n \to a$.*

Використовуючи логічні символи, надане означення можна записати так:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \forall\varepsilon > 0 \;\exists N = N_\varepsilon \;\forall n \geq N_\varepsilon \;\; |x_n - a| < \varepsilon$$

Оскільки нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то означення границі можна сформулювати так:

$$x_n \to a, \text{ якщо } \forall\varepsilon > 0 \;\exists N = N_\varepsilon \;\forall n \geq N \quad x_n \in U(a;\varepsilon))$$

Відзначимо, що в попередніх формулах запис $N = N_\varepsilon$ означає, що вибір числа N залежить від вибору числа ε.

Означення 1.3.4. *Якщо $x_n \to a$, то говорять, що послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ збігається до числа a.*

Приклад. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо нерівність $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Позначимо через N_ε деяке натуральне число, яке задовольняє нерівності $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді для всіх $n \geq N_\varepsilon$ будемо мати $n > \frac{1}{\varepsilon}$, тобто $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Таким чином, для любого $\varepsilon > 0$ є знайденим натуральне число N_ε таке, що при всіх $n \geq N_\varepsilon$ виконується нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$, або $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. За визначенням границі маємо, що $\frac{1}{n} \to 0$.

1.3.2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення 1.3.5. *Послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ називається нескінченно малою послідовністю (НМП), якщо $x_n \to 0$.*
Внаслідок означення 1.3.3 послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ є нескінченно малою тоді й тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $N = N_\varepsilon$ таке, що для довільного $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

Означення 1.3.6. *Послідовність* $\{x_n\}_1^\infty$ *називається нескінченно великою послідовністю (НВП), якщо для будь-якого числа* M *можна знайти* $N = N_M$ *таке, що для всіх* $n \geq N$ *виконується нерівність* $|x_n| > M$.
У цьому випадку пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *або* $x_n \to \infty$.
Окрім того, для НВП $\{x_n\}_1^\infty$ *пишемо* $x_n \to +\infty$ $(x_n \to -\infty)$, *якщо* $x_n > 0$ *(відповідно* $x_n < 0$*) для всіх* n, *починаючи з деякого* $N \in \mathbb{N}$.

У наступній теоремі встановлюється зв'язок між НМП і НВП.

Теорема 1.3.1. *Послідовність* $\{x_n\}_1^\infty$ *є НВП тоді і тільки тоді, коли послідовність* $\{\frac{1}{x_n}\}_1^\infty$ *є НМП.*

Доведення. Нехай $x_n \to \infty$. Тоді за означенням НВП для кожного $\varepsilon > 0$ існує $N = N_\varepsilon$ таке, що для кожного $n \geq N_\varepsilon$ виконується нерівність $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді для всіх $n \geq N_\varepsilon$ маємо $|\frac{1}{x_n}| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$. Це значить, що $\frac{1}{x_n} \to 0$. Зворотне доводиться за аналогією. □

Теорема 1.3.2. *Нехай* $\{x_n\}_1^\infty$ *— послідовність і* a *— деяке число. Тоді для того, щоб* $x_n \to a$, *необхідно і достатньо, щоб існувала НМП* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *така, що* $x_n = a+\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$

Доведення. Нехай $x_n \to a$ і $\alpha_n = x_n - a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N = N_\varepsilon$ таке, що для кожного $n \geq N$ виконується нерівність $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$, тобто $\alpha_n \to 0$. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ можна представити у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де $\alpha_n \to 0$. Зворотне доводиться аналогічно. □

Теорема 1.3.3 (Властивості НМП). *Нехай $\{x_n\}_1^\infty$ і $\{y_n\}_1^\infty$ — дві послідовності. Тоді:*

1. *Якщо $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$, то $x_n + y_n \to 0$, тобто сума двох НМП є НМП.*
2. *Якщо $x_n \to 0$ і $\{y_n\}_1^\infty$ — обмежена послідовність, то $x_n y_n \to 0$.*

Доведення. (1) Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує N' таке, що при всіх $n \geq N'$ виконується нерівність $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окрім того, існує N'' таке, що при всіх $n \geq N''$ виконується нерівність $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Позначимо через N найбільше з чисел N' і N'', тобто $N = max\{N', N''\}$. Тоді для кожного $n \geq N$ виконується нерівність

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

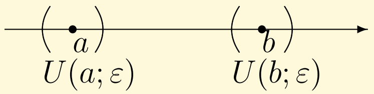
Це означає, що $(x_n + y_n) \to 0$.
(2) Маємо $|y_n| < C \ \ (n \in \mathbb{N})$, де $C > 0$ — деяке число (константа). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $x_n \to 0$, то знайдеться N таке, що при всіх $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n| < \frac{\varepsilon}{C}$. Тоді для кожного $n \geq N$ будемо мати

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.$$

Це означає, що $x_n y_n \to 0$. □

1.3.3. Властивості границі послідовності.

1. Якщо послідовність має границю, то вона (границя) єдина.



Доведення. (дивись малюнок вище). Нехай $x_n \to a$, $x_n \to b$ і $a \neq b$. Виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб околи $(a;\varepsilon)$ і $(b;\varepsilon)$ не перетиналися (для цього достатньо взяти $\varepsilon = \frac{a+b}{2}$). За визначенням границі знайдеться номер N' такий, що $x_n \in U(a,\varepsilon)$ при всіх $N \geq N'$. Аналогічно, знайдеться N'' таке, що $x_n \in U(b;\varepsilon)$ при всіх $n \geq N''$. Виберемо n_0 так, щоб виконувалися нерівності $n_0 \geq N'$ і $n_0 \geq N''$. Тоді отримаємо $x_n \in U(a,\varepsilon) \bigcap U(b,\varepsilon)$, що неможливо, оскільки околи не перетинаються. Отримана суперечність доводить, що $a = b$. □

2. Якщо $\{x_n\}_1^\infty$ — деяка послідовність, усі члени якої приймають значення C (тобто $x_n = C$, $n \in \mathbb{N}$), то $x_n \to C$.

Доведення. Для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного індексу n виконується нерівність x_{n}-C $= 0 < \varepsilon$. Тому безпосередньо з означення границі послідовності маємо $x_n \to C$. □

3. Якщо послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ має границю, то вона (послідовність) обмежена.

Доведення. Нехай $x_n \to a$. Тоді за означенням границі знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $n \geq N$ буде виконуватися нерівність x_{n}-a < 1 (тут ми в якості ε взяли $\varepsilon = 1$). Таким чином для кожного $n \geq N$ маємо

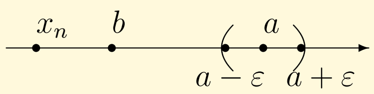
x_{n} $=$ (x_{n}-a)+a $\leq$ x_{n}-a $+$ a $< 1 +$ a (1.3.3.1)

Позначимо тепер через C найбільше з чисел x_{1}, x_{2}, ..., x_{N-1}, $1 +$ a. Тоді з (1.3.3.1) випливає нерівність x_{n} $\leq C$, $n \in \mathbb{N}$. □

4. Якщо $x_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, де b — деяке число і $x_n \to a$, то $a \leq b$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Стор. 26 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

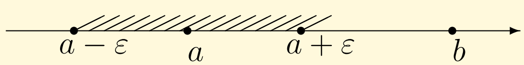
Доведення. Припустимо, що навпаки $a > b$ (дивись малюнок).



Виберемо $\varepsilon > 0$ так щоб виконувалась нерівність $b \le a - \varepsilon$. Тоді за визначенням границі усі члени послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, починаючи з деякого номеру, лежать в ε-околі $U(a;\varepsilon)$ і тому задовольняють нерівності $x_n > a - \varepsilon \ge b$, яка суперечить припущенню $x_n \le b$. $\square$

5. Нехай $x_n \to a$ і $a < b$. Тоді існує таке натуральне N, що $x_n < b$ при всіх $n \ge N$.

Доведення. (дивись малюнок).



Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $a + \varepsilon < b$. Тоді для любого N, починаючи с деякого $n \ge N$, справедливим є включення $x_n \in U(a;\varepsilon)$. Звідси випливає, що $x_n < b$ при всіх $n \ge N$. $\square$

6. Нехай $\{x_n\}_1^\infty$, $\{y_n\}_1^\infty$, $\{z_n\}_1^\infty$ — три послідовності такі, що

$$x_n \le y_n \le z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3.3.2}$$

й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Доведення. Візьмемо довільний ε-окіл $U(A,\varepsilon)$. Тоді знайдуться натуральні N' та N'', такі що

$$x_n \in U(A,\varepsilon), \quad n \ge N'; \qquad z_n \in U(A,\varepsilon), \quad n \ge N'.$$

Нехай N — найбільше з чисел N', N'' . Тоді $x_n \in U(A,\varepsilon)$, $z_n \in U(A,\varepsilon)$ для всіх $n \ge N$ й, отже, $[x_n, z_n] \subset U(A,\varepsilon)$. Звідси й з (1.3.3.2) випливає включення $y_n \in U(A,\varepsilon)$, $n \ge N$,

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Стор. 27 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

тобто $y_n \to A$. □

7. Якщо $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $(x_n + y_n) \to a + b$, $x_n y_n \to ab$. Крім того, якщо $b \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.

Доведення. Згідно із теоремою 1.3.2 маємо $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = b + \beta_n$, де $\alpha_n \to 0$ і $\beta_n \to 0$. Тоді

$$x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n),$$

де $(\alpha_n + \beta_n) \to 0$ (дивись теорему 1.3.3). Звідси випливає, що $(x_n + y_n) \to (a + b)$. Тепер розглянемо добуток $x_n y_n$. Маємо

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n = ab + \gamma_n,$$

де $\gamma_n = b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n$. Згідно з теоремою 1.3.3 $\gamma_n \to 0$ і, отже, $x_n y_n \to ab$. Для частки $\frac{x_n}{y_n}$ – без доведення. □

Практичні завдання 1.3

1.Нехай $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Використовуючи безпосередньо означення границі послідовності, довести, що $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

2. Використовуючи безпосередньо означення нескінченно великої послідовності, довести рівність $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$.

3. Чи буде будь-яка необмежена послідовність нескінченно великою? Навести приклад.

4. Знайти границі послідовностей:

4.1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$ 4.2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-2n+3}{6n^2-1}$ 4.3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$

4.4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+1}{5n^2-3n}$ 4.5) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 4.6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2-3}}{n+1}$

4.7) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$ 4.8) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt{n}+\sqrt{n^3+1}}$ 4.9) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3}{5\cdot 2^n-1}$

1.4. Функції та їх границі

1.4.1. Означення числової функції. Обмежені функції.

Означення 1.4.1. *Числовою функцією називається будь-яка функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на деякій (взагалі кажучи, довільній) множині X, що набуває дійсних значень, тобто значень в множині дійсних чисел $\mathbb{R}$.*

Означення 1.4.2. *Сумою двох числових функцій $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ називається функція $(f+g) : X \to \mathbb{R}$, визначена рівністю*

$$(f+g)x = f(x) + g(x), \quad x \in X.$$

Аналогічним чином визначаються різниця $(f-g)$, добуток (fg) і частка $\left(\frac{f}{g}\right)$ двох функцій f і g; при цьому для частки припускається, що $g(x) \neq 0, \ \ x \in X$.

Означення 1.4.3. *Числова функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається обмеженою зверху, обмеженою знизу або (просто) обмеженою, якщо множина її значень E_f відповідно обмежена зверху, знизу або просто обмежена.*

З цього означення випливає, що:

1)функція f обмежена зверху (знизу), якщо існує число $L \in \mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq L$ (відповідно, $f(x) \geq L$);

2)функція f обмежена, якщо існує число $L > 0$ таке, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність `f(x)` $\leq L$.

Означення 1.4.4. *Точною верхньою (нижньою) межею функції $f : X \to \mathbb{R}$ називається точна верхня (нижня) межа множини її значень E_f.*
Позначення: $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ *— верхня межа,* $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ *— нижня межа функції f.*

Таким чином, рівність $a = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ рівносильна виконанню наступних двох умов:

1. $f(x) \leq a$ для будь-якого $x \in A$;
2. для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $x \in X$ таке, що $f(x) > a - \varepsilon$.

Аналогічно рівність $b = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ рівносильна виконанню наступних двох умов:

1. $f(x) \geq b$ для будь-якого $x \in X$;
2. для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $x \in X$ таке, що $f(x) < b + \varepsilon$.

1.4.2. Способи завдання функцій.

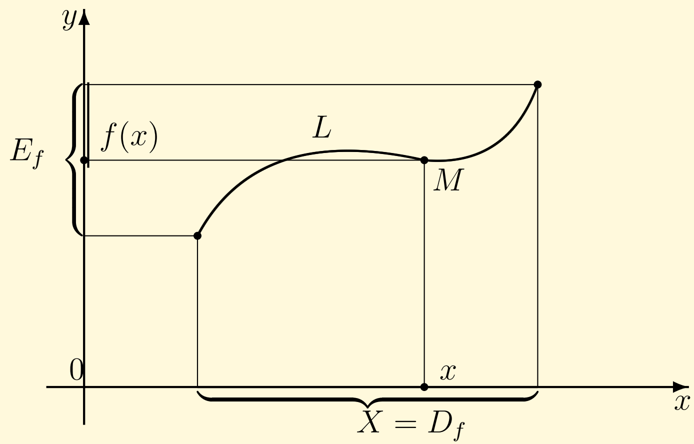
Усюди в подальшому розглядатимуться лише числові функції дійсної змінної, тобто функції вигляду $f : X \to \mathbb{R}$, де $X \subset \mathbb{R}$ є деяка множина дійсних чисел. Такі функції можуть задаватися одним з наступних способів:

1. **Аналітичний спосіб**. Функція f визначається за допомогою аналітичної формули $y = f(x)$. Наприклад, $y = \sqrt{x-6}$, $y = \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}$. При цьому, якщо не сказано супротивне, областю визначення функції буде множина усіх чисел x, для яких формула має сенс.

   Наприклад, коли $y = \sqrt{x-6}$, то областю визначення буде множина усіх чисел x, для яких $x - 6 \geq 0$ або $x \geq 6$, тобто $D_f = [6; +\infty)$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 31 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

2. **Графічний спосіб**. Функція задається за допомогою свого графіка. Нагадаємо, що графіком функції $f : X \to \mathbb{R}$ називається множина точок M на координатній площині з координатами $(x, f(x))$, $x \in X$. Графік функції уявляє собою деяку криву L (див. рис.).



3. **Словесний**. Функція задається за допомогою деякого речення. Наприклад, функція E — "ант'є"(ціла частина) задається наступним реченням: ціла частина $\mathrm{E}(x)$ любого дійсного числа x — це найбільше ціле число, яке не перевищує x. Тоді маємо: $\mathrm{E}(0) = 0$, $\mathrm{E}(2,5) = 2$, $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.

4. **Табличний**. Цей спосіб використовується переважно для функцій, область визначення яких складається зі скінченого числа точок, і полягає в наведенні таблиці наступного вигляду:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Згідно з цією таблицею значенню аргументу $x_i \in X$ відповідає значення функції y_i.

1.4.3. Границя функції в точці.

Означення 1.4.5 (границя функції за Гейне). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому проколотому околі $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільної числової послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої, що $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ й $x_n \to x_0$, виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

.

Означення 1.4.6. *(границя функції за Коші). Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому проколотому околі $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного околу $u(A;\varepsilon)$ точки A знайдеться проколотий окол $u^\circ(x_0;\delta)$ точки x_0, такий, що $u^\circ(x_0;\delta) \subset \overset{\circ}{U}(x_0)$ і при всіх $x \in \overset{\circ}{U}(x_0;\delta)$ виконується включення $f(x) \in u(A;\varepsilon)$.*

Зазначимо, що вираз $x \in \overset{\circ}{U}(x_0;\delta)$ можна трактувати як подвійну нерівність $0 <$ `x-x_0` $< \delta$, а вираз $f(x) \in U(A;\varepsilon)$ як нерівність `f(x)-A` $< \varepsilon$. Звідси випливає, що попереднє означення можна сформулювати у наступному вигляді :

Означення 1.4.7. *Число A називається границею (за Коші) функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta_\varepsilon$ таке, що при всіх x, що задовольняють нерівності $0 <$ `x-x_0` $< \delta$, виконується нерівність `f(x)-A` $< \varepsilon$.*

Тут запис $\delta = \delta_\varepsilon$ означає, що вибір числа δ залежить від вибору числа ε.

Теорема 1.4.1. *Число A є границею функції за Коші тоді і тільки тоді, коли воно є границею цієї функції за Гейне (тобто означення границі функції за Гейне та за Коші еквівалентні).*

Доведення. Нехай A — границя за Коші. Доведемо, що число A є також границею за Гейне. Для цього візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}_1^\infty$, таку, що $x_n \in \mathring{U}(x_0)$ й $x_n \to x_0$. Позначимо $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ й доведемо, що $y_n \to A$. Візьмемо деякий окіл $U(A;\varepsilon)$. Тоді згідно з означенням границі за Коші знайдеться проколотий окіл $\mathring{U}(x_0, \delta)$ такий, що

$$f(x) \in U(A;\varepsilon), \quad x \in \mathring{U}(x_0, \delta). \tag{1.4.3.1}$$

Оскільки $x_n \to x_0$, то знайдеться натуральне N таке, що $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ для всіх $n \geq N$. Звідси й з (1.4.3.1) випливає, що $y_n = f(x_n) \in u(A;\varepsilon)$ при всіх $n \geq N$. За означенням границі послідовності це означає, що $y_n \to A$.
Зворотнє твердження (тобто Гейне $\Rightarrow$ Коші) — без доведення. □

Означення 1.4.8. *Число A, що є границею функції $f(x)$ за Гейне (або, рівносильно, за Коші) називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$.*

Позначення границі:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Наведемо, далі, означення лівої та правої границь.

Означення 1.4.9. *1. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(a; x_0)$. Тоді:*
(i) число A називається лівою границею функції $f(x)$ у точці x_0 за Гейне, якщо для кожної послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n \in (a; x_0)$ й $x_n \to x_0$, виконується співвідношення $f(x_n) \to A$;
(ii) число A називається лівою границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Коші, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ справедливе включення $f(x) \in u(A; \varepsilon)$.
2. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(x_0; b)$. Тоді:
(i) число A називається правою границею функції $f(x)$ у точці x_0 за Гейне, якщо для кожної послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n \in (x_0, b)$ й $x_n \to x_0$ маємо $f(x_n) \to A$.
(ii) число A називається правою границею функції $f(x)$ у точці x_0 за Коші, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при всіх $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ справедливим є включення $f(x) \in u(A; \varepsilon)$.
3. Ліва та права границя називаються односторонніми границями.

За аналогією із теоремою 1.4.1 доводиться еквівалентність означень лівої (відповідно, правої) границі за Гейне та за Коші; тому можна говорити просто про ліву та праву границі. Позначають ліву та праву границі відповідно

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Теорема 1.4.2. *(зв'язок між границею та односторонніми границями). Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому проколотому околі $\overset{\circ}{U}(x_0)$. Тоді:*
1) якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то існують односторонні границі в точці x_0 й виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A. \tag{1.4.3.2}$$

2) якщо існують односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0 й виконується рівність (1.4.3.2), то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.
Таким чином, необхідною й достатньою умовою існування границі є існування та рівність між собою лівої та правої границь.

Доведення. 1) Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}_1^\infty$, таку що $x_n < x_0$ й $x_n \to x_0$. Тоді за означенням границі за Гейне матимемо $f(x_n) \to A$, що дає рівність $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$. Аналогічно доводиться рівність $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.
2) І навпаки, нехай має місце (1.4.3.2). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді згідно з означенням односторонніх границь за Коші існують такі додатні числа δ_1, δ_2 , що для всіх x, які задовольняють умовам $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ або $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ виконується нерівність `f(x)-A` $< \varepsilon$. Поклавши $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, будемо мати `f(x)-A` $< \varepsilon$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$. А це й означає, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. □

1.4.4. Границі функцій при $x \to \infty$. Загальне означення границі.

Означення 1.4.10. *Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(c; +\infty)$. Тоді:*
1) число A називається її границею за Гейне при $x \to +\infty$, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n \in (c; +\infty)$ і $x_n \to +\infty$, маємо $f(x_n) \to A$.
2) число A називається границею за Коші функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$ таке, що при всіх $x > M$ має місце включення $f(x) \in u(A; \varepsilon)$.

Аналогічно з теоремою 1.4.1 можна довести еквівалентність наданих означень границі за Коші та Гейне; тому можна говорити про границю A функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, яка позначається

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Означення 1.4.11. *Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(-\infty; c)$. Тоді:*
1) число A називається її границею за Гейне при $x \to -\infty$, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n \in (-\infty; c)$ й $x_n \to -\infty$, маємо $f(x_n) \to A$.
2) число A називається границею за Коші функції $f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M < 0$ таке, що при всіх $x < M$ має місце включення $f(x) \in U(A; \varepsilon)$.

Аналогічно з попереднім надані означення границі за Коші та Гейне при $x \to -\infty$ рівносильні. Така границя позначається

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 37 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Означення 1.4.12. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині $(-\infty; -c) \cup (c; +\infty)$, $c > 0$. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо існують обидві границі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ й $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ та виконується рівність*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

Границю функції $f(x)$ при $x \to \infty$ позначатимемо

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x). \tag{1.4.4.1}$$

Неважко довести, що рівність (1.4.4.1) еквівалентна одному з наступних тверджень:

1) для будь-якоїої послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n \to \infty$, маємо $f(x_n) \to A$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що при всіх x, що задовольняють нерівності x $> M$, маємо $f(x) \in U(A; \varepsilon)$.

Для того, щоб уніфікувати надані вище означення границь. введемо наступне означення.

Означення 1.4.13. *Узагальненою точкою будемо називати або точку $x_0 \in \mathbb{R}$, або один з наступних символів: $x_0 - 0,\ x_0 + 0,\ -\infty,\ \infty$. Узагальнену точку будемо позначати через a, так що можливою є одна з наступних рівностей:*

$$a = x_0, \quad a = x_0 - 0, \quad a = x_0 + 0, \quad a = +\infty, \quad a = -\infty, \quad a = \infty. \tag{1.4.4.2}$$

Нехай, далі, $\varepsilon > 0$ — деяке число. Тоді проколотим ε-околом узагальненої точки a будемо називати числову множину $\mathring{U}(a, \varepsilon)$ (або просто $\mathring{U}(a)$, якщо значення ε неважливе), визначену наступними співвідношеннями:

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon),\quad \overset{\circ}{U}(x_0-0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,x_0),\quad \overset{\circ}{U}(x_0+0,\varepsilon)=(x_0,x_0+\varepsilon)$$
$$\overset{\circ}{U}(+\infty,\varepsilon)=(\varepsilon,+\infty),\quad \overset{\circ}{U}(-\infty,\varepsilon)=(-\infty,-\varepsilon),\quad \overset{\circ}{U}(\infty,\varepsilon)=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty).$$

Тепер можна сформулювати загальне означення границі функції, яке охоплює означення 1.4.8, 1.4.9,1.4.10, 1.4.11 й 1.4.12

Означення 1.4.14. *Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому проколотому околі $\overset{\circ}{U}(a)$ узагальненої точки a. Число A називається границею функції f при $x\to a$ й пишеться $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, якщо виконуються наступні рівносильні між собою твердження:*

1) для любої послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, такої що $x_n\in\overset{\circ}{U}(a)$ й $x_n\to a$, має місце співвідношення $f(x_n)\to A$;

2) для всякого околу $U(A,\varepsilon)$ точки A існує проколотий окіл $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ узагальненої точки a, такий що при всіх $x\in\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ справедливим є включення $f(x)\in U(A,\varepsilon)$.

Зазначимо, що в твердженні 1) запис $x_n\to a$ у випадках $a=x_0-0,\ a=x_0+0$ означає, що $x_n\to x_0$.

1.4.5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Означення 1.4.15. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому проколотому околі $\mathring{U}(a)$ узагальненої точки a. Функція f називається нескінченно великою функцією при $x \to a$, якщо є вірними наступні еквівалентні між собою твердження:*

1) для довільної послідовності $\{x_n\}_1^\infty$ такої, що $x_n \in \mathring{U}(a)$ й $x_n \to a$, виконується співвідношення $f(x_n) \to \infty$;

2) для довільного числа $M > 0$ існує проколотий окіл $\mathring{U}(a, \delta)$ такий, що при всіх $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ виконується нерівність `f(x)` $> M$.

Рівносильність тверджень 1) та 2) доводиться за аналогією з доведенням теореми 1.4.1. Позначення нескінченно великої функції:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Крім того, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ й у деякому проколотому околі $\mathring{U}(a)$ виконується нерівність $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, то пишемо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (відповідно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Зауваження 1.4.16. *Не слід думати, що кожна функція, визначена в деякому околі $\mathring{U}(a)$, має скінчену або нескінченну границю при $x \to a$. Наприклад, у функції $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ відсутня як скінчена, так і нескінченна границя при $x \to 0$.*

Означення 1.4.17. *Функція $f(x)$ називається нескінченно малою функцією при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.*

Таке означення еквівалентне наступному : функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться проколотий окіл $\mathring{U}(a, \delta)$ такий, що для кожного $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ виконується нерівність `f(x)` $< \varepsilon$.

Теорема 1.4.3 (зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими функціями)**.** *Для того, щоб функція $f(x)$ була нескінченно великою при $x \to a$ необхідно й достатньо, щоб функція $\dfrac{1}{f(x)}$ була нескінченно малою при $x \to a$.*

Доведення. Виберемо довільну послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ так, щоб $x_n \to a$. Тоді умова, що $f(x)$ є нескінченно великою рівносильна тому, що $f(x_n) \to \infty$, а умова, що $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою рівносильна тому, що $\dfrac{1}{f(x_n)} \to 0$. За теоремою 1.3.1 маємо еквівалентність

$$f(x_n) \to \infty \iff \frac{1}{f(x_n)} \to 0.$$

Тепер згідно з означенням границі за Гейне маємо твердження теореми. □

У наступних теоремах показано, що нескінченно малі функції мають ті ж самі властивості, що й нескінченно малі послідовності.

Теорема 1.4.4. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — функції, визначені в $\mathring{U}(a)$. Тоді: 1) якщо $f(x)$ і $g(x)$ — нескінченно малі функції при $x \to a$, то $f(x)+g(x)$ також є нескінченно малою функцією при $x \to a$; 2) якщо $f(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$, а $g(x)$ — обмежена функція, то $f(x)g(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.*

Доведення. Твердження теореми є наслідком означення границі за Гейне та теореми 1.3.3 □

Теорема 1.4.5. *Нехай функція $f(x)$ визначена в проколотому околі $\overset{\circ}{U}(a)$ узагальненої точки a і A — деяке число. Для того, щоб виконувалась рівність $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб існувала нескінченно мала функція $\alpha(x)$, така що $f(x) = A + \alpha(x)$.*

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 1.3.2 і означення границі функції за Гейне. □

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 42 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

1.4.6. Властивості границі функції.

Теорема 1.4.6. *Границя функції має наступні властивості:*

1. *Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to a$, то ця границя єдина.*
2. *Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то функція $f(x)$ обмежена в деякому околі $\overset{\circ}{U}(a)$.*
3. *Якщо $f(x) = C$ — константа, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$.*
4. *Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і до того ж $f(x) \le C$, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le C$.*
5. *Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ і C — деяке число таке, що $B > C$, то при всіх x із деякого околу $\overset{\circ}{U}(a)$ виконується нерівність $f(x) > C$.*
6. *Якщо $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ й $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.*
7. *Якщо існують границі $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, то існують також відповідні границі у функцій $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ й справедливі рівності*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B, \quad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB.$$

Крім того, якщо $B \ne 0$, то існує границя $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ й $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Доведення. 1. Нехай маємо дві границі A та B, $A \neq B$. Тоді з означення границі за Гейне випливає, $f(x_n) \to A$ і $f(x_n) \to B$ для послідовності $x_n \to a$, що суперечить властивості 1) границі послідовності (див. п. 1.3.3).
2. Нехай $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Тоді згідно з означенням границі за Коші існує проколотий окіл $\mathring{U}(x_0,\delta)$ такий, що $f(x) \in U(A,1)$, $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$, тобто $A-1 < f(x) < A+1$. Таким чином, функція $f(x)$ обмежена на $\mathring{U}(x_0,\delta)$.
5. Виберемо окіл $U(B;\varepsilon)$ точки B так, щоб $C \notin U(B;\varepsilon)$. Тоді із означення границі функції за Коші знайдеться окіл $\mathring{U}(a,\delta)$ такий, що при всіх $x \in \mathring{U}(a,\delta)$ маємо $f(x) \in U(B;\varepsilon)$. Це означає, що при всіх $x \in \mathring{U}(a,\delta)$ справедлива нерівність $f(x) > C$.
Всі інші властивості випливають з означення границі функції за Гейне та аналогічних властивостей границі послідовності, перелічених у п. 1.3.3. □

Властивоті 3 та 7 дають такий

Наслідок 1.4.18. *Якщо існує границя* $\lim_{x\to a} f(x)$, *то для довільного числа* c

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 44 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Практичні завдання 1.4

1. Знайти області визначення наступних функцій:

1.1) $y = \ln(2x+1)$ 1.2) $y = \sqrt{5-2x}$ 1.3) $y = \dfrac{1}{x^2+3}$

1.4) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$ 1.5) $y = 1-\sqrt{1-x^2}$ 1.6) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$

1.7) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 1.8) $y = \arcsin(x-2)$ 1.9) $y = \arccos\sqrt{x}$

2. Які з наступних функцій є парними, які непарними, які не є ані парними, ані непарними?

2.1) $y = x^6-2x^2$ 2.2) $y = x-x^2$ 2.3) $y = \cos x$

2.4) $y = \sin 2x$ 2.5) $y = \dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 2.6) $y = \dfrac{a^x+1}{a^x-1}$

3. Використовуючи означення границі функції, довести рівність $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$.

4. Знайти границі

4.1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+2}-x}$ 4.2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 4.3) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

4.4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ 4.5) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+2}-x\right)$ 4.6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

4.7) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{3x^3-4x^2+5}$ 4.8) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{5x^3-3}$ 4.9) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+5}$

4.10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 4.11) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$ 4.12) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

4.13) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 45 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Інтерактивні тестові завдання, тест 1

Інтерактивні тестові завдання тесту 1 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: множини та функції, множина дійсних чисел, границя послідовності, функції та їх границі. Тестове завдання складаються з 30 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

29. (4^{pts}) Знайти границю $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x^2}$.

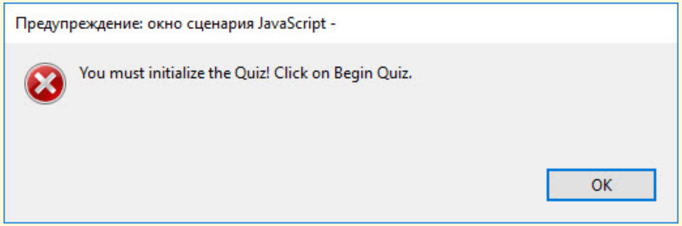
∞ $\sqrt{3}$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 0

Загальна кількість балів, яку зможе набрати студент під час проходження даного тестового завдання, складає 100 балів.

Щоб розпочати проходження тесту необхідно натиснути кнопку «Start».

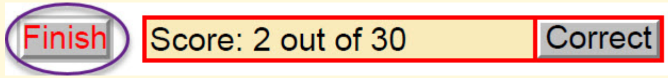
Start Дайте відповіді на наступні запитання.

Якщо студент забув натиснути кнопку «Start» і розпочав виконувати завдання, він отримає повідомлення про необхідність це зробити. Результат виконаного завдання буде анульовано.

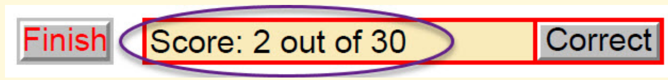


Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 46 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

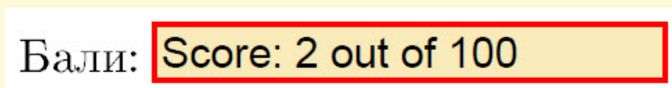
Для завершення тесту необхідно натиснути кнопку «Finish».



Результати тестування виводяться в декількох комірках:
1. Кількість виконаних завдань та максимальне їх число в тесті.

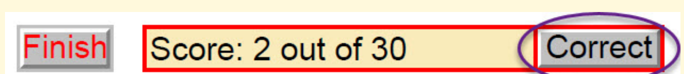


2. Кількість балів (для різних тестових завдань вона може відрізнятися).



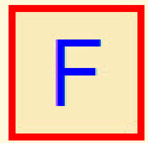
3. Відсотки (90%-100% – оцінка «відмінно», 75%-90% – оцінка «добре», 60%-75% – оцінка «задовільно», менше 60% – оцінка «незадовільно»,)

Після натискання кнопки «Correct» студент може перевірити правильність виконання завдань.



Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 47 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Про натискання студентом кнопки «Correct» з'являється літера «F» в червоному квадраті, що знаходиться з правої сторони на початку тесту.



Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 1».

1.5. Неперервні функції

1.5.1. Неперервність функції в точці.

Означення 1.5.1. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0. Така функція f називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Означення 1.5.2. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому напівінтервалі $(a, x_0]$ (відповідно $[x_0, b)$). Функція $y = f(x)$ називається неперервною зліва (справа) в точці x_0, якщо*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \quad (\textit{відповідно} \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)).$$

Із означення границі за Коші випливає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in u(x_0;\delta)\ f(x) \in u(f(x_0), \varepsilon)$$

Означення неперервності функції у точці можна сформулювати також у наступному вигляді:

Означення 1.5.3. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого околу $U(f(x_0), \varepsilon)$ точки $f(x_0)$ можна знайти окіл $U(x_0, \delta)$ точки x_0 такий, що $f(U(x_0;\delta)) \subset U(f(x_0);\varepsilon)$.*

З теореми про зв'язок між односторонніми границями і границею в точці маємо таку теорему:

Теорема 1.5.1. *Для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ була неперервна як зліва, так і справа в точці x_0.*

Позначимо через $\triangle x = x - x_0$ нову змінну, яка називається приростом аргументу. Функція

$$\triangle y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

від змінної $\triangle x$ називається відповідним приростом функції. Очевидно, що умова $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ рівносильна тому, що

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0. \qquad (1.5.1.1)$$

Тому рівність (1.5.1.1) також можна прийняти за означення неперервності функції в точці x_0.

1.5.2. Властивості функцій, неперервних в точці.

Теорема 1.5.2. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці x_0. Тоді й функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ також неперервні у точці x_0. Крім того, якщо $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — неперервна функція у точці x_0.*

Доведення. Ця теорема випливає з означення неперервності та властивостей границі функції (теорема 1.4.6,п. 7). □

Означення 1.5.4. *Нехай* X, Y, Z *— деякі множини і задані функції* $f : X \to Y$ *і* $g : Y \to Z$*. Тоді композицією функцій* f *і* g *(або складною функцією, утвореною функціями* f *і* g *) називається функція* $\varphi : X \to Z$*, задана рівністю* $\varphi(x) = g(f(x))$, $x \in X$*. Позначається композиція* $\varphi = g \circ f$.

Очевидно, що у випадку числових функцій дійсної змінної f, g їх композиція $\varphi = g \circ f$ також є числовою функцією дійсної змінної.

Теорема 1.5.3 (неперервність композиції функцій)**.** *Нехай задані дві числові функції* $f(x)$ *і* $g(y)$*, де* $f(x)$ *визначена в деякому околі точки* x_0 *і неперервна в точці* x_0*, а* $g(y)$ *визначена в деякому околі точки* y_0 *і неперервна в точці* y_0*. Крім того припустимо, що* $y_0 = f(x_0)$*. Тоді композиція функцій* $\varphi(x) = g(f(x))$ *неперервна в точці* x_0.

Доведення. Нехай $z_0 = g(y_0)$ і $U(z_0; \varepsilon)$ — деякий окіл точки z_0. Оскільки $g(y)$ неперервна в точці y_0, знайдеться окіл $U(y_0; \delta')$ такий, що $g(U(y_0; \delta')) \subset U(z_0; \varepsilon)$. Оскільки $f(x)$ неперервна в точці x_0 й $y_0 = f(x_0)$, то для околу $U(y_0; \delta')$ знайдеться окол $U(x_0; \delta)$ такий, що $f(U(x_0; \delta)) \subset U(y_0; \delta')$. Тоді для кожного $x \in U(x_0; \delta)$ маємо $f(x) \in U(y_0; \delta')$ і, отже, $\varphi(x) = g(f(x)) \in U(z_0; \varepsilon)$. Таким чином, $\varphi(U(x_0; \delta)) \subset U(z_0; \varepsilon)$ і в силу означення 1.5.3 функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0. □

1.5.3. Точки розриву функції.

Означення 1.5.5. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому проколотому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою розриву для функції $y = f(x)$, якщо вона не є точкою неперервності для $y = f(x)$, тобто функція $y = f(x)$ не є неперервною в даній точці x_0.*

Це можливо у трьох випадках:

1. функція $f(x)$ не визначена в точці x_0;
2. функція $f(x)$ визначена в точці x_0, але не існує скінченої границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3. існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і функція $f(x)$ визначена в точці x_0, але при цьому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Означення 1.5.6. *Нехай функція $f(x)$ визначена у деякому проколотому околі точки x_0 і існують скінченні ліва та права границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Тоді, якщо точка x_0 — точка розриву, то вона називається точкою розриву першого роду.*

Означення 1.5.7. *Точка розриву, що не є точкою розриву першого роду, називається точкою розриву другого роду.*

Позначимо односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Очевидно, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 52 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Означення 1.5.8. *Точка розриву першого роду x_0, для якої $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, називається точкою усувного розриву.*

Якщо x_0 — точка усувного розриву, то, поклавши $f(x_0)=f(x_0-0)(=f(x_0+0))$, отримаємо функцію, неперервну в точці x_0.

1.5.4. Властивості неперервних на відрізку функцій.

Означення 1.5.9. *Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона визначена на цьому інтервалі і неперервна у кожній його точці.*

Означення 1.5.10. *Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається неперервною на $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b) і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.*

Наступні дві теореми наводимо без доведення.

Теорема 1.5.4 (Вейєрштрас)**.** *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді ця функція є обмеженою й знайдуться точки $x_1,x_2\in[a,b]$, такі що для всіх $x\in[a,b]$ виконується нерівність*

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2). \tag{1.5.4.1}$$

З формули (1.5.4.1) випливає, що числа $m=f(x_1)$ та $M=f(x_2)$ є відповідно найменшим та найбільшим значенням функції $f(x)$ й згідно з теоремою 1.5.4 ці значення приймаються функцією в деяких точках x_1 та x_2 відрізку $[a,b]$. Тому теорему Вейєрштраса можна сформулювати так: неперервна на відрізку функція досягає на ньому свого найменшого і найбільшого значення.

Окрім того, з означення 1.4.4.2 випливає, що

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in X[a,b]} f(x). \tag{1.5.4.2}$$

Теорема 1.5.5 (Коші). *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і при цьому*

$$f(x_1) < C < f(x_2),$$

де $x_1, x_2 \in [a,b]$ й C — деяке число. Тоді знайдеться точка x_0, яка лежить між точками x_1 і x_2 й задовольняє рівності $f(x_0) = C$.
Інакше кажучи, неперервна на відрізку функція, яка досягає які-небудь два значення, досягає також проміжне значення.

Наслідок 1.5.11. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ й числа m, M визначені рівністю (1.5.4.2). Тоді образом функції f є відрізок $[m,M]$.*

Доведення. З (1.5.4.2) випливає, що $f(x) \in [m,M]$, $x \in [a,b]$.
Зворотно, нехай $y \in [m,M]$. Згідно з теоремою Вейєрштраса $f(x_1) = m$ та $f(x_2) = M$ при деяких $x_1, x_2 \in [a,b]$. Використовуючи теорему Коші для точок x_1, x_2, знайдемо точку x_0 між x_1 та x_2 таку, що $f(x_0) = y$. Таким чином, для кожного $y \in [m,M]$ знайдеться точка $x_0 \in [a,b]$, що задовольняє рівності $f(x_0) = y$. А це й означає, що $E_f = [m,M]$. □

1.5.5. Обернені функції.

Означення 1.5.12. *Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною), якщо для довільних двох чисел $x_1, x_2 \in D_f$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) \geq f(x_2)$).*

Означення 1.5.13. *Функція $y = f(x)$ називається строго зростаючою (спадною), якщо для довільних двох чисел $x_1, x_2 \in D_f$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Означення 1.5.14. *Функція $y = f(x)$ називається (строго) монотонною, якщо вона є або (строго) зростаюча, або (строго) спадна.*

Теорема 1.5.6 (про обернені функції)**.** *Нехай функція $y = f(x)$ строго зростає (спадє) і неперервна на відрізку $[a, b]$. Позначимо у випадку зростаючої функції $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, а у випадку спадної функції $\alpha = f(b)$, $\beta = f(a)$. Тоді:*

1. *функція $f(x)$ бієктивно відображує відрізок $[a, b]$ на відрізок $[\alpha, \beta]$, й, отже, на відрізку $[\alpha, \beta]$ визначена обернена функція $x = f^{-1}(y)$;*
2. *функція $x = f^{-1}(y)$ строго зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$.*

Доведення. Розглянемо зростаючу функцію $f(x)$ (у випадку спадної функції доведення аналогічне).
Оскільки $f(x)$ строго зростає, то $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ для кожного $x \in [a, b]$. Тому числа

$\alpha = f(a)$ й $\beta = f(b)$ є відповідно найменшим та найбільшим значення функції й згідно з наслідком 1.5.11 $E_f = [\alpha, \beta]$.

Нехай, далі, $x_1, x_2 \in [a, b]$ і $x_1 \neq x_2$. Припустимо для визначеності, що $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) < f(x_2)$, тобто $f(x_1) \neq f(x_2)$. Звідси та з означення 1.1.5 випливає, що f є бієкцією.

Доведемо, що функція $x = f^{-1}(y)$ строго зростаюча. Нехай $y_1 < y_2$ і $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Припустимо, що $x_1 \geq x_2$. Тоді, оскільки $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ і функція $f(x)$ зростає, то $y_1 \geq y_2$, що суперечить припущенню. Таким чином $x_1 < x_2$ і, отже, $f^{-1}(y)$ — строго зростаюча функція.

Неперервність функції $f^{-1}(y)$ — без доведення. □

1.5.6. Основні елементарні функції. Неперервність елементарних функцій.

1. Поліноми та раціональні функції.

Означення 1.5.15. *Поліномом від змінної x називається функція*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.5.6.1}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коефіцієнти поліному, $a_n \neq 0$.

Означення 1.5.16. *Функція вигляду $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — деякі поліноми, називається раціональною функцією.*

Очевидно, що кожний поліном $P(x)$ є раціональною функцією $P(x) = \dfrac{P(x)}{1}$.

Раціональна функція визначена всюди, окрім скінченної множини точок x, для яких $Q(x) = 0$ (нагадаємо, що такі точки називаються коренями полінома $Q(x)$).

Теорема 1.5.7. *Кожна раціональна функція неперервна на своїй області визначення.*

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ та $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ для кожного $x_0 \in \mathbb{R}$, то функції $f(x) = C(= \text{const})$ та $f(x) = x$ неперервні всюди на $\mathbb{R}$. Звідси й з теореми 1.5.2 випливає, що функція

$$a_k x^k = a_k \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ чинників}}$$

також є неперервною на $\mathbb{R}$. Тепер (1.5.6.1) та теорема 1.5.2 показують, що всякий поліном є неперервною функцією всюди на $\mathbb{R}$. Таким чином, кожна раціональна функція $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ неперервна як частка неперервних функцій всюди, де $Q(x) \neq 0$. □

2. Показникова, логарифмічна та степенева функції.

Нагадаємо спочатку означення, відоме з курсу елементарної математики.

Означення 1.5.17. *Функція вигляду*

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, *називається показниковою.*

Можна довести, що показникова функція має наступні властивості:

1) якщо $a > 1$, то функція a^x строго зростає на всій множині $\mathbb{R}$ й при цьому

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty. \tag{1.5.6.2}$$

Якщо ж $0 < a < 1$, то функція a^x строго убуває на множині $\mathbb{R}$ й

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0. \tag{1.5.6.3}$$

2)показникова функція неперервна на $\mathbb{R}$.

Оскільки функція $y = a^x$ строго монотонна, то згідно з теоремою 1.5.6 для неї існує обернена функція. Ця функція називається логарифмічною (за основою a) і позначається $y = \log_a x$.

Таким чином, логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена на множині додатних чисел $(0, +\infty)$ і ставить у відповідність кожному додатному числу x єдине число y, що задовольняє рівності $a^y = x$; при цьому число y називається логарифмом числа x за основою a.

Внаслідок теореми 1.5.6 логарифмічна функція неперервна на інтервалі $(0, +\infty)$. Крім того, справедливі наступні твердження:

1) якщо $a > 1$, то функція $\log_a x$ строго зростає й

$$\lim_{x\to-0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

2) якщо $a < 1$, то функція $\log_a x$ строго убуває й

$$\lim_{x\to-0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty.$$

Означення 1.5.18. *Нехай α — деяке число. Функція $y = x^\alpha$, визначена для всіх $x > 0$, називається степеневою функцією.*

Теорема 1.5.8. *Степенева функція неперервна на $(0, \infty)$.*

Доведення. Записуючи степеневу функцію у вигляді

$$y = x^\alpha = 10^{\lg x^\alpha} = 10^{\alpha \lg x},$$

бачимо, що вона є композицією двох неперервних функцій: $y = 10^u$ та $u = \alpha \lg x$. Звідси та з теореми 1.5.3 випливає потрібне твердження. □

3. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції

Як відомо, до тригонометричних відносяться функції

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

де x — значення відповідного кута у радіанах. Означення функцій $\sin x, \cos x$, а також опис властивостей тригонометричних функцій наводяться в курсах елементарної математики. Нагадаємо лише, що функції $\sin x$ та $\cos x$ визначені на множині всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$, функція $\operatorname{tg} x$ — на всій множині $\mathbb{R}$ за винятком точок вигляду $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ й функція $\operatorname{ctg} x$ — на всій множині $\mathbb{R}$ за винятком точок вигляду $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Окрім того, можна довести наступну теорему:

Теорема 1.5.9. *Кожна тригонометрична функція неперервна на своїй області визначення.*

Розглянемо, далі, обернені тригонометричні функції. Нехай $f_1(x)$ та $f_2(x)$ — функції, визначені рівностями

$$f_1(x) = \sin x, \ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \qquad f_2(x) = \cos x, \ \ x \in [0, \pi].$$

Функція $f_1(x)$ строго зростає й $f_1(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, в той час як функція $f_2(x)$ строго убуває й $f_2(0) = 1$, $f_2(\pi) = -1$. Тому за теоремою 1.5.6 існують неперервні обернені функції

$$\arcsin x = f_1^{-1}(x), \quad x \in [-1, 1]; \qquad \arccos x = f_2^{-1}(x), \quad x \in [-1, 1];$$

при цьому $\arcsin x$ строго зростає, а $\arccos x$ строго убуває на відрізку $[-1,1]$.

Нехай, далі, $g_1(x)$ та $g_2(x)$ — функції, визначені рівностями

$$g_1(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \qquad g_2(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0, \pi).$$

Функція $g_1(x)$ строго зростає на інтервалі $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ й

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} g_1(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} g_1(x) = +\infty;$$

функція $g_2(x)$ строго убуває на інтервалі $(0, \pi)$ й

$$\lim_{x \to +0} g_2(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi-0} g_2(x) = -\infty.$$

Звідси з урахуванням теореми 1.5.6 випливає існування неперервних обернених функцій

$$\operatorname{arctg} x = g_1^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcctg} x = g_2^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

при цьому $\operatorname{arctg} x$ ($\operatorname{arcctg} x$) строго зростає (відповідно убуває) й

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi; \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

Таким чином, має місце наступна теорема:

Теорема 1.5.10. *Кожна обернена тригонометрична функція неперервна на своїй області визначення.*

Означення 1.5.19. *Елементарними функціями називаються функції, які задаються за допомогою формули, що містить лише арифметичні операції та композиції основних елементарних функцій.*

Наприклад, елементарною буде функція

$$y = \frac{2x^2 + \sin^2(\lg 4x)}{\arcsin x + 2^x \operatorname{tg} 3x}.$$

Тепер з доведеної вище неперервності основних елементарних функцій та з теорем 1.5.2, 1.5.3 випливає

Теорема 1.5.11. *Кожна елементарна функція неперервна на своїй області визначення.*

Практичні завдання 1.5

1. Виходячи беспосередньо з означення неперервності, довести, що функція $f(x) = x^2$ неперервна в точці $x_0 = 5$.

2.Знайти точки розриву функції $y = \dfrac{4}{x-2}$; побудувати її графік.

3.Знайти точки неперервності та точки розриву функцій; виявити характер розриву (1-го чи 2-го роду); побудувати графіки функцій:

$$3.1) f(x) = \mathtt{x}; \qquad 3.2) f(x) = \begin{cases} x, \text{якщо } x < 1 \\ -x^2 + 4, \text{якщо } 1 \le x < 3 \\ 4 - x, \text{якщо } x \ge 3 \end{cases}$$

$$3.3) f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \le 0 \\ \sin x, \text{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad 3.4) f(x) = \frac{\mathtt{x}}{x}$$

4. Нехай $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{якщо } x \le 1 \\ 3 - ax^2, \text{якщо } x > 1 \end{cases}$.

Знайти число a так, щоб функція $f(x)$ була неперервною на всій числовій прямій.

5. Знайти точки розриву, побудувати графіки функцій:

$5.1) f(x) = \dfrac{x}{x+3}$; $\quad 5.2) f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; $\quad 5.3)\ f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$.

6. Довести, що функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } x - \text{раціональне число} \\ 0, \text{якщо } x - \text{ірраціональне число} \end{cases}$$

є розривною в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

1.6. Чудові границі. Розкриття невизначеностей

1.6.1. Чудові границі.

У шкільному курсі математики доводиться рівність

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.6.1.1}$$

Границя в формулі (1.6.1.1) називається першою чудовою границею. Справедлива також наступна

Теорема 1.6.1. *Існує границя*

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{1.6.1.2}$$

Границя в теоремі 1.6.1 називається другою чудовою границею. Число e, визначене формулою (1.6.1.2), має дуже важливе значення в математичному аналізі. Доведено, що e — ірраціональне число, яке задовольняє нерівностям $2 < e < 3$. Логарифм

$$\ln x = \log_e x$$

називається натуральним логарифмом.

Наслідок 1.6.1. *Має місце рівність*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{1.6.1.3}$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 63 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Доведення. Використовуючи формулу (1.6.1.2), будемо мати

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

□

Границя в (1.6.1.3) називається третьою чудовою границею.

1.6.2. Еквівалентні функції. Розкриття невизначеностей.

Означення 1.6.2. *Дві функції $f(x)$ і $g(x)$, визначені в деякому проколотому околі $\mathring{U}(a)$ узагальненого символу a, називаються еквівалентними при $x\to a$, якщо* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Позначення еквівалентних функцій: $f(x)\overset{x\to a}{\sim}g(x)$.

Теорема 1.6.2. *Нехай $f_1(x)\overset{x\to a}{\sim}g_1(x)$ і $f_2(x)\overset{x\to a}{\sim}g_2(x)$. Тоді*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}{\frac{f_2(x)}{g_2(x)}}\cdot\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

З теореми 1.6.2 випливає, що при обчисленні границі частки двох функцій ці функції можна заміняти еквівалентними.

Теорема 1.6.3. *При $x \to 0$ наступні нескінченно малі функції еквівалентні між собою:*

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln(1+x).$$

Доведення. Перевіримо твердження теореми безпосередньо, використовуючи означення 1.6.2.

1. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то відразу $\sin x \sim x$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1;$
3. Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$ зробимо заміну змінної $x = \sin y$, так що $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$. Тоді умова $x \to 0$ еквівалентна умові $y \to 0$ й, отже
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1;$$
4. за аналогією до пункту 3 маємо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1$,
5. рівність $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ є третьою чудовою границею.

$\square$

Використовуючи теорему 1.6.3 можна довести наступне узагальнене твердження:

Теорема 1.6.4. *Якщо* $u(x)$ *— деяка функція така, що* $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, *то при* $x \to a$ *наступні функції еквівалентні:*

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \ln(1 + u(x)).$$

Практичні завдання 1.6

Знайти границі:

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x \sin 4x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\arctan x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 6) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$ 8) $\lim_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$ 9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

10) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$ 11) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$ 12) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

13) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{2+3x}\right)^{x^2}$ 14) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$ 15) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

Інтерактивні тестові завдання, тест 2

Інтерактивні тестові завдання тесту 2 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: неперервні функції, чудові границі та розкриття невизначеностей. Тестове завдання складаються з 18 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

Ознайомитися з особливостями виконання тестів можна на стор. 46.

Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 2».

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 68 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Розділ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Створення диференціального числення відкрило нову епоху у розвитку математичного аналізу – найбільш ґрунтовної дисципліни, яка дає можливість розв'язувати не тільки складні математичні задачі, але проводити глибокий і всебічний аналіз отриманих результатів, в тому числі і в прикладних фізичних задачах. З диференціальним численням глибоко пов'язані такі дисципліни як теорія рядів, теорія диференціальних рівнянь та багато інших. Його методи знайшли використання у всіх розділах математики.

У даному розділі вивчаються похідні, диференціали та їх застосування в дослідженні властивостей функцій.

2.1. Похідна та диференціал функції

2.1.1. Означення похідної та диференціала.

Означення 2.1.1. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається число*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1.1.1}$$

Якщо границя в формулі (2.1.1.1) існує, то функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці x_0.

Означення 2.1.2. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a; x_0]$. Лівою похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається число*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Означення 2.1.3. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $[x_0; b)$. Правою похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається число*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Очевидно, $f'(x_0)$ існує тоді і тільки тоді, коли існують і рівні між собою ліва $f'_-(x_0)$ і права $f'_+(x_0)$ похідні в точці x_0.

Позначимо $\triangle x = x - x_0$ й

$$\triangle y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0), \tag{2.1.1.2}$$

так що $\triangle y$ є функцією від $\triangle x$. Змінна $\triangle x$ називається приростом аргументу, а функція $\triangle y$ вигляду (2.1.1.2) — приростом функції . З формули (2.1.1.1) маємо

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}. \tag{2.1.1.3}$$

Таким чином, формули (2.1.1.1) і (2.1.1.3) рівносильні. Крім того, формулу (2.1.1.3) можна записати коротко у вигляді

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{2.1.1.4}$$

Як відомо із шкільного курсу математики, геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 полягає в тому, що вона дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Тому рівняння такої дотичної має вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.1.1.5}$$

Зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції встановлюється наступною теоремою.

Теорема 2.1.1. *Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.*

Доведення. Нехай існує похідна $f'(x_0)$. Позначимо

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \tag{2.1.1.6}$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 71 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

так що внаслідок (2.1.1.1) $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ й

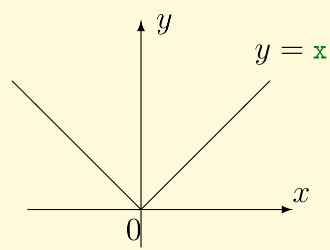
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0). \tag{2.1.1.7}$$

З формули (2.1.1.7) випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(x_0).$$

Таким чином, за означенням 1.5.1 функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. □

З попередньої теореми випливає наступне твердження: якщо функція розривна в точці x_0, то вона не має похідної в цій точці. Таким чином, неперервність функції в точці є необхідною умовою диференційовності. Поруч з тим неперервність не є достатньою умовою диференційовності, тобто з неперервності в точці не випливає існування похідної в цій точці. Розглянемо, наприклад, функцію $f(x) =$ x, графік якої зображено на наступному малюнку.



Із цього рис. бачимо, що функція $f(x) =$ x неперервна в точці $x_0 = 0$, але не має похідної в цій точці, оскільки в точці $O = (0, 0)$ не існує дотичної до графіка функції.

Крім того існують приклади функцій, які неперервні на всій числовій осі, але не мають похідної в жодній точці.

Теорема 2.1.2. *Для того, щоб функція $f(x)$ була диференційовною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб її приріст (2.1.1.2) можна було представити у вигляді*

$$\triangle y = A\triangle x + \varepsilon(\triangle x)\triangle x \tag{2.1.1.8}$$

з деякою константою A й нескінченно малою функцією $\varepsilon(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$; при цьому константа A в (2.1.1.8) однозначно визначається рівністю $A = f'(x_0)$.

Доведення. Легко бачити, що рівність (2.1.1.8) еквівалентна співвідношенню

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A + \varepsilon(\triangle x) \tag{2.1.1.9}$$

з деякою константою A та нескінченно малою при $\triangle x \to 0$ функцією $\varepsilon(\triangle x)$. В свою чергу, в силу теореми 1.4.5 рівність (2.1.1.9) еквівалентна рівності $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = A$. Звідси та з означення похідної випливає твердження теореми. □

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, так що має місце (2.1.1.8).

Означення 2.1.4. *Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається лінійна функція від збільшення аргументу $\triangle x$, визначена формулою*

$$dy = A\triangle x = f'(x_0)\triangle x. \tag{2.1.1.10}$$

З (2.1.1.8) та (2.1.1.10) випливає, що приріст функції можна представити у вигляді

$$\triangle y = dy + \varepsilon(\triangle x)\triangle x. \tag{2.1.1.11}$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 73 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

З міркувань симетрії записів позначимо $dx = \triangle x$. Тоді в силу (2.1.1.10)

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Припустимо тепер, що $f'(x_0) \neq 0$. Тоді з формули (2.1.1.11) випливає, що

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{dy} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(1 + \frac{\varepsilon(\triangle x)\triangle x}{dy}\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \left(1 + \frac{\varepsilon(\triangle x)\triangle x}{f'(x_0)\triangle x}\right) = 1$$

й, отже, функції $\triangle y$ й dy еквівалентні при $\triangle x \to 0$. Таким чином, диференціал є головною частиною збільшення функції й тому при малих $\triangle x$ маємо $\triangle y \approx dy$.

Означення 2.1.5. *Функція $f(x)$, визначена на інтервалі (a, b), називається диференційовною на цьому інтервалі, якщо вона диференційовна в кожній точці $x \in (a, b)$.*

Очевидно, що для диференційовної на інтервалі (a, b) функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ також є функцією, визначеною на (a, b); при цьому значення функції f' в кожній точці $x_0 \in (a, b)$ обчислюється за формулою (2.1.1.1).

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ (тут c — деяка константа). Оскільки для кожної точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} \equiv 0,$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

то справедлива рівність

$$c' = 0.$$

Таким чином, похідна константи дорівнює 0.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 74 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

2.1.2. Похідна суми, добутку та частки.

Теорема 2.1.3. *Нехай функції $f(x)$ й $g(x)$ мають похідні в точці x_0. Тоді функції $h(x) = f(x) + g(x)$ й $k(x) = f(x)g(x)$ також мають похідні в точці x_0, які обчислюються за формулами*

$$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \qquad k'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{2.1.2.1}$$

Окрім того, якщо $g(x_0) \neq 0$, то функція $p(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ також має похідну в точці x_0, яка обчислюються за формулою

$$p'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{2.1.2.2}$$

Доведення. Для функції $h(x)$ маємо

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Переходячи у цій формулі до границі при $x \to x_0$, отримаємо першу рівність в (2.1.2.1). Далі, для функції $k(x)$ маємо

$$k(x) - k(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0);$$

$$\frac{k(x) - k(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x_0). \tag{2.1.2.3}$$

Оскільки функція $g(x)$ диференційовна в точці x_0, то за теоремою 2.1.1

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0). \tag{2.1.2.4}$$

Тепер переходячи в (2.1.2.3) до границі при $x \to x_0$, отримаємо другу рівність в (2.1.2.1). Розглянемо, далі, функцію $p(x)$. Для неї будемо мати

$$p(x) - p(x_0) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)}$$

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - f(x_0)\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)}. \qquad (2.1.2.5)$$

Переходячи в (2.1.2.5) до границі при $x \to x_0$ й приймаючи до уваги (2.1.2.4), приходимо до формули (2.1.2.2). □

Наслідок 2.1.6. *Нехай функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 й $c \in \mathbb{R}$ (тобто c — деяка константа). Тоді функція $\varphi(x) = cg(x)$ також має похідну в точці x_0, які обчислюються за формулою*

$$\varphi'(x_0) = cf'(x_0). \qquad (2.1.2.6)$$

Доведення. Оскільки $c' = 0$, то в силу (2.1.2.1)

$$\varphi'(x_0) = c'f(x_0) + cf'(x_0) = cf'(x_0).$$

□

Формули (2.1.2.1), (2.1.2.2) та (2.1.2.6) коротко записують у вигляді

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad (cf)' = cf', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad (2.1.2.7)$$

2.1.3. Похідна складної та оберненої функції.

Теорема 2.1.4. *Нехай функція* $y = f(x)$ *має похідну в точці* x_0*, функція* $x = x(t)$ *має похідну в точці* t_0 *й* $x_0 = x(t_0)$*. Тоді складна функція* $y = g(t) = f(x(t))$ *має похідну в точці* t_0 *, яка обчислюється за формулою*

$$g'(t_0) = f'(x_0)x'(t_0). \tag{2.1.3.1}$$

Доведення. Внаслідок (2.1.1.7) для кожного t з деякого проколотого околу $\mathring{U}(t_0)$ маємо

$$g(t) = f(x(t)) = f(x_0) + f'(x_0)(x(t) - x_0) + \varepsilon(x(t))(x(t) - x_0) =$$
$$= f(x(t_0)) + f'(x_0)(x(t) - x(t_0)) + \varepsilon(x(t))(x(t) - x(t_0))$$

й, оскільки $f(x(t_0)) = g(t_0)$, то

$$g(t) - g(t_0) = f'(x_0)(x(t) - x(t_0)) + \varepsilon(x(t))(x(t) - x(t_0)),$$
$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(x_0)\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(x(t))\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}. \tag{2.1.3.2}$$

Функція $x(t)$ диференційовна й, отже, неперервна в точці t_0. Звідси випливає, що $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ й, оскільки $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, то $\lim\limits_{t\to t_0} \varepsilon(x(t)) = 0$. Тепер переходячи в (2.1.3.2) до границі при $t \to t_0$, отримуємо формулу (2.1.3.1). □

Наслідок 2.1.7. *Нехай функція* $y = f(x)$ *диференційовна на інтервалі* (a, b)*, а функція* $x = \varphi(t)$ *диференційовна на інтервалі* (α, β)*. Припустимо також, що* $\varphi(t) \in (a, b)$*,* $t \in (\alpha, \beta)$*. Тоді складна функція* $g(t) = f(\varphi(t))$ *визначена на інтервалі* (α, β) *і має похідну в кожній точці* *цього інтервалу, яка обчислюється за формулою*

$$g'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Теорема 2.1.5. *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і строго монотонна в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0, так що в силу теореми 1.5.6 обернена функція $x = f^{-1}(y)$ визначена в деякому околі $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$. Тоді якщо існує похідна $f'(x_0) \neq 0$, то функція $f^{-1}(y)$ має похідну $(f^{-1})'(y_0)$ в точці y_0 й до того ж*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{2.1.3.3}$$

Доведення. Нехай $\{y_n\}_1^\infty$ — довільна послідовність така, що $y_n \in U(y_0)$, $y_n \neq y_0$, $n \in \mathbb{N}$ й $y_n \to y_0$. Позначимо $x_n = f^{-1}(y_n)$, так що $y_n = f(x_n)$. Оскільки за теоремою 1.5.6 функція $f^{-1}(y)$ неперервна й строго монотонна в $U(y_0)$, то $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$ й $x_n \to x_0$. Тому можемо написати

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\dfrac{y_n - y_0}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \tag{2.1.3.4}$$

Далі, з означення похідної випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0).$$

Тепер переходячи в (2.1.3.4) до границі при $n \to \infty$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Звідси та з означення похідної випливає твердження теореми. □

Наслідок 2.1.8. *Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна й має похідну $f'(x)$ на відрізку $[a, b]$. Припустимо також, що $f'(x) \neq 0,\ x \in [a, b]$. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ визначена і має похідну $(f^{-1})'(y)$ на відрізку з кінцями $f(a)$ та $f(b)$, що обчислюється на цьому відрізку за формулою*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{2.1.3.5}$$

Відзначимо, що в правій частині формули (2.1.3.5) у знаменнику знаходиться композиція функцій $y = f'(x)$ та $x = f^{-1}(y)$.

2.1.4. Похідні елементарних функцій.

У даному параграфі обчислюються похідні основних елементарних функцій.

1. $f(x) = x$.

   Для кожної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{x + \triangle x - x}{\triangle x} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} 1 = 1$$

   Висновок: $x' = 1$.

2. $f(x) = \ln x,\ x > 0$.

Для кожної фіксованої точки $x > 0$ маємо

$$f(x+\triangle x) - f(x) = \ln(x+\triangle x) - \ln x = \ln\frac{x+\triangle x}{x} = \ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)}{\frac{\triangle x}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

Звідси використовуючи третю чудову границю, отримуємо

$$f'(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = \frac{1}{x}\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)}{\frac{\triangle x}{x}} = \frac{1}{x}$$

Висновок: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \;\; x \in (0, +\infty)$.

3. $f(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $g(x) = \ln x$ $(x > 0)$, оберненою до якої є функція $x = g^{-1}(y) = e^y$. Згідно з формулою (2.1.3.5) маємо

$$(e^y)' = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \left[\begin{array}{c} g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ g'(g^{-1}(y)) = \frac{1}{e^y} \end{array}\right] = \frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$$

Висновок : $(e^x)' = e^x$.

4. $f(x) = x^\alpha,\ x > 0.$

   Оскільки
   $$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$
   то функція $f(x)$ є композицією функції $y = g(u) = e^u$ та $u = u(x) = \alpha \ln x$. Тепер згідно з наслідком 2.1.7 маємо
   $$f'(x) = g'(u(x))u'(x) = e^{\alpha \ln x}\left(\alpha \frac{1}{x}\right) = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x}.$$

   Висновок: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0$

5. $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$

   Для кожної фіксованої точки $x \in \mathbb{R}$ маємо
   $$f(x+\triangle x) - f(x) = \sin(x+\triangle x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\triangle x - x}{2}\cos\frac{x+\triangle x + x}{2} = \\ = 2\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right),$$
   $$f'(x) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\triangle x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \\ = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\triangle x}{2}}{\dfrac{\triangle x}{2}} \cdot \lim_{\triangle x\to 0}\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right).$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 81 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Використовуючи першу чудову границю, отримаємо

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\triangle x}{2}}{\dfrac{\triangle x}{2}}=1.$$

Крім того, з неперервності функції $\cos x$ випливає, що

$$\lim_{\triangle x\to 0}\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)=\cos x.$$

Тому

$$f'(x)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Висновок: $(\sin x)'=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$.

6. $f(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$.

   Представимо функцію $\cos x$ у вигляді $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$. Тоді за наслідком 2.1.7 будемо мати

$$(\cos x)'=(\sin(\frac{\pi}{2}-x))'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x$$

   Висновок: $(\cos x)'=-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$.

7. $f(x)=\operatorname{tg}x$

   За формулою (2.1.2.2) маємо

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Висновок: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

   За формулою (2.1.2.2) маємо

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

   Висновок: $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $f(x) = \arcsin x,\ x \in (-1, 1)$.

   Розглянемо функцію $g(x) = \sin x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, оберненою до якої є функція $x = g^{-1}(y) = \arcsin y$. Згідно з формулою (2.1.3.5) маємо

$$(\arcsin y)' = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \left[\begin{array}{c} g'(x) = (\sin x)' = \cos x \\ g'(g^{-1}(y)) = \cos(\arcsin y) \end{array}\right] = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

   Висновок : $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1)$.

10. $f(x) = \arccos x,\ x \in (-1, 1)$.

    Аналогічно попередньому пункту доводиться формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1).$$

11. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$.

    Розглянемо функцію $g(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, оберненою до якої є функція $x = g^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$. Згідно з формулою (2.1.3.5) маємо

$$(\operatorname{arctg} y)' = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \left[\begin{array}{c} g'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ g'(g^{-1}(y)) = \dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y)} \end{array} \right] = \cos^2(\operatorname{arctg} y) =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

    Висновок : $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$.

12. $f(x) = \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}$.

    Аналогічно попередньому пункту доводиться формула

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Тепер із теореми 2.1.7 випливає наступне твердження: якщо $u = u(x)$ — диференційовна функція, то

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \qquad (e^u)' = e^u\, u'; \qquad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}\, u';$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \qquad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \qquad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}; \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}.$$

Наведені формули сумісно з формулами (2.1.2.7) дозволяють знайти похідну будь-якої елементарної функції.

2.1.5. Похідні вищих порядків.

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну в деякому околі точки x_0, так що похідна $f'(x)$ сама є функцією, визначеною в деякому околі точки x_0.

Означення 2.1.9. *Якщо існує похідна функції $f'(x)$ в точці x_0, то вона називається похідною другого порядку функції $f(x)$ в точці x_0 й позначається $f''(x_0)$.*

Таким чином, за означенням

$$f''(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f'(x_0 + \triangle x) - f'(x_0)}{\triangle x}.$$

Припустимо тепер, що похідна другого порядку $f''(x)$ існує в деякому околі точки x_0. Тоді її похідна в точці x_0 (якщо вона існує) називається похідною третього порядку й позначається $f^{(3)}(x_0)$, тобто $f^{(3)}(x_0) = (f'')'(x_0)$. Продовжуючи цей процес, можна за індукцією визначити похідну довільного порядку n в точці x_0, а саме

Означення 2.1.10. *Нехай функція $y = f(x)$ має похідну (n-1) порядку $f^{(n-1)}(x)$ в деякому околі точки x_0. Тоді похідна функції $f^{(n-1)}(x)$ в точці x_0 називається похідною n-го порядку функції $f(x)$ в точці x_0 й позначається $f^{(n)}(x_0)$.*

Згідно з наданаим означенням

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \triangle x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\triangle x}.$$

Похідна порядку n функції $y = f(x)$ позначається також $y^{(n)}$ або $\dfrac{d^n y}{dy^n}$.

Означення 2.1.11. *Функція $y = f(x)$ називається n раз (неперервно) диференційовною на інтервалі (a, b), якщо вона має (неперервну) похідну порядку n на цьому інтервалі. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно диференційовною на (a, b), якщо вона має на інтервалі $(a; b)$ похідну довільного порядку n.*

Із цього означення та з теореми 2.1.1 випливає, що n раз неперервно диференційовна на інтервалі функція має на цьому інтервалі неперервні похідні всіх порядків до порядку n включно.

Практичні завдання 2.1

1. Знайти рівняння дотичної до параболи $y = x^2$ в точці $M = (3, 9)$.
2. В якій точці дотична до параболи $y = x^3$
   a)паралельна осі $0x$ b)утворює з віссю $0x$ кут 45°
3. $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$; знайти $f'(1), f'(0), f'(\frac{1}{3})$.
4. Знайти похідні наступних функцій:

4.1)$y = 3x^2 - 5x + 1$ 4.2)$y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}$ 4.3)$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$

4.4)$y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$ 4.5)$y = \ln\cos(x^2 + 1)$ 4.6)$y = \dfrac{\arccos x}{x}$

4.7)$y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x + 3}}$ 4.8)$y = e^{\frac{1}{\ln x}}$ 4.9)$y = x^{x^2}$

4.10)$y = (\sin x)^{\cos x}$ 4.11)$y = x\arcsin(\ln x)$ 4.12)$y = e^x \sin x \cos^3 x$

4.13)$y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$ 4.14)$y = \arcsin\dfrac{x - 1}{x}$ 4.15)$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. Чи будуть функції

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

неперервними в точці $x = 0$? Мати похідну в цій точці?

6. Знайти диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0:

6.1)$y = 0.25\sqrt{x}$; $x_0 = 1$; 6.2)$y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$; $x_0 = 0$

7. За допомогою диференціала знайти наближені значення.

7.1) $\sqrt{1.01}$ 7.2) $\mathrm{arctg}(1.02)$ 7.3) $\arcsin(0.4983)$

2.2. Теореми про середнє для диференційовних функцій

2.2.1. Теорема Ферма.

Теорема 2.2.1 (теорема Ферма)**.** *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і досягає в деякій точці $x_0 \in (a; b)$ свого найбільшого або найменшого значення. Тоді якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Припустимо для визначеності, що в точці x_0 досягається найбільше значення, тобто $f(x_0) \geq f(x)$ для будь-якого $x \in (a, b)$. Тоді

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad x > x_0; \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad x < x_0.$$

Переходячи в цих нерівностях відповідно до правої та лівої границі, отримаємо

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \qquad f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Звідси випливає, що $f'(x_0) = 0$. □

2.2.2. Теореми Ролля, Лагранжа і Коші.

Теорема 2.2.2 (теорема Ролля). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і задовольняє такі умови:*

1. *$f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$;*
2. *похідна $f'(x)$ існує на інтервалі (a, b);*
3. *$f(a) = f(b)$, тобто на кінцях відрізку функція набуває рівні значення.*

Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то згідно з теоремою Вейєрштраса вона досягає на ньому найменшого значення m і найбільшого значення M. Розглянемо наступні можливі випадки:

1. $m = M = C$. Тоді $f(x) = C$ і, отже, $f'(x) = C' = 0,\ x \in (f, b)$. Тепер узявши в якості c довільну точку з $(a; b)$, матимемо $f'(c) = 0$.

2. $m < M$. Тоді згідно з теоремою Вейєрштраса знайдуться такі точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одна з точок x_1 або x_2 лежить на інтервалі (a, b) і згідно з теоремою Ферма в цій точці похідна функції f дорівнює нулю.

□

Теорема 2.2.3 (теорема Лагранжа)**.** *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна на інтервалі (a,b). Тоді знайдеться точка $c \in (a,b)$ така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{2.2.2.1}$$

Доведення. Розглянемо визначену на відрізку $[a,b]$ функцію

$$F(x) = f(x) - kx,$$

де k — деяке число. Ця функція неперервна на відрізку $[a,b]$, оскільки функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку. Далі, за теоремою 2.1.3 функція $F(x)$ має похідну в кожній точці інтервалу (a,b), що обчислюється за формулою

$$F'(x) = f'(x) - k, \quad x \in (a,b).$$

Тепер виберемо константу k так, щоб виконувалася умова $F(a) = F(b)$, тобто $f(b) - kb = f(a) - ka$. Для цього необхідно покласти

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2.2.2.2}$$

Таким чином, якщо k визначено формулою (2.2.2.2), то функція $F(x)$ задовольняє всім умовам теореми Ролля. Згідно з цією теоремою знайдеться точка $c \in (a,b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто $f'(c) - k = 0$. Отже, в точці c маємо

$$f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Формулу (2.2.2.1) можна переписати у вигляді

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a, b) \tag{2.2.2.3}$$

Формула (2.2.2.3) називається формулою скінчених приростів, або формулою Лагранжа. Відзначимо, що ця формула є також вірною у випадку $b < a$, якщо тільки під точкою c розуміти деяку точку, що лежить між точками a та b.

Наступна теорема, яку ми наводимо без доведення, є узагальненням теореми Лагранжа.

Теорема 2.2.4 (теорема Коші). *Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на відрізку $[a, b]$ і задовольняють такі умови:*

1. *$f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$;*
2. *$f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a, b);*
3. *при всіх $x \in (a; b)$ виконується умова $g'(x) \neq 0$.*

Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2.2.2.4}$$

Формула (2.2.2.4) називається формулою Коші. У випадку $g(x) = x$ формула Коші збігається з формулою Лагранжа.

2.2.3. Правило Лопіталя.

Для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ і $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ може використовуватись правило Лопіталя, яке сформульоване нижче у вигляді декількох теорем.

Теорема 2.2.5. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на інтервалі (x_0, b) і задовольняють наступним умовам:*

1. *існують похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ на (x_0, b) і $g'(x) \neq 0$ для кожного $x \in (x_0, b)$;*
2. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} g(x) = 0$;
3. *існує скінчена або нескінченна права границя* $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує скінчена або нескінченна права границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *й виконується рівність*

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2.2.3.1}$$

Доведення. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0, поклавши $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тоді внаслідок умови 2 функції $f(x)$ і $g(x)$ стануть неперервними справа в точці x_0. Зафіксуємо довільне $x \in (x_0, b)$ і розглянемо функції $f(t)$ і $g(t)$, де $t \in [x_0, x]$. Оскільки на відрізку $[x_0, x]$ функції $f(t)$ і $g(t)$ задовольняють всім умовам теореми Коші, то згідно з формулою Коші

(2.2.2.4) маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{2.2.3.2}$$

де $c = c(x)$ — деяка точка, що залежить від x і лежить на інтервалі (x_0, x). Перейдемо в (2.2.3.2) до границі при $x \to x_0 + 0$. Оскільки точка c лежить між точками x_0 і x, то при $x \to x_0 + 0$ маємо також $c \to x_0 + 0$. Тому з формули (2.2.3.2) отримаємо

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Із відповідними змінами теорема 2.2.5 є вірною не тільки для правих границь, але й для границь $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, де a — узагальнена точка (див. означення 1.4.13). Таким чином, правило Лопіталя для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ можна записати формулою

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{2.2.3.3}$$

де a дорівнює одному з символів $x_0,\ x_0 + 0,\ x_0 - 0,\ +\infty,\ -\infty,\ \infty$.

За аналогією можна довести правило Лопіталя для розкриття невизначеностей $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Справедливою є наступна теорема.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 93 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Теорема 2.2.6. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на інтервалі (x_0, b) і задовольняють умови:*

1. *існують похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ на (x_0, b) і $g'(x) \neq 0$ для кожного $x \in (x_0, b)$;*
2. $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} g(x) = \infty$,
3. *існує скінчена або нескінченна границя* $\lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

Тоді існує границя $\lim\limits_{x \to x_0+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *й*

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогічна теорема є вірною також для довільної узагальненої точки a і, отже, правило Лопіталя для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ також можна записати у вигляді формули (2.2.3.3)

Практичні завдання 2.2

1. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на відрізку $[-1, 2]$.

2. Написати формулу Лагранжа для функції

2.1)$y = \sin 3x$ на відрізку $[x_1, x_2]$; 2.2) $y = x(1 - \ln x)$ на відрізку $[a, b]$

3. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = \ln x$ на відрізку $[1, e]$.

4. Знайти наступні границі за допомогою правила Лопіталя

4.1) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ 4.2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ 4.3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ 4.4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$

4.5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^3}$ 4.6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ 4.7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$ 4.8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x^3}$

Інтерактивні тестові завдання, тест 3

Інтерактивні тестові завдання тесту 3 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: похідна та диференціал функції, теореми про середнє для диференційовних функцій. Тестове завдання складаються з 30 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

Ознайомитися з особливостями виконання тестів можна на стор. 46.

Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 3».

2.3. Дослідження функцій за допомогою похідних

2.3.1. Ознаки монотонності та локальних екстремумів.

Теорема 2.3.1. *Нехай функція* $y = f(x)$ *має похідну на інтервалі* (a, b) *й* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *для кожного* $x \in (a, b)$. *Тоді функція* $f(x)$ *є строго зростаючою (відповідно строго спадаючою) на* (a, b).

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in (a, b)$ і $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1, x_2]$ функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Лагранжа й за формулою Лагранжа маємо

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{2.3.1.1}$$

для деякого $c \in (x_1, x_2)$. Якщо похідна $f'(x)$ додатна на (a, b), то в формулі (2.3.1.1) $f'(c) > 0$. Звідси $f(x_2) - f(x_1) > 0$ і, отже $f(x_2) > f(x_1)$ для довільних $x_1, x_2 \in (a, b)$. Таким чином, функція $y = f(x)$ строго зростає на (a, b). Аналогічно розглядається випадок $f'(x) < 0$. □

Означення 2.3.1. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена на інтервалі* (a, b). *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *називається точкою локального максимуму (мінімуму) для функції* $f(x)$, *якщо існує окіл* $U(x_0) \subset (a, b)$ *такий, що при всіх* $x \in U(x_0)$ *виконується нерівність* $f(x) \le f(x_0)$ *(відповідно* $f(x) \ge f(x_0)$*).*
Точка локального мінімуму або максимуму називається точкою локального екстремуму.

У наступних трьох теоремах розглядається задача знаходження точок локального екстремуму для заданої функції $y = f(x)$.

Теорема 2.3.2 (необхідна умова локального екстремуму)**.** *Якщо* x_0 — *точка локального екстремуму, то можливими є тільки 2 випадки:*

1. *у точці* x_0 *не існує похідної,*
2. *у точці* x_0 *існує похідна і до того ж* $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Якщо в точці x_0 існує похідна, то згідно з теоремою Ферма маємо $f'(x_0) = 0$. □

Означення 2.3.2. *Точка* x_0 *називається критичною точкою для функції* $y = f(x)$, *якщо в цій точці або не існує похідної, або похідна існує і дорівнює нулю.*

З теореми 2.3.2 випливає, що локальні екстремуми можуть існувати лише в критичних точках. Поруч з тим властивість точки бути критичною є необхідною, але не достатньою умовою екстремуму. Наприклад для функції $f(x) = x^3$ точка $x_0 = 0$ є критичною, бо $f'(x_0) = 0$, але в цій точці немає екстремуму.

Означення 2.3.3. *Нехай функція* $g(x)$ *визначена на інтервалі* (a, b) *крім, можливо, точки* x_0. *Кажуть, що функція* g *змінює знак з* $+$ *на* $-$ *(відповідно з* $-$ *на* $+$ *) при проходженні через точку* x_0, *якщо знайдуться інтервали* (α, x_0) *і* (x_0, β) *такі, що при всіх* $x \in (\alpha, x_0)$ *маємо* $g(x) > 0$ *(відповідно* $f(x) < 0$*), а при всіх* $x \in (x_0, \beta)$ *маємо* $g(x) < 0$ *(відповідно* $g(x) > 0$*).*

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 98 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Теорема 2.3.3 (перша достатня умова екстремуму)**.** *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і має похідну на цьому інтервалі всюди, крім, можливо, точки x_0. Припустимо також, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. Тоді:*

1. *якщо при проходженні через точку x_0 похідна змінює знак з $+$ на $-$, то x_0 — точка локального максимуму;*
2. *якщо при проходженні через точку x_0 похідна змінює знак з $-$ на $+$, то x_0 — точка локального мінімуму.*

Доведення. Нехай при проходженні через точку x_0 похідна змінює знак з $+$ на $-$, тобто $f'(x) > 0$ на деякому інтервалі (α, x_0) і $f'(x) < 0$ на деякому інтервалі (x_0, β). Оскільки функція f неперервна в точці x_0, то для довільного фіксованого $x \in (\alpha, x_0)$ вона задовольняє умови теореми Лагранжа на відрізку $[x, x_0]$. Тому існує точка $c \in (x, x_0)$, така що

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x). \tag{2.3.1.2}$$

Оскільки $c \in (x, x_0)$, то $c \in (\alpha, x_0)$ і, отже, $f'(c) > 0$. Тепер з формули (2.3.1.2) випливає нерівність $f(x) \le f(x_0)$. Аналогічно за допомогою теореми Лагранжа доводиться нерівність $f(x) \le f(x_0)$ для всіх $x \in (x_0, \beta)$. Таким чином, $f(x) \le f(x_0)$ для всіх $x \in (\alpha, \beta)$. Випадок, коли похідна змінює знак з $-$ на $+$, розглядається аналогічно. □

Теорема 2.3.4 (друга достатня умова екстремуму)**.** *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b) і має другу похідну в критичній точці x_0. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 — точка локального мінімуму (відповідно локального максимуму).*

Доведення. Припустимо, що $f''(x_0) > 0$. Оскільки $f'(x_0) = 0$, то згідно з означенням другої похідної

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}. \tag{2.3.1.3}$$

З формули (2.3.1.3) та з властивості 5 границі функції (див. теорему 1.4.6) випливає існування такого проколотого околу $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, що при всіх $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ виконується нерівність $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Тому при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ маємо $f'(x) < 0$, а при всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ маємо $f'(x) > 0$. Таким чином, при проходженні через точку x_0 похідна змінює знак з $-$ на $+$ і згідно з теоремою 2.3.3 x_0 є точкою локального мінімуму.
Випадок $f''(x_0) > 0$ розглядається аналогічно. □

Зауваження 2.3.4. *Якщо за умов теореми 2.3.4 $f''(x_0) = 0$, то про існування локального екстремуму в точці x_0 нічого не можна сказати (тобто точка x_0 може як бути, та і не бути точкою локального екстремуму).*

З наведених теорем випливає наступне правило дослідження функції $f(x)$, $x \in (a, b)$ на локальні екстремуми:

1. Знайти усі критичні точки функції. Для цього обчислити похідну $f'(x)$, знайти всі корені рівняння $f'(x) = 0$ і додати до них точки, в яких похідна не існує.

2. До кожної критичної точки застосувати першу або другу достатню умову екстремуму.

Відзначимо, що у випадку скінченої множини критичних точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ їх можна розташувати в порядку зростання так, щоб $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$. В результаті інтервал (a, b) розбивається на скінчену кількість інтервалів $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$. Припустимо також, що на кожному з цих інтервалів існує неперервна похідна $f'(x)$. Тоді: 1)на кожному з цих інтервалів функція $f(x)$ строго зростає або убуває; 2) точки локального екстремуму знаходяться серед точок x_i.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 100 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Нехай тепер функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді за теоремою Веєрштраса вона досягає свого найменшого та найбільшого значень в деяких точках x' та x'' відповідно. Очевидно, що у випадку $x' \in (a,b)$ $(x'' \in (a,b))$ точка x' (відповідно x'') є критичною для функції f на інтервалі (a,b). З цього випливає наступне правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $f(x)$:

1. Знайти усі критичні точки функції на інтервалі (a,b) згідно із п.1 правил дослідження на локальні екстремуми. Припустимо, що множина таких точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ скінчена.

2. Обчислити значення функції $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$ в критичних точках та значення функції $f(a)$, $f(b)$ на кінцях відрізку. Найменше (відповідно найбільше) з отриманих значень збігається з найменшим (відповідно найбільшим) значенням функції на $[a,b]$.

2.3.2. Опуклість, угнутість та точки перегину.

Означення 2.3.5. *Диференційовна на інтервалі (a,b) функція $f(x)$ називаєтьса опуклою (угнутою) на (a,b), якщо для будь-якої точки $x_0 \in (a,b)$ усі точки $M = (x, f(x))$, $x \in (a,b)$ графіка функції f лежать нижче (відповідно вище) дотичної, проведеної до нього в точці $M_0 = (x_0, f(x_0))$.*

Нехай
$$y = l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
— рівняння дотичної в точці M_0 (див. (2.1.1.5)). Очевидно, що графік функції f лежить нижче (вище) дотичної тоді й тільки тоді, коли різниця $f(x) - l(x)$ є недодатною (відповідно невід'ємною) для кожного $x \in (a,b)$. Тому означення 2.3.5 можна переформулювати у наступному вигляді:

Означення 2.3.6. *Диференційовна на інтервалі* (a,b) *функція* $f(x)$ *називається опуклою (угнутою) на* (a,b)*, якщо для довільної пари точок* $x, x_0 \in (a,b)$ *виконувалась нерівність*

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\leq 0 \quad (\textit{відповідно}\ \ f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geq 0) \quad (2.3.2.1)$$

Теорема 2.3.5 (достатня умова опуклості)**.** *Якщо функція* $f(x)$ *двічі диференційовна на інтервалі* (a,b) *й* $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ *для кожного* $x\in(a,b)$*, то ця функція є опуклою (відповідно угнутою).*

Доведення. Згідно з теоремою Лагранжа для кожної пари точок $x, x_0 \in (a,b)$ існує така точка c між x_0 й x, що

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0).$$

Застосовуючи, далі. теорему Лагранжа до функції $f'(x)$ на відрізку з кінцями x_0 та c, матимемо

$$f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)(c-x_0),$$

де точка c_1 лежіть між x_0 та c. Тому

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)&=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\\ &=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0)=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0). \end{aligned} \qquad (2.3.2.2)$$

Оскільки точка c лежіть між x_0 та x, то числа $c-x_0$ та $x-x_0$ мають однаковий знак. Тому знак виразу (2.3.2.2) збігається зі знаком числа $f''(c_1)$ й, отже, зі знаком другої похідної $f''(x)$ на інтервалі (a,b). Звідси та з означення 2.3.6 випливає твердження теореми. □

Означення 2.3.7. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0. Ця точка називається точкою перегину функції f, якщо існує такій окіл $U(x_0, \delta)$, що графік f на інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ та $(x_0, x_0 + \delta)$ лежить по різні сторони дотичної до нього в точці $M_0 = (x_0, f(x_0))$.*
Якщо x_0 — точка перегину функції, то точка $M_0 = (x_0, f(x_0))$ називається точкою перегину графіка функції f.

За аналогією з парою означень 2.3.5 та 2.3.6 легко бачити, що означення 2.3.7 рівносильне наступному:

Означення 2.3.8. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0. Точка x_0 називається точкою перегину функції f, якщо функція*

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.3.2.3}$$

змінює знак при переході через x_0.

Теорема 2.3.6 (необхідна умова наявності точки перегину)**.** *Нехай функція $f(x)$ має другу похідну в точці x_0. Тоді, якщо x_0 є точкою перегину функції f, то $f''(x_0) = 0$.*

Доведення. Надамо доведення за додаткової умови, що друга похідна неперервна в точці x_0. Припустимо, що $f''(x_0) > 0$. Тоді в силу неперервності функції $f''(x)$ в точці x_0 існує окіл $U(x_0)$ такий, що $f''(x) > 0$ при всіх $x \in U(x_0)$. Тому за теоремою 2.3.5 функція f угнута на $U(x_0)$, що суперечить зробленому припущенню про те, що x_0 є точкою перегину.
Випадок $f''(x_0) < 0$ розглядається аналогічно. □

З теореми 2.3.6 випливає, що точки перегину функції слід шукати серед точок, у яких або не існує другої похідної, або друга похідна дорівнює нулю. Поруч з тим, за аналогією із задачею пошуку екстремумів, виконання цієї умови в точці x_0 недостатньо для того, щоб x_0 була точкою перегину.

Теорема 2.3.7 (достатня умова наявності точки перегину)**.** *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0 і має другу похідну в проколотому околі $\mathring{U}(x_0)$. Тоді, якщо функція $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то ця точка є точкою перегину функції f.*

Доведення. Ті ж самі міркування, що і при доведенні рівності (2.3.2.2), показують, що вона залишається вірною й за умов нашої теореми. Тому якщо функція $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то те ж саме відбувається з функцією (2.3.2.3). Звідси та з означення 2.3.8 випливає необхідне твердження. □

2.3.3. Побудова графіків функцій.

Повне дослідження функції з використанням наведених вище результатів та побудову її графіка доцільно проводити в такому порядку.

1. Знайти область визначення функції.
2. Обчислити першу та другу похідні
3. Знайти точки, в яких перша та друга похідні не існують або дорівнюють нулю.
4. Скласти таблицю зміни знаку похідних
5. Використовуючи цю таблицю та теореми 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 та 2.3.4 знайти проміжки убування, зростання функції та локальні екстремуми

6. За допомогою таблиці та теорем 2.3.5, 2.3.6 та 2.3.7 знайти інтервали опуклості, угнутості функції та точки перегину

7. Накреслити графік функції

Практичні завдання 2.3

1. Довести, що функція $y = x^3 + x$ всюди зростає.
2. Знайти інтервали монотонності наступних функцій:
   2.1)$y = (x-2)^5(2x+1)^4$; 2.2)$y = x - e^x$; 2.3)$y = x + \cos x$
3. Знайти інтервали монотонності та локальні екстремуми наступних функцій:
   3.1)$y = 2x^3 - 3x^2$; 3.2)$y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 3.3)$y = x - \ln(1+x)$; 3.4)$y = e^{-x^2}$.
4. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку
   4.1)$y = x + 2\sqrt{x}, \quad x \in [0,4]$;
   4.2)$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad x \in [-1,1]$;
   4.3)$y = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad x \in [0,4]$;
   4.4)$y = \sin 2x - x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
5. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік
   5.1)$y = \dfrac{x}{x^2+1}$; 5.2)$y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; 5.3)$y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$; 5.4)$y = x^2e^{-x}$; 5.5)$y = x + 2\sqrt{-x}$; 5.6)$y = x - \ln(x+1)$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 106 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Інтерактивні тестові завдання, тест 4

Інтерактивні тестові завдання тесту 4 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: дослідження функцій за допомогою похідних. Тестове завдання складаються з 13 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

Ознайомитися з особливостями виконання тестів можна на стор. 46.

Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 4».

Розділ 3

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Інтегральне числення виникло як загальний метод обчислення площ, об'ємів, центрів ваги. У сучасній математиці це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються властивості і способи обчислення інтегралів та їх застосування для розв'язання як теоретичних, так і прикладних задач.

Відкриття інтегрального числення та встановлення його зв'язку з диференціальним численням належить Ісааку Ньютону та Ґотфріду Лейбніцу. У розвиток методів інтегрування зробили свій внесок Леонард Ейлер, М.В.Остроградський, П.Л.Чебишов. Логічно обґрунтовану побудову визначеного інтеграла як границі інтегральних сум здійснив німецький математик Георг Ріман. Сучасний підхід до викладання інтегрального числення функцій однієї змінної для студентів фізико-математичних спеціальностей ґрунтується на теорії границь, поняттях точної нижньої і точної верхньої межі.

3.1. Первісна та невизначений інтеграл

3.1.1. Означення та властивості невизначеного інтеграла

Надалі $\Delta = \langle a, b\rangle$ – скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій $\mathbb{R}$.

Означення 3.1.1. *Нехай f – функція, визначена на Δ. Функція F, визначена на Δ, називається первісною функції f, якщо вона диференційовна на Δ і задовольняє рівність*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \tag{3.1.1.1}$$

(якщо лівий або праий кінець інтервалу I належить до I, то похідна F' в цьому кінці розуміється як права або ліва похідна відповідно).

Теорема 3.1.1. *Нехай $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку Δ. Тоді для будь-якого $C \in \mathbb{R}$ функція*

$$\Phi(x) = F(x) + C \tag{3.1.1.2}$$

також є первісною функції f і, навпаки, кожна первісна Φ функції f має вигляд (3.1.1.2) з деякою константою $C \in \mathbb{R}$. Інакше кажучи, множина всіх первісних функції f має вигляд $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Доведення. Якщо $\Phi(x)$ має вигляд (3.1.1.1), то

$$\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

і, отже, Φ є первісною для f. І навпаки, нехай Φ – первісна для f на проміжку Δ. Покладемо

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 109 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

$G(x) = \Phi(x) - F(x)$. Тоді

$$G'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in \Delta.$$

Нехай $x_0 \in \Delta$ і $C = G(x_0)$. Тоді за формулою скінченних приростів для кожного $x \in \Delta$ існує точка c між точками x_0 та x така, що $G(x) - G(x_0) = G'(c)(x - x_0)$. Оскільки $G'(c) = 0$, то $G(x) - G(x_0) = 0$ і, отже, $G(x) = C$, $x \in \Delta$. Звідси випливає, що $\Phi(x)$ має вигляд (3.1.1.2). □

Зауваження 3.1.2. *Існують функції f, які не мають первісних. Тому внаслідок теореми 3.1.1 або множина первісних функції f є порожньою, або вона описується рівністю* (3.1.1.2), *в якій $F(x)$ – якась фіксована первісна.*

Означення 3.1.3. *Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$, заданої на проміжку Δ, називається множина усіх її первісних (за умови, що ця множина не є порожньою). Невизначений інтеграл від функції $f(x)$ позначається $\int f(x)dx$.*

Внаслідок теореми 3.1.1 невизначений інтеграл від функції f має вигляд

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3.1.1.3}$$

де $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, C — довільна стала.

Таблиця невизначених інтегралів.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln \mathtt{x} + C$, $(x \neq 0)$

3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} x + C$

4. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a>0$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a>0$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a>0$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a>0, a \neq 1); \ \int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Теорема 3.1.2. *Невизначений інтеграл має такі властивості:*

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \neq 0$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Доведення. Рівності 1 і 2 безпосередньо випливають з означення невизначеного інтеграла. Рівність 3 також є очевидною, оскільки $F(x)$ є первісною для функції $F'(x)$. Далі, для довільної сталої $\alpha \in \mathbb{R}$ маємо

$$\alpha \int f(x)dx = \alpha(F(x) + C) = \alpha F(x) + \alpha C = \alpha F(x) + C_1 =$$
$$= \int (\alpha F(x) + C_1)' dx = \int (\alpha F'(x) + 0)dx = \int \alpha f(x)dx.$$

що доводить рівність 4. Властивість 5 доводиться аналогічно. □

3.1.2. Інтегрування заміною змінної та частинами

Для інтегрування функцій, що не зводяться за допомогою тотожних алгебраїчних перетворень до функцій з таблиці інтегралів, застосовуються різні методи, що базуються на заміні змінної інтегрування. Якщо в результаті такої заміни підінтегральний вираз набуває "інтегровний" вигляд, то заміна виправдана. Обґрунтування можливості такої заміни засновано на

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 112 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

справедливості таких рівнянь:

1. $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt\ |_{t=\varphi(x)}$
2. $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ |_{t=\varphi^{-1}(x)}$

Зазначені формули заміни змінної отримані безпосередньо з визначення невизначеного інтеграла та формули диференціювання складної функції.

З формули 1. випливає що таблиця інтегралів залишається справедливою, якщо у всіх її інтегралах x є функцією. Так, наприклад

$\int \sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt = \int \sin\varphi(t)d\varphi(t) = -\cos\phi(t) + C$;

$\int \dfrac{dx^3}{x^3} = ln$`x^{3}`$+ C.$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int x^2 e^{-8x^2}dx$.

$\int x^2 e^{-8x^2}dx =$ [Здійснимо заміну змінної за формулою $-8x^3 = t$, тоді $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}$, $dx = -\frac{1}{6}t^{-\frac{2}{3}}dt$.] $=$

$$= \int \frac{1}{4}\sqrt[3]{t^2}e^t \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{24}e^t dt = -\int \frac{1}{24}e^t + C = -\frac{1}{24}e^{-8x^3} + C$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = [\ x = t^2,\ dx = 2tdt\ ] = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - 2\ln|t+1| + C = \sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

Інтегрування частинами подається формулою

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \qquad (3.1.2.1)$$

яка безпосередньо випливає з формули похідної добутку функцій. Формула (3.1.2.1) має місце для функцій u і v, неперервно-диференційовних на проміжку Δ.

Більш компактним є такий вигляд формули (3.1.2.1) :

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (3.1.2.2)$$

3.1.3. Інтегрування раціональних функцій

Означення 3.1.4. *Раціональною функцією (раціональним дробом) називається відношення двох многочленів. При цьому дріб називається правильним (неправильним), якщо степінь чисельника менше (не менше) степені знаменника.*

Серед правильних дробів особливу роль відіграють елементарні дроби, тобто дроби вигляду:

1. $\dfrac{A}{x-a}$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, (n=2, 3, 4,...)
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $(p^2-4q<0)$

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, (n=2, 3, 4,...)

Не обмежуючи загальності, покажемо на прикладах, як інтегруються елементарні дробі.

Приклад 3 Обчислити інтеграл:

1. $\int \dfrac{3dx}{x+8}$ (елементарний дріб виду 1)
2. $\int \dfrac{7dx}{(x-5)^5}$ (елементарний дріб виду 2)
3. $\int \dfrac{3x-4}{x^2+4x+29}dx$ (елементарний дріб виду 3)

Обчислення:

1. $\int \dfrac{3dx}{x+8} = 3\int \frac{d(x+8)}{x+8} = 3\ln|x+8| + C$
2. $\int \dfrac{7dx}{(x-5)^4} = 7\int (x-5)^{-4}d(x-5) = 7\dfrac{(x-5)^{-3}}{-3} + C =$
   $= -\dfrac{7}{3(x-5)^3} + C$
3. $\int \dfrac{3x-4}{x^2+4x+29}dx =$ [виділяємо у знаменнику повний квадрат] $=$
   $= \int \dfrac{3x-4}{x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+29}dx = \int \dfrac{3x-4}{(x+2)^2+25}dx =$ [здійснимо заміну змінної, позначив вираз, який стоїть під квадратом у знаменнику $(x+2)$ новою змінною t. Тобто $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$]$=\int \dfrac{3t-10}{t^2+25}dt =$

$$= \int \left(\frac{3t}{t^2+25} - \frac{10}{t^2+25}\right)dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+25} - 10\int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+25)}{t^2+25} - 10\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+25) - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+29) - 2\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5} + C.$$

Приклад 4 Обчислити інтеграл: $\int \frac{3x-4}{(x^2+4x+29)^3}dx$ (елементарний дріб виду 4).

Обчислення: Так само, як і в прикладі 3, отримуємо

$$\int \frac{3x-4}{(x^2+4x+29)^3}dx = 3\int \frac{d(t^2+25)}{(t^2+25)^3} - 10\int \frac{dt}{(t^2+25)^3} = 3\frac{(t^2+25)^{-2}}{-2} - 10\cdot I_3$$

де $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+5^2)^3}$ обчислюється за рекурентною формулою:

$$I_{n+1} = \frac{t}{2na^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot I_n \tag{3.1.3.1}$$

Саме, спочатку знаходимо $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+25} == \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C.$

Далі, за формулою (3.1.3.1)

$$I_2 = \frac{1}{50}\cdot\frac{t}{(t^2+25)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{50}\cdot\frac{t}{(t^2+25)} + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C.$$

і, отже, $\int \frac{3x-4}{(x^2+4x+29)^3}dx = -\frac{3}{2(t^2+25)} - \frac{1}{10}\cdot\frac{t}{(t^2+25)^2} - \frac{3}{20}\cdot\frac{t}{(t^2+25)} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C =$
$= -\frac{3}{2(x^2+4x+29)} - \frac{1}{10}\cdot\frac{x+2}{(x^2+4x+29)^2} - \frac{3}{20}\cdot\frac{x+2}{(x^2+4x+29)} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5} + C$

Виявляється, що кожний правильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів. Пояснимо сказане таким прикладом.

Приклад 5. Розкласти раціональний дріб

$$R(x) = \frac{2x^3 + 6x - 7}{(x^5 + 4x^4 - 5x^3)(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2)(x^2 + x + 3)^4}$$

у суму елементарних дробів, не знаходячи коефіцієнтів розкладання.

Розв'язування. Оскільки даний раціональний дріб – правильний, то завдання має розв'язок, який отримується наступним чином. Спочатку знаменник дробу розкладаємо на множники вигляду $(x - a)^n$ і $(x^2 + px + q)^m$, де $p^2 - 4q < 0$. У нашому випадку маємо

$$R(x) = \frac{2x^3 + 6x - 7}{x^3(x - 1)(x + 5)(x + 3)^2(x^2 + 2)(x^2 + x + 3)^4}.$$

Далі, кожному множнику вигляду $(x - a)^n$ відповідає сума з n елементарних дробів

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n},$$

а кожному множнику вигляду $(x^2 + px + q)^m$ відповідає сума з m елементарних дробів

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

У нашому випадку

$$R(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x - 1} + \frac{A_5}{x + 5} + \frac{A_6}{x + 3} + \frac{A_7}{(x + 3)^2} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2} + \frac{M_2x + N_2}{x^2 + x + 3} + \\ + \frac{M_3x + N_3}{(x^2 + x + 3)^2} + \frac{M_4x + N_4}{(x^2 + x + 3)^3} + \frac{M_5x + N_5}{(x^2 + x + 3)^4}$$

Для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного дробу в суму елементарних дробів можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів. Для пояснення цього методу розглянемо такий приклад.

Приклад 6. Розкласти правильний дріб

$$R(x) = \frac{x^4+3x^3-x^2-x-2}{x^5+x^4+2x^2}$$

у суму елементарних дробів.

Розв'язування. Розклавши знаменник дробу у добуток лінійних та квадратичних множників, отримуємо

$$R(x) = \frac{x^4+3x^3-x^2-x-2}{x^3(x^2+x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} \qquad (3.1.3.2)$$

Призводячи дроби $\frac{A}{x}$, $\frac{B}{x^2}$, $\frac{C}{x^3}$ та $\frac{Dx+E}{x^2+x+2}$ до спільного знаменнику та прирівнюючи чисельник отриманого дробу з чисельником лівої частини, отримуємо

$$x^4+3x^3-x^2-x-2 = Ax^2(x^2+x+2) + Bx(x^2+x+2) + C(x^2+x+2) + (Dx+E)x^3 = \\ (A+D)x^4 + (A+B+E)x^3 + (2A+B+C)x^2 + (2B+C)x + 2C$$

Прирівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ A+B+E=3 \\ 2A+B+C=-1 \\ 2B+C=-1 \\ 2C=-2 \end{cases}$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 118 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Розв'язком цієї системи є $C = -1$, $B = 0$, $A = 0$, $E = 3$ і $D = 1$. Тому внаслідок (3.1.3.2) шуканий розклад має вигляд

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{x+3}{x^2+x+2}\frac{x^4+3x^3-x^2-x-2}{x^5+x^4+2x^2} = \frac{x+3}{x^2+x+2} - \frac{1}{x^3}$$

Таким чином, внаслідок лінійності інтеграла інтегрування правильного дробу після його розкладу в суму елементарних дробів зводиться до інтегрування цих елементарних дробів, яке вже пояснювалось прикладами 3 та 4.

Для інтегрування неправильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ слід спочатку поділити в стовпчик многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ і знайти частку $f(x)$ та залишок $r(x)$ від цього ділення. В результаті дріб зобразиться у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

і згідно з властивості лінійності потрібний інтеграл має вигляд

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int f(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Очевидно, що дріб $\frac{r(x)}{Q(x)}$ є правильним; тому інтеграл $\int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx$ можна знайти наведеним вище шляхом.

3.1.4. Інтегрування ірраціональних функцій

Надалі через $R(u, v, \ldots, w)$ позначається раціональна функція багатьох змінних $u, v, \ldots, w$, тобто вираз, який є часткою двох многочленів від цих змінних. Приклад:

$$R(u, v, t) = \frac{5t^2u - 2uv - 3}{8u + v + t - uvt}$$

Розглянемо такі інтеграли від ірраціональних функцій:

1. $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$, де $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – раціональні числа;
2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$.

Для обчислення інтеграла в п.1 використовується підстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}, \quad \alpha \text{ – найменше спільне кратне знаменників чисел } r_1, r_2, \ldots, r_n$$

При обчисленні інтеграла в п. 2 застосовують підстановки Ейлера, а саме:

1. якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$;
2. якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;
3. якщо ax^2+bx+c має дійсні корені x_1 та x_2 то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$.

Такі підстановки зводять зазначені інтеграли до інтегралів від раціональних дробів.

Проілюструємо сказане декількома прикладами.

Приклад 9 Обчислити інтеграл $\int \dfrac{3+\sqrt{x+2}}{2+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

Обчислення Даний інтеграл першого типу з $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{3}$. Отже, $\alpha = HCK(2,3) = 6$ і тому використовуємо заміну $x+2 = t^6$.

$$\int \frac{3+\sqrt{x+2}}{2+\sqrt[3]{x+2}}dx = \left[\begin{array}{c} x+2=t^6, \quad t=\sqrt[6]{x+2} \\ x=t^6-2, dx=6t^5dt \end{array}\right] = \int \frac{3+t^3}{2+t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8+3t^5}{t^2+2}\,dt = [t^8+3t^5 =$$
$$(t^2+2)(t^6-2t^4+3t^3+4t^2-6t-8)+(12t+16)] = 6\int (t^6-2t^4+3t^3+4t^2-6t-8+\frac{12t+16}{t^2+2})\,dt =$$
$$6(\int t^6\,dt - 2\int t^4\,dt + 3\int t^3\,dt + 4\int t^2\,dt - 6\int t\,dt - 8\int dt + 6\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2}\,dt + 16\int \frac{dt}{t^2+2}) = 6(\frac{t^7}{7} -$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 120 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

$\dfrac{2t^5}{5} + \dfrac{3t^4}{4} + \dfrac{4t^3}{3} - 3t^2 - 8t + 6\ln(t^2+2) + \dfrac{16}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{\sqrt{2}}) = 6(\dfrac{\sqrt[3]{x+2}^7}{7} - \dfrac{2\sqrt[3]{x+2}^5}{5} + \dfrac{3\sqrt[3]{x+2}^4}{4} + \dfrac{4(x+2)}{3} - 3\sqrt[3]{x+2}^2 - 8t + 6\ln(\sqrt[3]{x+2}^2+2) + \dfrac{16}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{2}})$

Приклад 10 Обчислити інтеграл

$$I = \int \frac{8x+1-4\sqrt{4x^2+x-1}}{8x^2+2x-2+(2-4x)\sqrt{4x^2+x-1}}dx$$

Обчислення Даний інтеграл другого типу з $a = 4 > 0$. Отже, заміна $\sqrt{4x^2+x-1} = 2x+t$ дає

$4x^2+x-1 = 4x^2+4xt+t^2$

$x = \dfrac{t^2+1}{1-4t}$

$dx = \dfrac{-4t^2+2t+4}{(1-4t)^2}dt$

Таким чином,

$$I = \int \frac{\left(\frac{8t^2+8}{1-4t}+1-\frac{8t^2+8}{1-4t}+4t\right)(2t+4-4t^2)}{\left(2\left(\frac{2t^2+2}{1-4t}+t\right)^2+\left(2-\frac{4t^2+4}{1-4t}\right)\left(\frac{2t^2+2}{1-4t}+t\right)\right)(1-4t)^2}dt = \int\frac{dt}{t+1} =$$

$= \ln|t+1| + C = \ln|\sqrt{4x^2+x-1}-2x+1| + C$

Приклад 11 Обчислити інтеграл

$$I_1 = \int \frac{2\sqrt{1+x-x^2}-2-x}{2x^2\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

Обчислення Даний інтеграл другого типу з $c = 1 > 0$. Вважаючи $\sqrt{1+x-x^2} = xt+1$, отримуємо

$1+x-x^2 = x^2t^2+2xt+1, \quad x = \dfrac{1-2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2t^2-2t-2}{(t^2+1)^2}dt.$

У результаті заміни змінної отримали такий інтеграл:

$$I_1 = \int \frac{2\cdot\dfrac{t-2t^2}{t^2+1}+2-2-\dfrac{1-2t}{t^2+1}}{2\dfrac{(1-2t)^2}{(t^2+1)^2}\left(\dfrac{t-2t^2}{t^2+1}+1\right)}\cdot\frac{2t^2-2t-2}{(t^2+1)^2}dt = \int\frac{(2t-4t^2-1+2t)(t^2-t-1)}{t(1-2t)^3+(1-2t)^2(t^2+1)}dt =$$

$$= \int\frac{(t^2-t-1)(4t-4t^2-1)}{(1-2t)^2\cdot(t-t^2+1)}dt = \int\frac{4t^2-4t+1}{4t^2-4t+1}dt = \int dt = t+C = \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$$

Приклад 12 Обчислити інтеграл

$$I_2 = \int\frac{xdx}{(1-x)\sqrt{x-x^2}}$$

Обчислення Многочлен $x-x^2$, який стоїть під коренем, має корені $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$. Тому згідно з 3-ю підстановкою Ейлера позначимо $\sqrt{x-x^2} = t(x-0) = tx$, звідки

$x-x^2 = t^2x^2, \quad x = \dfrac{1}{t^2+1}, \quad dx = -\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}dt.$

Отже, отримуємо інтеграл

$$I_2 = -\int\frac{\dfrac{2tdt}{(t^2+1)^3}}{\left(1-\dfrac{1}{t^2+1}\right)\cdot\dfrac{t}{t^2+1}} = -2\int\frac{dt}{t^2(t^2+1)} = 2\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{t}+2\operatorname{arctg}(t)+C =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x-x^2}}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}+C.$$

3.1.5. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{3.1.5.1}$$

де R - раціональна функція двох змінних. Приклад:

$$\int \frac{2\sin^3 x - \cos x}{4\sin x \cos^2 x + 5}\, dx$$

При обчисленні інтегралів (3.1.5.1) завжди можна користуватися так званою універсальною тригонометричною підстанокою $t = tg\frac{x}{2}$. Тоді

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

і в результаті отримуємо інтеграл від раціональної функції змінної t.

В деяких випадках раціональніше використовувати інші підстановки. Саме, коли підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ задовольняє одній з трьох рівностей

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

то застосовуються відповідно такі раціоналізуючи підстановки

$$\sin x = t, \quad \cos x = t, \quad \mathrm{tg}\, x = t$$

Розглянемо тепер інтеграли вигляду

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx, \qquad \int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \qquad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx,$$

де α та β - дійсні числа. Обчислення цих інтегралів базується на використанні відомих формул перетворення тригонометричних функцій в їх суми, як, наприклад,

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin (a+b) + \sin (a-b))$$

.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx$$

Обчислення.

Оскільки $R(\sin x, -\cos x) = \dfrac{\sin^2 x}{-\cos x} = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = -R(\sin x, \cos x)$, то, застосувавши підстановку

$$\sin x = t, \cos x = \sqrt{1-t^2}, x = \arcsin t, dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

отримаємо $I_3 = \int \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \dfrac{t^2 dt}{1-t^2} = \int (-1 + \dfrac{1}{1-t^2}) dt = -t - \int \dfrac{dt}{t^2-1} =$
$= -t - \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{t-1}{t+1} \right| + C = -\sin x - \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C.$

Практичні завдання 3.1

Обчислити інтеграли:

1) $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}dx$ 2) $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$; 4) $\int \dfrac{\sin x}{e^{cos x}}dx$; 5) $\int arctgx dx$;

6) $\int x\sin x\cos x dx$; 7) $\int e^{2x}x^3dx$; 8) $\int \dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$; 9) $\int e^x\sin^2 xdx$; 10) $\int x^3\ln xdx$;

11) $\int e^{2x}\sin 3xdx$; 12) $\int (x^2+x)e^x dx$; 13) $\int (x+2)\cos 5xdx$; 14) $\int x^2\sin xdx$; 15) $\int \ln\sin xdx$.

16) $\int \dfrac{2dx}{x+8}$; 17) $\int \dfrac{xdx}{(x-6)^5}$; 18) $\int \dfrac{dx}{x^2+x+2}$; 19) $\int \dfrac{3x+4}{x^2-3x+8}dx$; 20) $\int \dfrac{x-6}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$

21) $\int \dfrac{xdx}{(x^2+4)^2}$; 22) $\int \dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$ 23) $\int \dfrac{6-x}{(x^2+2x+2)^3}$.

2. Розкласти правильні дроби в суму елементарних, не обчислюючи коефіцієнтів розкладу:

а) $\dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2)(x^2+3x-4)^3}$;

б) $\dfrac{x-1}{(x^2+3x+6)(x^2+3x+10)^2}$;

в) $\dfrac{x}{(x^2+8x-9)(x^2+x-2)}$.

3. Розкласти правильні дроби в суму елементарних:

а) $\dfrac{x}{x^4-1}$; б) $\dfrac{2x-1}{x^4+1}$; в) $\dfrac{x^2-1}{(x^4-8x^2+16)(x-2)}$; г) $\dfrac{3}{x^5+6x^3+9x}$.

4. Обчислити інтеграли від раціональних дробів:

а) $\int \dfrac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$;

б) $\int \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 125 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

в) $\int \dfrac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$;

г) $\int \dfrac{x^4+2x^3-6x+1}{x^3-1}dx$;

д) $\int \dfrac{8x^7+x+1}{x^4-1}dx$;

е) $\int \dfrac{2x^3+4x-5}{x^2+x-2}dx$.

5. Обчислити інтеграли:

а) $\int \dfrac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x4}}dx$;

б) $\int \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+1}dx$;

в) $\int \dfrac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$;

г) $\int \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}dx$;

д) $\int \left(\sqrt{\dfrac{3-2x}{2x-7}}-x\right)dx$;

е) $\int \dfrac{x-\sqrt{x^2+4x-5}}{2+x}dx$;

ж) $\int \dfrac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\cdot\sqrt{x+1}}dx$;

з) $\int \dfrac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}dx$;

и) $\int \dfrac{2x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-1}dx$;

к) $\int \frac{3dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

л) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x-2}+x}$;

м) $\int \frac{\sqrt{2-2x-x^2}}{x}dx$;

н) $\int \frac{x\sqrt{x^2+4x}}{x-1}dx$;

о) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$;

р) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

Інтерактивні тестові завдання, тест 5

Інтерактивні тестові завдання тесту 5 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: первісна та невизначений інтеграл. Тестове завдання складаються з 30 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

Ознайомитися з особливостями виконання тестів можна на стор. 46.

Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 5».

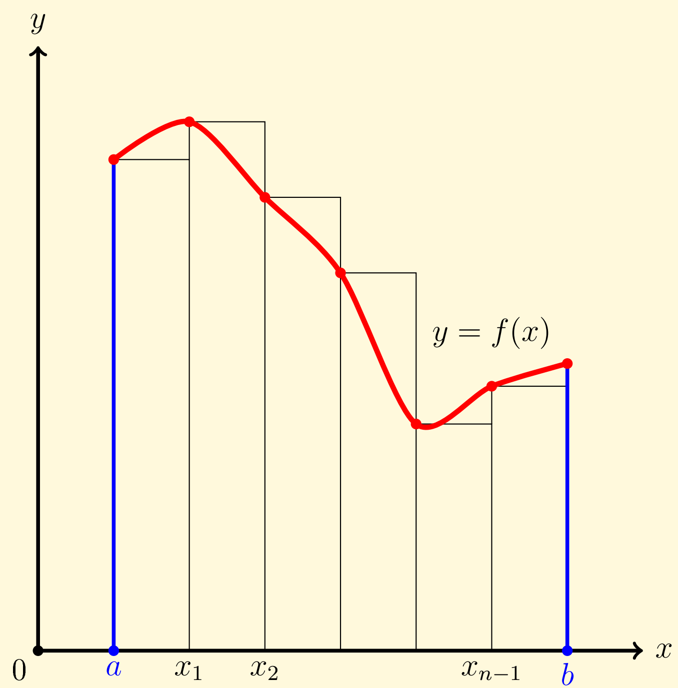
Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 128 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

3.2. Визначений інтеграл та його властивості

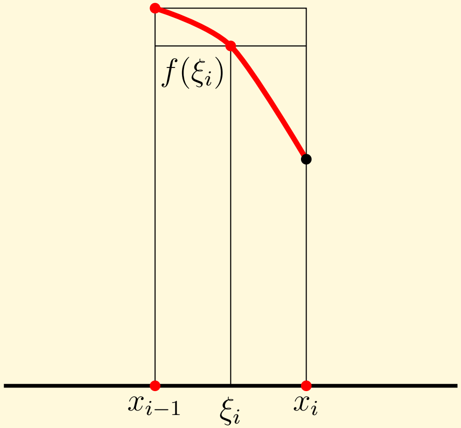
3.2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу

1.Площа криволінійної трапеції.

Криволінійною трапецією називається фігура, яка обмежена графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[a, b]$, віссю Ox і двома вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ (див. рис.).



Для обчислення площі цієї трапеції розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, на кожному з цих відрізків візьмемо довільним чином точку ξ_i і побудуємо прямокутники висотою $f(\xi_i)$, що спираються на відрізок $[x_i - x_{i-1}]$ (див. рис.).



Площа S_i такого прямокутника наближено дорівнює

$$S_i \approx f(\xi_i)\triangle x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$. Площа криволінійної трапеції S наближено дорівнює сумі площ всіх таких прямокутників:

$$S \approx f(\xi_1)\triangle x_1 + f(\xi_2)\triangle x_2 + \ldots + f(\xi_n)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

Точним значенням площі S буде границя цієї суми при необмеженому зменшенні ширини прямокутника, тобто за умови $\max\triangle x_i \to 0$:

$$S = \lim_{\max\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 130 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Таким чином, для обчислення площі криволінійної трапеції необхідно знайти границю наведеного вище вигляду.

2.Обчислення шляху, що пройшла точка за даний проміжок часу.

Нехай точка рухається прямолінійно з швидкістю $v = v(t)$, що є функцією від часу t. Розглянемо таку задачу: знайти шлях $\widetilde{S}$, що пройшла точка за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$. Для розв'язування цієї задачі розіб'ємо проміжок $[\alpha, \beta]$ точками $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \beta = t_n$ на проміжки $[t_{i-1}, t_i]$. Припускаючи, що довжина $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ i-го проміжку часу є достатньо малою, можемо вважати, що на протязі такого проміжку точка рухається рівномірно з постійною швидкістю $v(\tau_i)$, де $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Тоді шлях за час від t_{i-1} до t_i наближено дорівнює $v(\tau_i)\Delta t(i)$, а повний шлях $\widetilde{S}$ подається наближеною рівністю

$$\widetilde{S} \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\triangle t_i.$$

Відмітимо, що точним значенням $\widetilde{S}$ буде границя наведених у попередній формулі сум за умови, що $\max \triangle t_i \to 0$:

$$\widetilde{S} = \lim_{\max \triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\triangle t_i.$$

До обчислення границь такого роду приводять й інші задачі. У зв'язку з цим виникає необхідність розглянути цю границю, відволікаючись від того, в результаті якої задачі ми прийшли до неї.

3.2.2. Означення визначеного інтеграла

Розглянемо числову функцію f, визначену на відрізку $[a, b]$. Розбиттям Θ відрізку $[a, b]$ будемо називати сукупність точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ цього відрізку, що задовольняють умові

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Для кожного розбиття $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ позначимо через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ довжину відрізку розбиття $[x_{i-1}, x_i]$. Число $\lambda(\Theta) = \max\limits_i \Delta x_i$ називається дрібністю розбиття Θ.

Нехай $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – розбиття відрізку $[a, b]$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ оберемо точку ξ_i і утворимо суму

$$S_\Theta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Таку суму називають інтегральною сумою функції f на відрізку $[a, b]$ для розбиття Θ.

Означення 3.2.1. *Число I називається границею інтегральних суми $S_\Theta(f)$ при $\lambda(\Theta) \to 0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для будь якого розбиття $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ відрізку $[a, b]$ дрібністю $\lambda(\Theta) < \delta$ при будь-якому виборі точок $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ відповідна інтегральна сума $S_\Theta(f)$ задовольняє нерівність* `S_{\Theta}(f)-I` $< \varepsilon$.

Для позначення границі інтегральних сум в сенсі попереднього означення використовується запис

$$\lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(f) = I.$$

Означення 3.2.2. *Якщо визначена в означенні 3.2.1 границя існує, то функція f називається інтегровною на відрізку $[a, b]$.*
Для інтегровної на $[a, b]$ функції f границя інтегральних сум в сенсі означення 3.2.1 називається визначеним інтегралом (або інтегралом Рімана) функції f на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; числа a і b називаються відповідно нижньою та верхньою межею інтеграла.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 132 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Таким чином, для інтегровної функції

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(f) = \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Повертаючись до задач з попереднього параграфа, можемо записати формулу площі криволінійної трапеції як

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

і формулу шляху, що пройшла точка, як

$$\widetilde{S} = \int_\alpha^\beta v(t)dt.$$

Наведемо без доведення наступні дві теореми.

Теорема 3.2.1. *(необхідна умова інтегровності) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку (отже, необмежена функція є неінтегровною).*

Теорема 3.2.2. *(достатня умова інтегровності) Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція є інтегровною на цьому відрізку.*

3.2.3. Властивості визначеного інтеграла, що виражаються рівностями

1. Якщо функції f і g є інтегровними на відрізку $[a, b]$, то сума $f + g$ і різниця $f - g$ також є інтегровними $[a, b]$. Крім того, вірними є рівності

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{3.2.3.1}$$

Доведення. Для кожного розбиття $\Theta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ відрізку $[a, b]$ при довільному виборі точок $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ маємо

$$S_\Theta(f+g) = \sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) + g(\xi_i)]\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\triangle x_i = S_\Theta(f) + S_\Theta(g).$$

Таким чином

$$S_\Theta(f+g) = S_\Theta(f) + S_\Theta(g). \tag{3.2.3.2}$$

Оскільки f і g є інтегровними, то існують границі

$$\lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(f) = \int_a^b f(x)dx, \qquad \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(g) = \int_a^b g(x)dx.$$

Тому внаслідок (3.2.3.2) існує границя

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(f+g) = \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(f) + \lim_{\lambda(\Theta)\to 0} S_\Theta(g) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

що доводить формулу (3.2.3.1) для суми. У випадку різниці доведення аналогічне. □

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 134 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

2. Якщо функція f є інтегровною на $[a,b]$ і A — дійсне число, то функція $Af(x)$ також є інтегровною на $[a,b]$ і
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $\Theta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ – розбиття відрізку $[a,b]$ і $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тоді
$$\sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\triangle x_i = A\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\triangle x_i.$$
Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda(\Theta) \to 0$, отримаємо потрібне твердження. □

3. Нехай функція f визначена на відрізку $[a,b]$ і $c \in (a,b)$. Якщо f інтегровна на відрізках $[a,c]$ і $[c,b]$, то f інтегровна на $[a,b]$ і
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{3.2.3.3}$$

Доведення. Нехай Θ_1 і Θ_2 – розбиття відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ відповідно. Очевидно, що об'єднання точок цих розбиттів утворює деяке розбиття Θ відрізку $[a,b]$ і справедлива рівність
$$S_\Theta(f) = S_{\Theta_1}(f) + S_{\Theta_2}(f). \tag{3.2.3.4}$$
Крім того, якщо $\lambda(\Theta) \to 0$, то $\lambda(\Theta_1) \to 0$ і $\lambda(\Theta_2) \to 0$. Переходячи тепер в (3.2.3.4) до границі при $\lambda(\Theta) \to 0$, отримуємо потрібне твердження. □

Властивість 3 називається адитивністю визначеного інтеграла.

Узагальнимо поняття визначеного інтегралу на випадок, коли нижня межа інтегрування більше або дорівнює верхній межі інтегрування.

Означення 3.2.3. *Якщо $a > b$ і функція f інтегровна на $[b, a]$, то покладаємо*

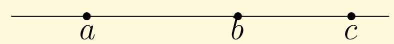
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Крім того, покладаємо

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Властивості 1. і 2. залишаються справедливими і за умови $a \geq b$. Що ж до властивості 3., то вона також залишається справедливою, але вже при довільному розташуванні точок.

Перевіримо, наприклад, що властивість 3. залишається справедливою при такому розташуванні точок:



Згідно з доведеним $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

що і треба було довести.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 136 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

3.2.4. Властивості визначеного інтеграла, що виражаються нерівностями

1* Якщо функції f і g інтегровні на $[a,b]$ і $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \qquad (3.2.4.1)$$

Доведення. Нехай $\Theta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ – розбиття відрізку $[a,b]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і $S_\Theta(f)$ та $S_\Theta(g)$ – відповідні інтегральні суми функцій f та g. Оскільки $f(\xi_i) \le g(\xi_i)$, то $f(\xi_i)\triangle x_i \le g(\xi_i)\triangle x_i$ і тому $S_\Theta(f) \le S_\Theta(g)$. Переходячи в цій нерівності до границі за умови, що $\lambda(\Theta) \to 0$, отримуємо (3.2.4.1). □

2* Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на $[a,b]$ і

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (3.2.4.2)$$

Доведення. Інтегровність функції $|f(x)|$ – без доведення. Далі, для кожного $x \in [a,b]$ маємо $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Тому за властивістю 1*

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx, \qquad (3.2.4.3)$$

звідки випливає (3.2.4.2). □

Наслідок 3.2.4. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$ і $f(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Доведення. Оскільки $f(x) \geq 0$, то внаслідок властивості 1*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b 0 \cdot dx = 0,$$

що й потрібно було довести. □

За аналогією доводиться, що у випадку $f(x) \leq 0,\ x \in [a,b]$, справедлива нерівність $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$.

3.2.5. Теорема про середнє

Лема 3.2.5. *Для будь-яких $a, b, C \in \mathbb{R}$ справедлива рівність*

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a). \tag{3.2.5.1}$$

Доведення. Спочатку припустимо, що $a < b$. Розглянемо функцію $f(x) \equiv C,\ x \in [a,b]$. Для кожного розбиття Θ відрізку $[a,b]$ відповідною інтегральною сумою є

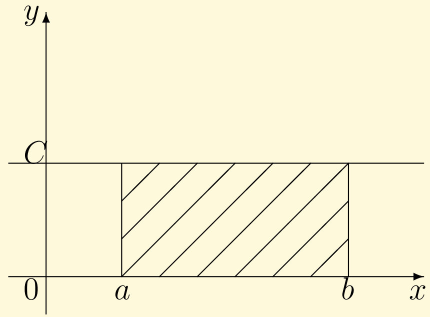
$$S_\Theta(f) = \sum_{i=1}^n C\triangle x_i = C\sum_{i=1}^n \triangle x_i = C(b-a)$$

Переходячи в цій рівності до границі за умови $\lambda(\Theta) \to 0$, отримуємо (3.2.5.1). У випадку $a > b$ маємо

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -C(b-a) = C(a-b),$$

що й потрібно було довести. □

Зауваження 3.2.6. *У випадку $C > 0$ доведена лема геометрично означає наступне очікуване твердження: площа прямокутника, обмеженого горизонтальними прямим $y = 0$, $y = C$ і вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, дорівнює інтегралу в формулі*(3.2.5.1), *тобто $C(b - a)$ (див. рис. нижче).*



Теорема 3.2.3 (Про середнє)**.** *Якщо функція f неперервна на відрізку з кінцями в точках a і b, то знайдеться точка ξ між a і b, така що*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{3.2.5.2}$$

(існування інтеграла в формулі (3.2.5.2) *випливає з теореми 3.2.2).*

Доведення. Спочатку припустимо, що $a < b$ і, отже, функція f неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді згідно з теоремою Вейєрштраса справедлива нерівність

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a, b],$$

де m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції на $[a, b]$. Інтегруючи цю

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 139 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

нерівність та приймаючи до уваги (3.2.5.1), отримаємо

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Оскільки $b-a>0$, то можна поділити всі члени останньої нерівності на $b-a$. Тому

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \tag{3.2.5.3}$$

і згідно з наслідком 1.5.11 існує точка $\xi \in [a,b]$, така що

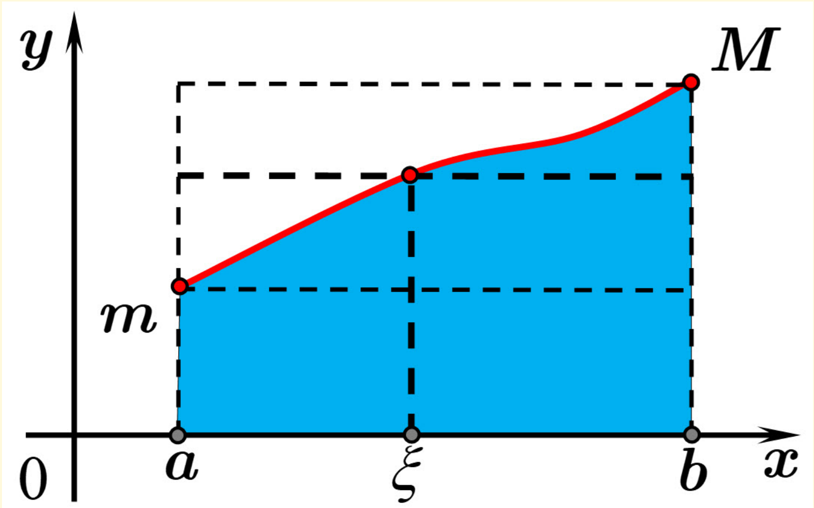
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{3.2.5.4}$$

Звідки випливає (3.2.5.2).
Якщо $a>b$, то за доведеним вище

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -f(\xi)(a-b) = f(\xi)(b-a),$$

де $\xi \in [b,a]$. Отже, і в цьому випадку рівність (3.2.5.2) є вірною. □

Зауваження 3.2.7. *Геометрично у випадку невід'ємної функції $f(x)$ теорема про середнє означає існування точки $\xi \in [a,b]$, такої що площа прямокутника з основою $[a,b]$ висотою $f(\xi)$ дорівнює площі криволінійної трапеції під графіком функції (див. рис. нижче).*



3.2.6. Похідна визначеного інтегралу зі змінною верхньою межею. Формула Н'ютона-Лейбніца

Нехай функція f неперервна на проміжку $\langle a, b\rangle$ і x_0 – фіксована точка з $\langle a, b\rangle$. Оскільки для кожного $x \in \langle a, b\rangle$ функція f неперервна на відрізку з кінцями в точках x_0 і x, то вона інтегровна на цьому відрізку. Тому рівність

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \langle a, b\rangle \tag{3.2.6.1}$$

коректно визначає функцію $\Phi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Ця функція називається інтегралом зі змінною верхньою межею.

Теорема 3.2.4. *Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a,b\rangle$ і $x_0 \in \langle a,b\rangle$, то функція $\Phi(x)$ вигляду (3.2.6.1) диференційовна на $\langle a,b\rangle$ і*

$$\Phi'(x) = f(x), \quad x \in \langle a,b\rangle. \tag{3.2.6.2}$$

Якщо скінченна кінцева точка a (відповідно b) належить до $\langle a,b\rangle$, то в формулі (3.2.6.2) $\Phi'(a)$ $(\Phi'(b))$ є правою (лівою) похідною функції Φ в цій точці.

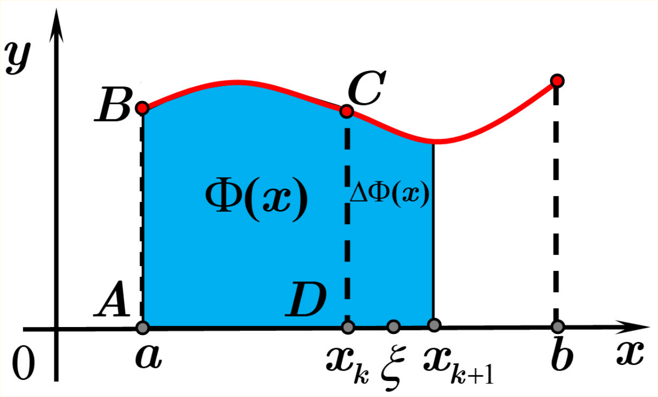
Доведення. Для довільного $\Delta x \in \mathbb{R}$ маємо

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = [\text{адитивність інтеграла}] =$$

$$= \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = [\text{Теорема 3.2.3}] = \Delta x f(\xi),$$

де ξ – точка між x і $x+\Delta x$. Звідси випливає, що

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi). \tag{3.2.6.3}$$



Оскільки точка ξ знаходиться між x і $x + \Delta x$, то за умови $\Delta x \to 0$ маємо $\xi \to x$. Звідси та з неперервності функції $f(x)$ в точці x випливає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x),$$

і внаслідок (3.2.6.3) маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$$

□

З теореми 3.2.4 та означення первісної випливає такий наслідок.

Наслідок 3.2.8. *[Про існування первісної неперервної функції.] Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a, b\rangle$, то множина первісних цієї функції на $\langle a, b\rangle$ є непорожньою. Зокрема, для довільного фіксованого $x_0 \in \langle a, b\rangle$ функція $\Phi(x)$ вигляду* (3.2.6.1) *є такою первісною.*

Теорема 3.2.5. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ — її первісна на цьому відрізку, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3.2.6.4}$$

Формула (3.2.6.4) називається формулою Н'ютона-Лейбніца.

Доведення. Згідно з наслідком 3.2.8 функція $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

є первісною функції f на $[a, b]$. Тому за теоремою 3.1.1

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \tag{3.2.6.5}$$

де $C \in \mathbb{R}$ — деяка стала. Покладаючи в (3.2.6.5) $x = 0$, отримуємо $0 = F(0) + C$. Отже, $C = --F(a)$ і формулу (3.2.6.5) можна записати так:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \quad x \in [a, b].$$

Покладаючи в цій рівності $x = b$, отримуємо (3.2.6.4). □

Формулу Н'ютона-Лейбніца коротше записують так

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

де $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – приріст первісної $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Зауваження 3.2.9. *Легко бачити, що формула (3.2.6.4) залишається вірною також у випадку, коли $a \geq b$, функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[b, a]$ і $F(x)$ її первісна на $[b, a]$. Дійсно, у цьому випадку*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a).$$

Приклади:

$$\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \qquad (3.2.6.6)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2. \qquad (3.2.6.7)$$

У випадках, коли одразу не видно, яка первісна у підінтегральної функції, цю первісну знаходять як невизначений інтеграл.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int x\sqrt{1-x^2}dx\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3.2.7. Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 3.2.6 (інтегрування частинами). *Нехай функції u і v є неперервно диференційовними на відрізку $[a,b]$. Тоді справедливою є така формула інтегрування частинами:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \qquad (3.2.7.1)$$

Доведення. Оскільки функції v і u мають на $[a,b]$ похідні, то

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad x \in [a,b].$$

Тому функція $u(x)v(x)$ є первісною для суми $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ на відрізку $[a,b]$ і за формулою Н'ютона-Лейбніца

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = u(x)v(x)\Big|_b^a. \qquad (3.2.7.2)$$

Оскільки функції $u(x)v'(x)$ і $u'(x)v(x)$ неперервні на $[a,b]$ (як добутки неперервних функцій), то інтеграл суми в правій частині рівності (3.2.7.2) можна замінити на суму інтегралів. Отже,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_b^a,$$

звідки випливає (3.2.7.1). □

Формулу інтегрування частинами можна записати дещо в спрощеному вигляді:

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_b^a - \int_a^b vdu}$$

де $dv = v'(x)dx$, $du = u'(x)dx$.

Приклад:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dx = dv & v = x \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x\Big|_1^0 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg} 1 - 0\cdot\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_1^0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Теорема 3.2.7 (заміна змінної). *Якщо функція ω має на відрізку $[a,b]$ неперервну похідну і приймає значення, що лежать в проміжку $\langle\alpha,\beta\rangle$, на якому неперервна функція f, то*

$$\int_a^b f(\omega(x))\omega'(x)dx = \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} f(u)du. \tag{3.2.7.3}$$

Якщо, крім того, $[\alpha,\beta]$ – відрізок і $\omega(a)=\alpha$, $\omega(b)=\beta$, то

$$\int_a^b f(\omega(x))\omega'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du$$

Доведення. Оскільки функція f неперервна на відрізку з кінцями в точках $\omega(a)$ і $\omega(b)$, то за формулою Н'ютона-Лейбніца

$$\int_{\omega(a)}^{\omega(b)} f(u)du = F(\omega(b)) - F(\omega(a)), \tag{3.2.7.4}$$

де $F(u)$ – первісна функції f на $\langle \alpha, \beta \rangle$. Розглянемо тепер складну функцію $F(\omega(x))$. Відповідно до наслідку 2.1.7 похідна $(F(\omega(x)))'_x$ цієї функції має вигляд

$$(F(\omega(x))'_x = F'_u(\omega(x))\omega'(x) = f(\omega(x))\omega'(x), \quad x \in [a, b].$$

Це означає, що функція $F(\omega(x)$ є первісною для неперервної функції $f(\omega(x))\omega'(x)$ на $[a, b]$ і тому за формулою Н'ютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(\omega(x))\omega'(x)dx = F(\omega(x)) \Big|_a^b = F(\omega(b)) - F(\omega(a)). \tag{3.2.7.5}$$

Порівнюючи тепер (3.2.7.4) і (3.2.7.5), отримуємо (3.2.7.3). $\square$

Формулу (3.2.7.3) записують також у вигляді

$$\boxed{\int_a^b f(\omega(x))d\omega(x) = \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} f(u)du}$$

Розглянемо приклади:

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}d(4-x^2) = -\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_4^0 = 0-\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\cos t; \\ dx = -2\sin t dt; \\ x_1 = 0; \quad t_1 = \frac{\pi}{2}; \\ x_2 = 2; \quad t_2 = 0. \end{array}\right] = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{4-4\cos^2 t}\sin t dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt =$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -4\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - \left(-4\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi$$

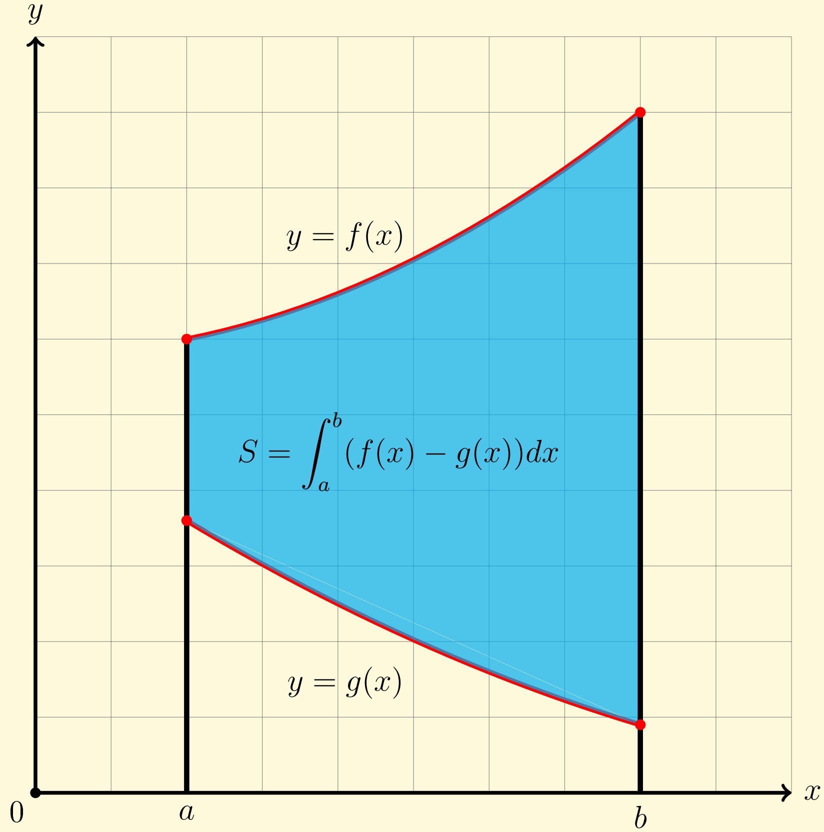
3.2.8. Застосування визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має широке застосування у математиці та фізиці. Розглянемо застосування визначеного інтеграла у геометрії, зокрема для знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, та об'ємів тіл.

3.2.8.1. Площа плоскої фігури.

Означення 3.2.10. *Нехай f та g - неперервні функції на відрізку $[a, b]$, такі що $g(x) \le f(x)$ на цьому відрізку. Тоді множина точок $M = (x, y)$ на координатній площині,що задовольняють нерівностям $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$, називається узагальненою криволінійною трапецією.*

На нижче наведеному рисунку представлено узагальнену криволінійну трапецію.



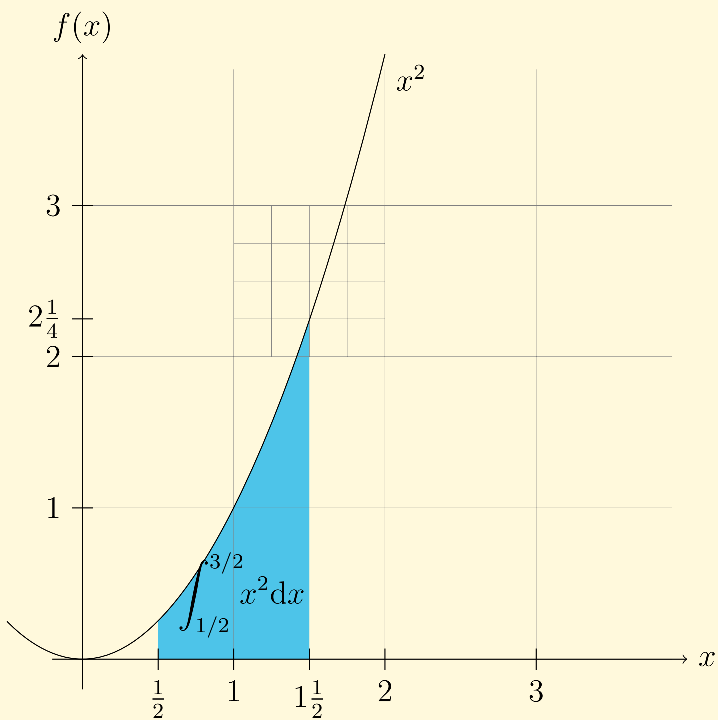
Площа S узагальненої криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \tag{3.2.8.1}$$

Приклад. Обчислити площу фігури, що обмежена параболою $y = x^2$, віссю абсцис, та прямими $x = \frac{1}{2}, x = 1\frac{1}{2}$.

Представимо покрокову реалізацію пошуку розв'язку даного завдання.

1. Для обчислення площі фігури спочатку побудуємо графіки функцій: $y = x^2, y = 0$, $x = \frac{1}{2}, x = 1\frac{1}{2}$.



2. Межі інтегрування у даному випадку нам задані: $x = \frac{1}{2}, x = 1\frac{1}{2}$.

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 151 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

3. Шукана фігура обмежена на заданому проміжку згори графіком функції $y = x^2$, а знизу – $y = 0$.

4. Обчислимо площу, застосовуючи формулу (3.2.8.1).

$$S = \int_{1/2}^{3/2} (x^2 - 0)dx = \int_{1/2}^{3/2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{1/2}^{3/2} = \frac{27}{24} - \frac{1}{24} = \frac{26}{24} = 1\frac{1}{12}.$$

Означення 3.2.11. *Нехай на площині задана полярна система координат r, ϕ та функція $r = r(\phi)$, неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді плоска фігура, обмежена лініями $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, $r = r(\phi)$, називається криволінійним сектором.*

Для обчислення площі криволінійного сектора використовуємо міркування, аналогічні міркуванням при обчисленні площі криволінійної трапеції. Саме, розіб'ємо відрізок $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = \phi_0, \phi_1, ..., \phi_n = \beta$. При цьому утворюється n криволінійних секторів, обмежених лініями $\phi = \phi_{i-1}$, $\phi = \phi_i$, $r = r(\phi)$. Замінимо їх на відповідні кругові сектори з радіусом $r = r\xi_i$, де $\xi_i \in [\phi_{i-1}, \phi_i]$. Тоді площа S криволінійного сектора наближено дорівнює

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\xi_i)\Delta\phi_i.$$

Переходячи до границі при

$$\max_{1 \le i \le n} \Delta\varphi_i \to 0,$$

отримаємо формулу для знаходження площі криволінійного сектора, а саме

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi)d\phi \qquad (3.2.8.2)$$

3.2.9. Об'єм тіла.

Нехай в тривимірному просторі задано деяке тіло T, при чому відома площа $S(x)$ перетину цього тіла будь-якою площиною, яка перпендикулярна даній вісі Ox та яка проходить через точку x на цій вісі. Тоді, якщо $a \le x \le b$, то об'єм $\vartheta(T)$ тіла T обчислюється за формулою

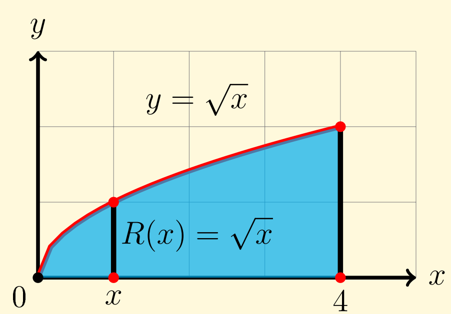
$$\vartheta(T) = \int_a^b S(x)dx \tag{3.2.9.1}$$

Зокрема, якщо T – тіла обертання, яке утворюється при обертанні криволінійної трапеції 2.2.1. навколо вісі Ox, то $S(x) = \pi f^2(x)$ і формула 3.2.9.1 приймає вигляд

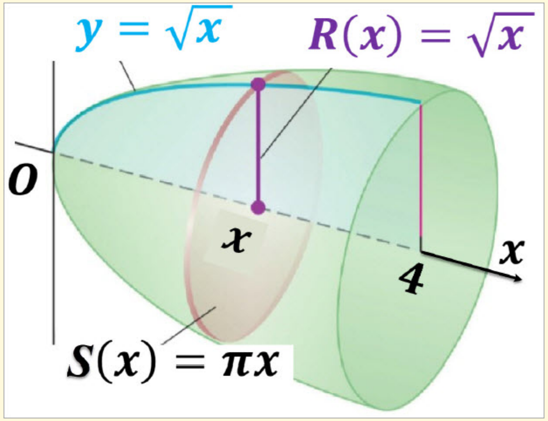
$$\vartheta(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{3.2.9.2}$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі Ox криволінійної трапеції: $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 4, y = 0$.

Зобразимо на кресленні плоску фігуру, обмежену лініями, $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 4, y = 0$ не забуваючи при цьому, що рівняння $x = 0$ задає вісь Oy:



Шукана фігура заштрихована синім кольором. При її обертанні навколо вісі Ox отримаємо тіло, зображене на рисунку.



Використовуючи стандартну формулу для знаходження об'єму тіла обертання (3.2.9.2):

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi.$$

3.2.10. Площа поверхні обертання.

Означення 3.2.12. *Поверхня, яка утворюється при обертанні графіка неперервно-диференційовної функції $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, навколо вісі , називається поверхнею обертання.*

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 154 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{3.2.10.1}$$

3.2.11. Довжина кривої.

Якщо деяка плоска крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то її довжина l обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}d\phi \tag{3.2.11.1}$$

Якщо крива задана рівнянням $r = r\phi,\ \phi \in [\alpha, \beta]$, в полярній системі координат r, ϕ, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}d\phi \tag{3.2.11.2}$$

Якщо крива є графіком неперервно-диференційовної функції $y = f(x),\ x \in [a, b],$, то

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \tag{3.2.11.3}$$

Практичні завдання 3.2

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{2}\sqrt{3+x}dx$;

б) $\int_{1}^{e}\dfrac{1+\ln x}{x}dx$;

в) $\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$;

г) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

2. Обчислити інтеграл з використанням заміни змінної:

а) $\int_{9}^{25}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$;

б) $\int_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$;

в) $\int_{0}^{-ln2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$;

г) $\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

3. Використовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити інтеграли:

а) $\int_{1}^{e}\sqrt{x}lnxdx$;

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$;

в) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin 2xdx$;

г) $\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin 3xdx$.

4. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженою лініями з рівняннями:

а) $y=x^2$, $y=x+1$;

б) $y = x^2$, $x = y^2$;

в) $x^2 + y^2 = R^2$, $x + y = R$ (R>0);

г) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$;

д) $x = y^2 - 1$, $x + y = 1$.

5. Обчислити площу фігури, яка обмежена астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

6. Знайти площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - asin2t$.

7. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією, що задана полярним рівнянням:

а) $\rho = a\sin 2\phi$ (a>0);

б) $\rho = a\cos 5\phi$;

в) $\rho = 2 + \cos\phi$.

8. За допомогою переходу до полярних координат, обчислити площу фігури, яка обмежена лінією:

а) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (a>0);

б) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$.

9. Фігура, яка обмежена дугами парабол $y = x^2$ та $y^2 = x$, обертається навколо вісі абсцис. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = \arcsin x$, з основою $[0,\ 1]$ навколо вісі Ox.

11. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо вісі ординат криволінійної трапеції, що обмежена дугою синусоїди $y = \sin x$, яка відповідає напівперіоду.

12. Знайти площу поверхні, яка утворена обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо вісі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x = 3a$.

13. Обчислити площу поверхні, яка утворена обертанням кубічною параболи $3y - x^3 = 0$ навколо вісі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

14. Знайти довжину кривої, що задана рівнянням:

а) $y = \sqrt{x^3}$ $(0 \le x \le 4)$;

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 157 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

б) $y = ln\cos x \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$;
в) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t \quad (0 \le t \le 2\pi)$;
г) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$;
д) $\rho = 1 + \cos\phi$;
е) $\rho = a\sin^3\frac{\phi}{3} \quad$ (a>0).

Інтерактивні тестові завдання, тест 6

Інтерактивні тестові завдання тесту 6 із математичного аналізу розроблені за даним посібником для перевірки рівня знань, умінь та навичок студентів, які вони одержали в процесі вивчення тем: визначений інтеграл та його властивості. Тестове завдання складаються з 30 питань різних рівнів складності, що вказуються відразу після номера питання у вигляді кількості балів.

Ознайомитися з особливостями виконання тестів можна на стор. 46.

Для того, щоб перейти до безпосереднього виконання тестового завдання, необхідно натиснути кнопку «Тест 6».

Сайт ПНПУ
Головна
Зміст
Стор. 159 із 160
Назад
Перегляд
Закрити
Вихід

Бібліоґрафія

1. Давидов, М. О. Курс математичного аналізу. Ч.1-3. [Текст] / М. О. Давидов. — К. : Вища школа, 1992. — 360 с. — ISBN: 5-11-002284-4.

2. Дороговцев, А. . Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – Издание второе. [Текст] / А. Я. Дороговцев. — К. : Факт, 2004. — 560 с. — ISBN: 966-8408-44-6. — Режим доступу: `https://www-old.fmi.uni-sofia.bg/Members/babev/book/41043d43043b438437-414418421-43d430-44044344143a438-43543743843a/math_ana_dorogovcev.pdf`.

3. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ. Т.1. [Текст] / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Юрайт, 2014. — 703 с. — ISBN: 978-5-9916-3690-2. — Режим доступа: `https://biblio-online.ru/viewer/7C2C72EF-CCB8-46A9-8933-E57E32874DC0/kurs-matematicheskogo-analiza-v-3-t-tom-1#page/1`.

4. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Том 1. [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наук, 1968. — 437 с.

5. Шкіль, М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. [Текст] / М. І. Шкіль. — К. : Вища школа, 2005. — 510 с. — ISBN: 966-642-285-9.

