Г. Я. Тулученко, Т. А. Немченко
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
м. Харків
tuluchenko@ukr.net

РЕАЛІЗАЦІЯ ОСОБИСТІСНОГО ПІДХОДУ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ЗАВДАНЬ НА ПРИКЛАДІ ТЕМИ «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Розглянемо можливість створення завдань різного рівня складності на основі стандартної задачі Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння першого порядку [1]:

$$xy' - y = x^2 e^x, \; y(1) = e. \tag{1}$$

Рівняння (1) є окремим випадком рівняння Ріккаті і має особливу точку $x = 0$.

Його розв'язання приводить до частинного розв'язку:

$$y_ч = xe^x. \tag{2}$$

До цього рівняння доцільно повернутися при вивченні наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів і запропонувати знайти його частинний розв'язок у вигляді ряду Тейлора методом послідовного диференціювання та методом невизначених коефіцієнтів.

Відзначимо, що під час реалізації методу послідовного диференціювання обчислення другої похідної краще здійснити в неявному вигляді. Надалі метод реалізується за стандартною схемою. Отримуємо такий частинний розв'язок рівняння (1) у вигляді ряду Тейлора в околі точки $x = 1$:

$$y_ч = e \cdot \left(1 + \frac{2}{1!} \cdot (x-1) + \frac{3}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{4}{3!} \cdot (x-1)^3 + \ldots\right). \tag{3}$$

Проблемна ситуація. В силу існування точного частинного розв'язку (2) ряд (3) повинен збігатися до функції (2).

Аналіз проблемної ситуації. Доведення збіжності ряду (3) до функції (2) можна здійснити кількома способами, кожний з яких має свою методичну цінність.

Спосіб 1. Проінтегруємо почленно степеневий ряд (3):

$$g(x) = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \cdot \int_1^x (x-1)^n \, dx = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^{n+1} = e \cdot (x-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n =$$

$$= e \cdot (x-1) \cdot e^{x-1} = (x-1) \cdot e^x. \tag{4}$$

Диференціювання функції (4) приводить до виразу частинного розв'язку (2).

Спосіб 2. Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (1) у вигляді степеневого ряду:

$$y_ч = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5}$$

Ліва і права частина рівняння (1) можуть бути подані у вигляді рядів:

$$-a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}. \qquad (6)$$

Порівняння коефіцієнтів при однакових степенях x приводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ \left(n-1\right)a_n = \dfrac{1}{(n-2)!}, \quad n \geq 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Звідки маємо, що $a_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$ для $n \geq 2$, а ряд (5) набуває вигляду:

$$y_ч = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}. \qquad (8)$$

Відзначимо, що коефіцієнт a_1 залишився невизначеним з системи (7).

Виконаємо з правою частиною формули (8) такі тотожні перетворення:

$$y_ч = a_1 x - \frac{x}{0!} + \frac{x}{0!} + x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \left(a_1 - 1\right)x + x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \left(a_1 - 1\right)x + x\cdot e^x. \quad (9)$$

Використавши початкову умову (1), отримуємо $a_1 = 1$, а частинний розв'язок (9) співпадає з частинним розв'язком (2).

Розглянутий приклад демонструє студентам взаємозв'язки між точними та наближеними методами розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, а викладачу відкриває можливість формувати послідовність завдань з регульованою складністю.

Література

1. Тулученко Г. Я. Ряди: навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХПІ», 2023. 214 с.

Анотація. Тулученко Г.Я., Немченко Т.А. Реалізація особистісного підходу за допомогою системи взаємопов'язаних завдань на прикладі теми «Звичайні диференціальні рівняння». *У доповіді розглядається приклад взаємопов'язаних завдань з теми «Звичайні диференціальні рівняння», завдяки яким студенти мають змогу глибше усвідомити зв'язки між різними методами розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Показано можливість створення умов для стимулювання студентів до пошуку креативних рішень.*

Ключові слова: *звичайні диференціальні рівняння, точні та наближені методи розв'язання.*

Summary. Tuluchenko H.Ya., Nemchenko T.A. Realization of the personal approach with the help of a system of interrelated tasks on the example of the topic "Ordinary differential equations". *The report considers example of interrelated tasks on the topic "Ordinary differential equations", thanks to which students can better understand the relationship between different methods of solving ordinary differential equations. The possibility of creating conditions for stimulating students to find creative solutions is shown.*

Key words: *ordinary differential equations, exact and approximate methods of solving.*