Міністерство освіти і науки
Полтавський національний педагогіний
університет імені В.Г. Короленка

**М.І. Сєров, Ю.Г. Подошвелев,
Ю.В. Приставка**

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ–КОНВЕКЦІЇ–ДИФУЗІЇ

Київ Наукова думка 2023

УДК 517.9-7:53

С32

Монографія присвячена дослідженню нелінійного рівняння та систем нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії. Проведено повну групову класифікацію нелінійного рівняння реакції–конвекції–дифузії у випадку однієї часової та двох просторових змінних із точністю до локальних перетворень еквівалентності. Отримані симетрійні властивості використано для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження класів точних розв'язків даного рівняння. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності систем рівнянь реакції–конвекції–дифузії. Ці перетворення застосовано для знаходження операторів потенційної симетрії систем ван дер Ваальса та системи рівнянь хемотаксису, які застосовуються для опису фізичних і біологічних процесів, пов'язаних із рідинами ван дер Ваальса та симетричним проникненням бактерій у біологічні організми. Оператори потенційної симетрії застосовано для знаходження нелокальних анзаців, редукції та побудови класів точних розв'язків вказаних систем.

Для фахівців у галузі прикладної математики, аспірантів, студентів вищих навчальних закладів, які цікавляться симетрійними властивостями та чочними розв'язками рівнянь реакції–конвекції–дифузії.

СХВАЛИЛА

Вчена рада Полтавського національного педагогічного університету

імені В.Г. Короленка. Протокол № від червня 2023 року.

Рецензенти:

В.М. Федорчук доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Ю.Д. Москаленко кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри загальної фізики і математики ПНПУ імені В.Г. Короленка

Науково-видавничий відділ природничо-технічної літератури

Редактор *О.А. Микитенко*

ISBN 978-966-00-1916-4

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими – від 0 до n. За індексами, що повторюються, проводиться підсумовування. Нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною, а верхній індекс – номер функції, нижні індекси сталих та незалежних змінних означають їх номери.

$\mathbb{R}$	–	поле дійсних чисел
$\mathbb{R}^n$	–	n-вимірний евклідів простір
MAI	–	максимальна алгебра інваріантності
$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$,	–	оператори диференціювання за змінними
$\partial_{u^a} = \frac{\partial}{\partial u^a}$		x_μ та u^a відповідно
$\epsilon = (\epsilon_{ab})$	–	антисиметричний тензор 2-го порядку
δ_{ab}	–	символ Кронекера
$u_{(n)}$	–	сукупність усіх похідних функції u за змінною x_1 до порядку n

ВСТУП

Як відомо, нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними широко використовуються як математичні моделі для дослідження об'єктів чи процесів навколишнього світу. Зворотним компенсатором високому рівню адекватності точних моделей є складності, що пов'язані з побудовою їх точних розв'язків. Тому саме на проблемі відшукання точних розв'язків нелінійних рівнянь із частинними похідними ґрунтується створення нових методів інтегрування диференціальних рівнянь.

Для лінійних рівнянь математичної фізики розроблено низку ефективних методів їх розв'язування: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, Метод Д'аламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуассона, метод Фур'є та багато інших.

Низку потужних методів розроблено видатними українськими математиками. Це асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, важливу роль у розвитку яких відіграли праці Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка та інших [33–35, 48–51, 68, 69, 194]; варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки введені І.О. Луковським [27–30]; асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком [2, 44, 45]; алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь із імпульсною дією, запропоновані М.О. Перестюком [14, 42, 43]; чисельно-аналітичний метод знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків із необмеженими операторними коефіцієнтами, створений В.Л. Макаровим [25, 31], та інші.

Основними методами під час дослідження нелінійних рівнянь математичної фізики є: метод оберненої задачі теорії розсіяння; методи Беклунда, Хіроти, Лі та деякі інші.

Метод оберненої задачі теорії розсіяння та низка споріднених із ним методів було запропоновано в 1967 році у спільній праці К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) та Р. Міури (R. Miura) [131] на прикладі інтегрування нелінійного рівняння Кортевега–де Фріза. Цей метод ґрунтується на зображенні нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними як умови сумісності двох лінійних рівнянь та є своєрідним узагальненням перетворення Фур'є для лінійних систем на випадок нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Великий внесок у розвиток методу оберненої задачі теорії розсіювання та створення на його основі нових споріднених з ним методів зробили українські математики, зокрема, Ю.М. Березанський [8, 9, 103], В.О. Марченко [32], Л.П. Нижник [36, 37], Є.Д. Білоколос [5, 6], Є.Я. Хруслов [90] та ін.

Метод перетворень Беклунда, запропонований в 1875 році (див., наприклад, [100]), є одним із способів побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними, де перетворення, здебільшого, здійснюються від розв'язку одного диференціального рівняння до розв'язку іншого диференціального рівняння. Якщо перетворення пов'язують між собою два різні розв'язки одного й того самого диференціального рівняння, то їх називають автоперетвореннями Беклунда. Перетворення Беклунда дає змогу конструювати нові точні розв'язки диференціальних рівнянь із уже відомих розв'язків цих рівнянь. Починаючи з розв'язку вакууму за допомогою перетворень Беклунда можна в явному вигляді знайти N-солітонні розв'язки деяких нелінійних диференціальних рівнянь, а саме: синус-Гордона [104, 120, 195], Кортевега–де Фріза [145] та ін. У працях [53, 195] розроблено ітераційний метод пошуку розв'язків рівняння синус-Гордона, який базується на автоперетворенні Беклунда цього рівняння. Як наслідок застосування такого методу побудовано ланцюжок односолітонних розв'язків рівняння синус-Гордона. У праці [211] запропоновано метод знаходження умовних Лі–Беклунд симетрій еволюційних рівнянь.

Метод Хіроти полягає у відшуканні функціонального перетворення від вихідних польових змінних до нових змінних, у термінах полілінійних рівнянь, що мають розв'язки у вигляді стандартних рядів, кожен із яких відповідає солітону [147, 148].

Одним із найефективніших методів, який дає змогу знаходити розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними є метод, започаткований провідним норвезьким математиком С. Лі [157, 158, 160–162]. Метод базується на понятті симетрії диференціальних рівнянь. Основною ідеєю цього методу є використання симетрійних властивостей диференціальних рівнянь із частинними похідними для побудови інваріантних підстановок (анзаців), які дають можливість редукувати розглядувані рівняння до рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних. Якщо вдається розв'язати редуковані рівняння, то, використавши відповідні анзаци, можна знайти класи точних розв'язків вихідного диференціального рівняння з частинними похідними. Зазначимо, що метод Лі узагальнив значну кількість класичних методів, які опосередковані симетрійними властивостями відповідних диференціальних рівнянь.

Багато науковців продовжили дослідження у цьому напрямі використовуючи та розвиваючи теорію Лі. Так, у 1905 році Пуанкаре застосував ідеї Лі до системи рівнянь Максвела, в 1909 році Г. Бейтман [102] використав симетрійні властивості лінійного хвильового рівняння для побудови його точних розв'язків. Е. Нетер у 1918 році довела важливі теореми, які пов'язали групи симетрії із законами збереження. Результати отримані Лі, щодо групового аналізу диференціальних рівнянь із частинними похідними тривалий час залишалися маловідомими. Відомий американський математик Г. Біркгоф [11] наголосив на важливості цих результатів і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці.

Завдяки працям Л.В. Овсяннікова та його школи [39, 40, 184], де створено теорію інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь, метод Лі набув нового етапу розвитку. В Україні перші праці з цієї тематики опублікував В.Г. Костенко [22] наприкінці 50-х років XX століття.

У середині 70-х років XX століття було створено Київську школу математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковці цієї школи зробили суттєвий внесок у розвиток симетрійних методів дослідження диференціальних рівнянь.

У багатьох розділах математики застосовуються методи групового аналізу диференціальних рівнянь. Однією з основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача знаходження максимальної (найширшої) групи симетрії, яку допускає диференціальне рівняння, при цьому не менш важливою є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, започаткована Лі. Сучасне формулювання задачі групової класифікації увів Л.В. Овсянніков [39], який уперше здійснив повну групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Під керівництвом В.І. Фущича класифікаційними задачами займалися багато українських математиків: А.Г. Нікітін, В.М. Федорчук, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник, І.І. Юрик, Р.М. Черніга, Р.О. Попович, В.М. Бойко [71–73,82,91], [116–118,125,129,134–136,170–172] та ін.

У 80-х роках XX століття очевидною стала обмеженість класичного підходу Лі, оскільки існували приклади редукцій диференціальних рівнянь, які неможливо отримати в рамках такого підходу. Крім того, за всіх безперечних переваг класичного підходу Лі знаходження класів розв'язків диференціальних рівнянь, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо рівняння має бідну ліївську симетрію чи не має її взагалі, то застосування такого методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату.

Ці та деякі інші проблеми започаткували ідею пошуку нових підходів до побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Одним із таких підходів є метод дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь, який називали неліївським методом дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь із частинними похідними, розроблений В.І. Фущичем і А.Г. Нікітіним [74–78]. Основна відмінність цього методу від методу Лі полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності відповідних диференціальних рівнянь є переважно інтегро-диференціальними (псевдодиференціальними) операторами. За допомогою такого методу вдалося знайти нові симетрії багатьох відомих рівнянь квантової механіки: Дірака, Максвелла [75], Ламе [84] тощо.

Центральною в генезисі продукування неліївських підходів є ідея пошуку додаткових, відмінних від ліївських операторів симетрії диференціальних рівнянь. Так, у 1969 році Дж. Блумен та І.Д. Коул увели поняття некласичної симетрії [106] і запропонували новий метод для пошуку анзаців і точних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними. Це дало змогу знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, які неможливо отримати в рамках класичного методу Лі. Цей напрям розвивали в своїх працях П. Олвер та Розенау [182,183], які увели поняття слабкої симетрії диференціальних рівнянь.

Зазначимо, поняття порушеної симетрії, яке було уведено В.І. Фущичем та І.М. Цифрою [141], перекликається з поняттями некласичної [106] та слабкої [182] симетрій. Зокрема, у монографії В.І. Фущича та А.Г. Нікітіна [75] досліджено симетрію рівнянь Максвелла, в якій показано, що перша пара рівнянь Максвелла є Лоренц-неінваріантною та стає Лорен-інваріантною тільки у випадку її розширення до повної системи рівнянь Максвела. Методи некласичних, слабких і порушених симетрій були узагальнені В.І. Фущичем і його науковою школою (див., наприклад, [83, 85, 117, 125, 140, 141, 143]) методом умовних симетрій диференціальних рівнянь. За допомогою методу умовних симетрій вдалося побудувати нові класи точних розв'язків низки відомих нелінійних диференціальних рівнянь, які неможливо знайти методом Лі.

Окремим напрямом реалізації ідеї пошуку неліївських симетрій є метод нелокальних симетрій диференціальних рівнянь. Також Е. Нетер у праці [178] запропонувала знаходження нелокальних перетворень інваріантності диференціальних рівнянь. Її ідеї було розвинено в працях низки авторів. Так, у працях Дж. Блумена, С. Кумея [109,110] запропоновано алгоритми знаходження таких перетворень та метод лінеаризації нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою нелокальних перетворень.

У 80-х роках XX століття Н.Х. Ібрагімов і Р.Л. Андерсон відкрили узагальнені симетрії диференціальних рівнянь, які назвали групами Лі-Беклунда [97].

Потенційні симетрії диференціальних рівнянь із частинними похідними є одним із підкласів нелокальних симетрій, дослідженню яких приділено багато уваги. Нелокальні симетрії потенційного типу уведено Дж. Блуменом, С. Кумеєм і Г. Рідом [113]. Потенційна симетрія скалярних диференціальних рівнянь чи їх систем – це точкова симетрія допоміжної системи, що отримуються введенням потенціалу як невідомої функції. Дослідженням потенційних симетрій диференціальних рівнянь із частинними похідними займалися Дж. Блумен, В. Штелень, А. Чевяков, Г. Саккоманді, С. Анко [105, 111, 112, 115, 193] та багато інших. Вивченню потенційних симетрій різноманітних лінійних і нелінійних еволюційних рівнянь та їх систем присвячено праці [149, 212]. Останнім часом поняття потенційної симетрії розширено за рахунок урахування умовних симетрій еволюційних рівнянь [151, 188].

Під керівництвом В.І. Фущича було розроблено ще один напрям вирішення проблеми пошуку розв'язків диференціальних рівнянь, які неможливо одержати стандартним ліївським методом. Він ґрунтується на використанні одержаного Дж. Кінгом [154] перетворення годографа, яке разом із деякими нелокальними замінами перетворює нелінійне рівняння теплопровідності на рівняння того самого класу. У [144] ці перетворення використано для лінеаризації, побудови нелокальних анзаців і знаходження нелокальних формул розмноження розв'язків такого рівняння. Розвитку та застосуванню цього методу присвячено праці [55–58, 197, 199, 202].

У процесі досліджень симетрійних властивостей певного класу диференціальних рівнянь важливим є знання перетворень еквівалентності заданого класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас диференціальних рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь заданого класу. Працю у цьому напрямку розпочав Овсянніков [184].

Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквівалентності зробили відомі вчені І. Ахатов, Р. Газізов та Н. Ібрагімов [3]. Подальший розвиток цих ідей відображено в працях В.І. Лагна, С.В. Спічака та В.І. Стогнія [24], де описано новий підхід до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі, результатом класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності. Ця ідея набула розвитку в праці Я. Лісла [163] під час застосування перетворення еквівалентності для дослідження низки конкретних нелінійних рівнянь математичної фізики.

У праці Дж. Блумена, А. Чевякова, С. Анко [105] запропоновано результати дослідження нелокальних зв'язків систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. А. Чевяков [130] запропонував практичний алгоритм обчислення груп Лі, перетворень точкової еквівалентності та узагальнених перетворень еквівалентності класів диференціальних рівнянь, а також символьну реалізацію цього алгоритму в пакеті GeM для Maple. У працях М. Гасемі, М. Нуссі [146], Р. Поповича, О. Ванеєвої, Н. Іванової [188] цей метод застосовано до дослідження нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. У праці [126] перетворення еквівалентності використані для повної групової класифікації нелінійного рівняння реакції–конвекції–дифузії.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій із додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують як математичні моделі різноманітних процесів у природі та суспільстві. Наприклад, у біології розглядають клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин тощо як частинки, кожна з яких рухається хаотично. Тоді систематичний рух їх групи вважається процесом дифузії, і зазвичай це не проста дифузія, оскільки враховується взаємодія між частинками. Для простоти біологи використовують (1+1)-вимірне неперервне модельне рівняння для опису глобальної поведінки в термінах густини чи концентрації частинок.

У класі систем рівнянь конвекції–дифузії містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасоперенесення, дифузії, описують еволюцію температури та густини в термоядерній плазмі. Оскільки моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, здебільшого, не є інтегровними та не можуть бути лінеаризованими, то симетрійні методи з огляду на універсальність є важливими для їх дослідження. Тому невипадково, що сучасний розвиток групового аналізу розпочався з групової класифікації Л.В. Овсянніковим класу (1+1)-вимірного нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x). \tag{1}$$

У праці [39] класифіковано симетрійні властивості рівняння (1) залежно від вигляду нелінійності $f(u)$, яка стала класичною, оскільки в ній вперше було розв'язано задачу групової класифікації для нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними.

Дослідженням симетрійних властивостей нелінійних рівнянь дифузії займалося багато науковців, як українських, так і зарубіжних.

У своїх дослідженнях В.Л. Катков [20] виконав групову класифікацію рівняння:

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x). \tag{2}$$

Дослідженню симетрійних властивостей та пошуку точних розв'язків рівняння

$$u_t = h(u)u_{xx}$$

присвячено працю В.А. Тичиніна [70].

У працях [15,16] В.А. Дороднiцина, С.Р. Свирщевского та І.В. Князевої проведено повну групову класифікацію рівняння дифузії з джерелом (стоком), яке використовується для моделювання біологічних і фізико–хімічних процесів:

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u), \tag{3}$$

та його узагальнень на випадок двох і трьох змінних. Зауважимо, що це було зроблено через 33 роки після опублікування праці Л.В. Овсяннікова [39]. Це пов'язано зі складністю реалізації алгоритму Лі для розв'язування таких задач у випадку, коли рівняння містить дві і більше довільні функції. Дослідженням симетрійних властивостей рівнянь конвекції–дифузії

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x \tag{4}$$

займалися А. Орон, Ф. Розенау [183], С. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє [209] та М. Едвардс [133]. У 1987 році І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов і Н.Х. Ібрагімов у праці [3] провели групову класифікацію симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{5}$$

У праці [186] Р.О. Попович і Н.М. Іванова вивчили симетрійні властивості та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{6}$$

Праці А.М. Самойленко та В.І. Лагно [1, 23]; В.І. Лагно, С.В. Спічак і В.І. Стогній [24], а також Р.З. Жданов [101, 210] і

П. Басараб-Горват [101] присвячені проведенню повної групової класифікації найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу:

$$u_t = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x). \tag{7}$$

С.В. Спічак та В.І. Стогній [67, 201] висвітлили знайдені максимальні групи перетворень і побудували деякі класи точних розв'язків для одновимірного рівняння Фокера–Планка з довільними достатньо гладкими функціями $A(t,x), B(t,x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u]. \tag{8}$$

У [66, 125, 126, 129] з точністю до перетворень еквівалентності проведено вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійного рівняння реакції–конвекції–дифузії:

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u) \tag{9}$$

у випадку однієї просторової змінної. У працях А.Ф. Баранника, Т.А. Баранника, І.І. Юрика [4,91] побудовані деякі класи точних розв'язків рівняння (9).

Зважаючи на її актуальність, однією з задач, що визначили напрям досліджень, проведених у цій праці, стала задача *групової класифікації нелінійних рівнянь та систем рівнянь параболічного типу*. Зокрема, в розд. 1 розв'язано задачу повної групової класифікації скалярного рівняння реакції–конвекції–дифузії, яке узагальнює рівняння (1), (4), (9) на випадок двох просторових змінних x_1, x_2. У цьому випадку задача групової класифікації формулюється так: дослідити симетрійні властивості рівняння вигляду

$$u_t = \partial_a(f(u)u_a) + g^a(u)u_a + h(u),$$

де $u = u(t,x_1,x_2), a = 1,2,$ за довільних нелінійностей функцій $f(u), g^a(u), h(u)$.

Результати, одержані у розд. 2 пов'язані з дослідженням системи нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії. Отримано нелокальні перетворення еквівалентності такої системи застосовано для знаходження операторів потенційної симетрії та побудови класів її точних розв'язків. Встановлено, що знайдені точні розв'язки неможливо отримати в рамках методу Лі.

Таким чином, розвиток методів теоретико-групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення під час знаходження розв'язків тих диференціальних рівнянь чи систем, для яких інші методи є неефективними.

Автори глибоко вдячні співробітнику кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка, фахівцю з LaTeX-технологій Олександру Волошину за допомогу під час створення цієї праці.

РОЗДІЛ 1

КЛАСИФІКАЦІЯ СИМЕТРІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ (1+2)-ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ–КОНВЕКЦІЇ–ДИФУЗІЇ

Розглянемо (1+2)-вимірне рівняння реакції–конвекції–дифузії:

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \tag{1.1}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ – коефіцієнти дифузії відповідно конвекції та реакції, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1, 2\}$.

Рівняння (1.1) використовується для опису різних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції (див., наприклад, [17, 21, 95, 96]). Його застосовують для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. Так, модифікації рівняння (1.1) використовуються для моделювання перенесення енергії в плазмі [13,208], розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин у пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів. За конкретних значень нелінійностей $f^0(u)$, $f^a(u)$, $h(u)$ рівняння (1.1) використовується для опису перенесення кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань цього рівняння також є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми [17]. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються і описується рівнянням (1.1), зустрічається в таких галузях, як нафтоперероблення, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Рівняння (1.1) має широке застосування також у біології [137,166], хімії [98,99] та інших галузях науки [119,132,155,164,165,179,200,207].

У цьому розділі знайдено неперервні та дискретні перетворення еквівалентності розглядуваного рівняння, які застосовано для виділення нееквівалентних підкласів рівняння (1.1), проведено повну групову класифікацію рівняння (1.1) залежно від значень нелінійностей f^0, f^a, h та знайдено деякі класи точних розв'язків цього рівняння.

1.1. Система визначальних рівнянь. Основна алгебра інваріантності

Означення 1.1. *Основною алгеброю інваріантності рівняння (1.1) називають алгебру, відносно якої рівняння (1.1) інваріан-*

тне за довільних виглядів нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1.1. *Основною алгеброю інваріантності диференціального рівняння (1.1) є алгебра*

$$A^{bas} =< \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} > . \tag{1.2}$$

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1.1) будемо знаходити у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{1.3}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2), \quad \mu = \overline{0,2}, \quad \xi^\mu,\ \eta$ – шукані функції.

Застосувавши до рівняння (1.1) алгоритм Лі (див., наприклад, [41, 184]) одержимо систему визначальних рівнянь відносно нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$ та координат ξ^μ, η оператора (1.3):

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \tag{1.4}$$

$$\xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{1.5}$$

$$\eta \dot{f}^0 = (2\xi^1_1 - \xi^0_0) f^0, \tag{1.6}$$

$$\eta \dot{f}^a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}] f^b - 2a_a f^0 - 2(a_a u + b_a)\dot{f}^0 - \xi^a_0, \tag{1.7}$$

$$\eta \dot{h} = (a - \xi^0_0)h - (\triangle a u + \triangle b) f^0 - (a_a u + b_a) f^a + a_0 u + b_0, \tag{1.8}$$

якщо функція залежить лише від однієї змінної, то крапка над нею означає диференціювання за заданою змінною.

У формулах (1.7), (1.8), як випливає з рівнянь (1.4)

$$\eta = au + b, \tag{1.9}$$

де $a = a(x_0, \vec{x})$, $b = b(x_0, \vec{x})$ – довільні гладкі функції.

Для того щоб знайти основну алгебру інваріантності рівняння (1.1), припускаємо, що $f^0,\ f^a,\ h$ – довільні гладкі функції. Це дає можливість «розчепити» систему (1.6)–(1.8) за цими функціями та їх похідними. У результаті розчеплення одержимо систему визначальних рівнянь відносно функцій ξ^μ і η:

$$\xi^\mu_\nu = \xi^\mu_u = 0, \quad \eta = 0. \tag{1.10}$$

Загальним розв'язком системи (1.10) є функції

$$\xi^\mu = c_\mu, \quad \eta = 0, \tag{1.11}$$

де c_μ – довільні сталі. Оператор (1.3) з функціями (1.11) породжує алгебру (1.2).

Теорему 1.1 доведено.

1.2. Неперервні перетворення еквівалентності

Оскільки рівняння (1.1) містить довільні функції f^0, f^a, h, то воно описує деякий клас рівнянь. Під час дослідження симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливим є знання перетворень еквівалентності цього класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас диференціальних рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Знайдемо перетворення еквівалентності диференціального рівняння (1.1), які будемо використовувати під час проведення повної групової класифікації цього рівняння.

Теорема 1.2. *Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (1.1) є група перетворень, суперпо-*

зиція яких набуває вигляду

$$\begin{aligned}
x_0' &= e^{\theta_0} x_0 + m_0, \\
x_a' &= e^{\theta_1} \left(\delta_{ab} \cos\theta_2 + \epsilon_{ab} \sin\theta_2\right) x_b + q_a x_0 + m_a, \\
u' &= e^{\theta} u + m, \\
f^{0'} &= e^{2\theta_1 - \theta_0} f^0, \\
f^{a'} &= e^{-\theta_0} \left[e^{\theta_1} (\delta_{ab} \cos\theta_2 + \epsilon_{ab} \sin\theta_2) f^b - q_a \right], \\
h' &= e^{\theta - \theta_0} h,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

де $q_a, \theta_0, \theta_a, \theta, m_0, m_a, m$ *– довільні групові параметри.*

Доведення. Застосуємо метод, запропонований у працях [24, 94]. Інфінітезимальний оператор групи перетворень еквівалентності будемо шукати у вигляді

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta \partial_u + \zeta^0 \partial_{f^0} + \zeta^a \partial_{f^a} + \zeta^3 \partial_h, \tag{1.13}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x, u)$, $\eta = \eta(x, u)$, $\zeta^0 = \zeta^0(x, u, f^0, f^1, f^2, h)$, $\zeta^a = \zeta^a(x, u, f^0, f^1, f^2, h)$, $\zeta^3 = \zeta^3(x, u, f^0, f^1, f^2, h)$ – шукані функції.

Із вигляду рівняння (1.1) випливає така система обмежень для нелінійностей f^0, f^a, h:

$$f^0_{x_\mu} = 0, \ f^0_{u_\mu} = 0, \ f^a_{x_\mu} = 0, \ f^a_{u_\mu} = 0, \ h_{x_\mu} = 0, \ h_{u_\mu} = 0, \tag{1.14}$$

яку позначимо S_1.

Застосувавши критерій еквівалентності

$$\widetilde{E} S|_{S=0, S_1=0} = 0, \quad \widetilde{E} S_1|_{S=0, S_1=0} = 0,$$

отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат ξ^0, ξ^a, η, ζ^0, ζ^a, ζ^3 оператора (1.13):

$$
\begin{gathered}
\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \\
\zeta^0_\mu = \zeta^a_\mu = \zeta^3_\mu = \zeta^0_{u_\mu} = \zeta^a_{u_\mu} = \zeta^3_{u_\mu} = 0, \\
\xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \\
\zeta^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^0, \\
\zeta^a = \xi^a_0 f^0 - 2\xi^1_1 f^a + \xi^a_b f^b, \\
\zeta^3 = (\eta_u - 2\xi^1_1) h.
\end{gathered}
\tag{1.15}
$$

Розв'язком системи (1.15) є функції

$$
\begin{gathered}
\xi^0 = \kappa_0 x_0 + d_0, \\
\xi^a = \kappa_1 x_a + c\epsilon_{ab} x_b + g_a x_0 + d_a, \\
\eta = \kappa u + d, \\
\zeta^0 = (\kappa_0 - 2\kappa_1) f^0, \\
\zeta^a = g_a f^0 - \kappa_1 f^a + c\varepsilon_{ab} f^b, \\
\zeta^3 = (\kappa - 2\kappa_1) h.
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

де c, κ, κ_0, κ_1, g_a, d_0, d_a, d – довільні сталі.

Оператор (1.13) з функціями (1.16) породжує групу перетворень (1.12).

Теорему 1.2 доведено.

1.3. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності

Встановимо необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії (1.1). Іншими словами, вкажемо вигляд нелінійностей f^0, f^a, h, за яких рівняння (1.1) може бути інваріантним відносно алгебри, ширшої, ніж алгебра (1.2).

Теорема 1.3. *Для того щоб рівняння (1.1) допускало розширення основної алгебри інваріантності (1.2), необхідно, щоб нелінійності f^0, f^a, h з точністю до перетворень еквівалентності (1.12) мали вигляд, наведений у табл. 1.1.*

Таблиця 1.1. Вигляд нелінійностей, за яких можливе розширення основної алгебри інваріантності рівняння (1.1)

№	f^0	f^a	h	Умови
1	$\forall$	0	$\forall$	
2	e^{su}	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u)$	$re^{(2m-s)u}$	$\lvert m\rvert + \lvert p\rvert \neq 0, m \neq s$
3	e^u	$\lambda_a u$	re^{-u}	
4	e^u	$\lambda_b e^u K_{ab}(u)$	$re^u + \lambda_3$	
5	u^k	$\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)$	ru^{2m-k+1}	$\lvert m\rvert + \lvert p\rvert \neq 0, m \neq k$
6	u^k	$\lambda_a \ln u$	ru^{-k+1}	$k \neq 0$
7	u^k	$\lambda_b u^k K_{ab}(\ln u)$	$u(\lambda_3 u^k + \lambda_4)$	$k \neq 0$
8	1	$\lambda_a u$	$ru + \lambda_3$	
9	1	$\lambda_a \ln u$	$u(\lambda_3 \ln^2 u +$ $+\lambda_4 \ln u + \lambda_5)$	

У табл. 1.1 $K_{ab}(u) = \delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu$, $\lambda_a, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, k, m, p$ – довільні сталі, $\vec{\lambda}^2 \neq 0$, $r \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$.

Доведення. Визначальну систему (1.6)–(1.8) розв'яжемо методом введення структурних сталих (див. [63,88]). У цьому випадку структурні зв'язки мають вигляд

$$\begin{gathered} a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ 2\xi^1_1 - \xi^0_0 = k\varphi,\ \xi^1_1 - \xi^0_0 = m\varphi, \\ \xi^2_1 = p\varphi,\ a_a = \alpha_a\varphi,\ b_a = \beta_a\varphi,\ \xi^a_0 = \gamma_a\varphi, \\ a - \xi^0_0 = (2m + k_1 - k)\varphi, \\ \triangle a = r_1\varphi,\ \triangle b = q_1\varphi,\ a_0 = r_2\varphi,\ b_0 = q_2\varphi, \end{gathered} \tag{1.17}$$

де k, m, p, k_a, q_a, r_a, α_a, β_a, γ_a – довільні сталі, які назвемо структурними сталими, $\varphi = \varphi(x)$ – довільна гладка функція.

Підставивши умови (1.17) у систему (1.6)–(1.8), у силу довільності функції $\varphi(x)$ одержимо

$$
\begin{aligned}
(k_1u+k_2)\dot{f}^0 &= kf^0,\\
(k_1u+k_2)\dot{f}^a &= (m\delta_{ab}+p\varepsilon_{ab})f^b-2\alpha_af^0-\\
&\quad -2(\alpha_au+\beta_a)\dot{f}^0-\gamma_a,\\
(k_1u+k_2)\dot{h} &= (2m-k+k_1)h-(r_1u+q_1)f^0-\\
&\quad -(\alpha_au+\beta_a)f^a+r_2u+q_2.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Систему (1.18) називають структурною для функцій $f^0,\ f^a,\ h$.

Для спрощення структурної системи (1.18) застосуємо перетворення еквівалентності вигляду

$$
\begin{aligned}
&x_0'=x_0,\ x_a'=x_a+\theta_ax_0,\ u'=u,\\
&f^{0'}=f^0,\ f^{a'}=f^a-\theta_a,\ h'=h.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Переписавши систему (1.18) в штрихованих змінних та підставивши в неї формули (1.19), отримаємо

$$
\begin{aligned}
(k_1u+k_2)\dot{f}^0 &= kf^0,\\
(k_1u+k_2)\dot{f}^a &= (m\delta_{ab}+p\varepsilon_{ab})f^b-2\alpha_af^0-\\
&\quad -2(\alpha_au+\beta_a)\dot{f}^0-\Gamma_a,\\
(k_1u+k_2)\dot{h} &= (2m-k+k_1)h-(r_1u+q_1)f^0-\\
&\quad -(\alpha_au+\beta_a)f^a+R_2u+Q_2,
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

де $\Gamma_a=[m\delta_{ab}+p\varepsilon_{ab}]\theta_b+\gamma_a,\ R_2=\theta_a\alpha_a+r_2,\ Q_2=\theta_a\beta_a+q_2.$

Якщо

$$|m|+|p|\neq 0, \tag{1.21}$$

то параметри θ_a можна підібрати так, щоб $\Gamma_a=0$. Тому у випадку (1.21) з точністю до перетворень (1.19) можна вважати $\gamma_a=0$.

Розв'язок системи (1.18) залежить від значень сталих k, k_1, k_2. Мають місце п'ять нееквівалентних випадків:

1) $k_1 = 0, k_2 = 0, k = 0,$

2) $k_1 = 0, k_2 \neq 0, k \neq 0,$

3) $k_1 \neq 0, k_2 = 0, k \neq 0,$

4) $k_1 = 0, k_2 \neq 0, k = 0,$

5) $k_1 \neq 0, k_2 = 0, k = 0.$

1) Нехай $k_1 = 0, k_2 = 0, k = 0$. Тоді система (1.18) набуває вигляду

$$(m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b = 0, \quad 2mh = 0. \tag{1.22}$$

У цьому випадку виконується умова (1.21), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$. Із системи рівнянь (1.22) випливає, що рівняння при $m = 0$, $p \neq 0$ (1.1) допускає розширення алгебри інваріантності (1.2), коли

$$f^0 = \forall, \quad f^a = 0, \quad h = \forall.$$

Отже, це випадок 1 із табл. 1.1.

2) Нехай $k_1 = 0, k_2 \neq 0, k \neq 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $k = k_2 = 1$). Із умови (1.17) випливає, що $a = 0$, $b = \varphi$, що, в свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = r_a = 0 \tag{1.23}$$

та

$$b = 2\xi_1^1 - \xi_0^0,\ mb = \xi_1^1 - \xi_0^0,\ pb = \xi_1^2, \gamma_a b = \xi_0^a. \tag{1.24}$$

Із рівнянь (1.24) маємо

$$(2m-1)\xi_1^1 = (m-1)\xi_0^0. \tag{1.25}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (1.24) за змінними x_1 та x_2 та використавши (1.5), отримаємо

$$m(2m-1)b_a = 0. \tag{1.26}$$

Продиференціювавши останнє рівняння (1.24) за змінними x_a та застосувавши рівність (1.26), одержимо

$$m(m-1)(2m-1)b_0 = 0. \tag{1.27}$$

Із умов (1.26) та (1.27) випливають такі нееквівалентні випадки: а) $m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$; б) $m = 0$; в) $m = \frac{1}{2}$; г) $m = 1$.

Розглянемо кожен із них окремо.

а) $m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

Із умов (1.26) та (1.27) маємо $b - const$. Тоді

$$\beta_a = q_a = 0. \tag{1.28}$$

У цьому випадку виконується умова (1.21), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{1.29}$$

Загальним розв'язком системи (1.29) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{mu} K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^{(2m-1)u}, \tag{1.30}$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = r$.

Отже, це випадок 2 із табл. 1.1 при $s = 1$.

б) $m = 0$.

Із умов (1.17) маємо

$$\beta_a = q_a = 0. \tag{1.31}$$

Тоді система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = p\varepsilon_{ab}f^b - \gamma_a, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{1.32}$$

Розв'язок системи (1.32) залежить від сталої p.

б$_1$) $p \neq 0$ (із умови (1.21) $\gamma_a = 0$).

Загальним розв'язком системи (1.32) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює формули (1.30) при $m = 0$.

б$_2$) $p = 0$.

Загальним розв'язком системи (1.32) із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) будуть нелінійності

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_a u, \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$.

Отже, справедливий випадок 3 із табл. 1.1.

в) $m = \frac{1}{2}$.

Аналогічно до випадку б$_1$ отримуємо

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{\frac{1}{2}u}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu), \quad h = \lambda_3.$$

Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює формули (1.30) при $m = \frac{1}{2}$.

г) $m = 1$ (із умови (1.21) $\gamma_a = 0$).

Тоді система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = (\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = h + q_2. \tag{1.33}$$

Загальним розв'язком системи (1.33) із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) будуть такі функції:

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^u K_{ab}(u), \quad h = \lambda_4 e^u + \lambda_3,$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_4 = r$. Отже, це випадок 4 з табл. 1.1.

3) Нехай $k_1 \neq 0, k_2 = 0, k \neq 0$ (із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $k_1 = 1$). З умови (1.17) випливає, що $b = 0,\ a = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\beta_a = q_a = 0 \tag{1.34}$$

та

$$a = 2\xi_1^1 - \xi_0^0,\ ma = \xi_1^1 - \xi_0^0,\ pa = \xi_1^2, \gamma_a a = \xi_0^a. \tag{1.35}$$

Проаналізувавши рівняння (1.35), маємо такі нееквівалентні випадки:

а) $m \neq 0, \frac{k}{2}, k$; б) $m = 0$; в) $m = \frac{k}{2}$; г) $m = k$.

Розглянемо кожен із них окремо.

а) $m \neq 0, \frac{k}{2}, k$.

Із умов (1.35) отримаємо, що a – стала. Тоді

$$\alpha_a = r_a = 0. \tag{1.36}$$

У цьому випадку виконується умова (1.21), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (1.18) набуває вигляду

$$u\dot{f^0} = kf^0,\ u\dot{f^a} = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b,\ u\dot{h} = (2m - k + 1)h. \tag{1.37}$$

Загальним розв'язком системи (1.37) є функції

$$\begin{gathered} f^0 = \lambda_0 u^k, \quad f^a = \lambda_b u^m(\delta_{ab}\cos p\ln u + \varepsilon_{ab}\sin p\ln u), \\ h = \lambda_3 u^{(2m-k+1)}, \end{gathered} \tag{1.38}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$.

Отже, це випадок 5 із табл. 1.1.

б) $m = 0$.

Із умов (1.35) одержимо $\alpha_a = r_a = 0$. Тоді система (1.18) набуває вигляду

$$u\dot{f^0} = kf^0, \quad u\dot{f^a} = p\varepsilon_{ab}f^b - \gamma_a, \quad u\dot{h} = (-k+1)h. \tag{1.39}$$

Розв'язок системи (1.39) залежить від сталої p.

б$_1$) $p \neq 0$ (з умови (1.21) $\gamma_a = 0$).

Загальним розв'язком системи (1.39) є функції

$$f^0 = \lambda_0 u^k, \quad f^a = \lambda_b K_{ab}(\ln u), \quad h = \lambda_3 u^{-k+1},$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює випадок 5 при $m = 0$.

б$_2$) $p = 0$.

Загальним розв'язком системи (1.39) із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) будуть нелінійності

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_a \ln u, \quad h = r u^{-k+1},$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2$ – довільні сталі. Іншими словами, справедливим є випадок 6 із табл. 1.1.

в) $m = \frac{k}{2}$.

Аналогічно до випадку б$_1$ отримуємо

$$f^0 = \lambda_0 u^k, f^a = \lambda_b u^{\frac{k}{2}}(\delta_{ab}\cos p\ln u + \varepsilon_{ab}\sin p\ln u), h = \lambda_3 u.$$

Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1,\ \lambda_3 = r$, що доповнює випадок 5 при $m = \frac{k}{2}$.

г) $m = k$ (з умови (1.21) $\gamma_a = 0$).

Тоді система (1.18) набуває вигляду

$$\begin{gathered} u\dot{f^0} = kf^0, \quad u\dot{f^a} = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \\ u\dot{h} = (k+1)h + r_2. \end{gathered} \tag{1.40}$$

Загальним розв'язком системи (1.40) із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) будуть такі функції:

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_b u^k K_{ab}(\ln u), \quad h = u(\lambda_3 u^k + \lambda_4),$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ – довільні сталі.

Отже, це випадок 7 із табл. 1.1.

4) Нехай $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k = 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $k_2 = 1$). Із умови (1.17) випливає, що $a = 0,\ b = \varphi$, що, в свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = r_a = 0 \tag{1.41}$$

та

$$2\xi_1^1 = \xi_0^0,\ mb = -\xi_1^1,\ pb = \xi_1^2, \gamma_a b = \xi_0^a. \tag{1.42}$$

Із рівнянь (1.42) маємо

$$p\xi_1^1 + m\xi_1^2 = 0. \tag{1.43}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (1.43) за змінними x_1 та x_2 та використавши (1.5), отримаємо систему

$$\begin{aligned} p\xi_{11}^1 - m\xi_{12}^1 = 0,\\ m\xi_{11}^1 + p\xi_{12}^1 = 0. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Проаналізуємо головний визначник системи (1.44):

$$\triangle = \begin{vmatrix} p & -m \\ m & p \end{vmatrix} = p^2 + m^2.$$

Одержимо два випадки: а) $|m| + |p| \neq 0$; б) $m = p = 0$.

а) $|m| + |p| \neq 0$.

Якщо головний визначник системи (1.44) відмінний від нуля, то ця система має лише нульовий розв'язок:

$$\xi_{11}^1 = \xi_{12}^1 = 0. \tag{1.45}$$

Із рівнянь (1.42), (1.45) отримаємо

$$\xi_{bc}^a = 0, \tag{1.46}$$

де $a, b, c = \overline{1, 2}$. Із (1.42), (1.46) випливає, що b є сталою, тому $r_a = \beta_a = 0$.

У цьому випадку виконується умова (1.21), із якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = 0, \quad \dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = 2mh. \tag{1.47}$$

Загальним розв'язком системи (1.47) є функції

$$f^0 = \lambda_0, f^a = \lambda_b e^{mu} \left(\delta_{ab} \cos pu + \varepsilon_{ab} \sin pu\right), h = \lambda_3 e^{2mu},$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = r$.

Отже, це випадок 2 із табл. 1.1 при $s = 0$.

б) $m = p = 0$.

У цьому випадку система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = 0, \quad \dot{f}^a = -\gamma_a, \quad \dot{h} = -q_1 f^0 + q_2. \tag{1.48}$$

Загальним розв'язком системи (1.48) є функції

$$f^0 = \lambda_0, \quad f^a = \lambda_a u, \quad h = \lambda_4 u + \lambda_3,$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1$, $\lambda_4 = r$.

Отже, це випадок 8 із табл. 1.1.

5) Нехай $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, $k \neq 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $k_1 = 1$). Із (1.17) отримуємо $b = 0$, $a = \varphi$, що, в свою чергу, накладає умови

$$\beta_a = q_a = 0, \ 2\xi_1^1 = \xi_0^0, \ ma = -\xi_1^1, \ pa = \xi_1^2, \ \gamma_a a = \xi_0^a. \tag{1.49}$$

Аналогічно до попереднього випадку, проаналізувавши умови (1.49), маємо: а) $|m| + |p| \neq 0$; б) $m = p = 0$.

а) $|m| + |p| \neq 0$.

Із умов (1.49) випливає, що a є сталою. Тоді $\alpha_a = r_a = 0$.

Оскільки виконується умова (1.21), то $\gamma_a = 0$. Таким чином, система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = 0, \quad u\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad u\dot{h} = (2m+1)h. \tag{1.50}$$

Загальним розв'язком системи (1.50) є функції

$$\begin{gathered} f^0 = \lambda_0, \quad f^a = \lambda_b u^m(\delta_{ab}\cos p\ln u + \varepsilon_{ab}\sin p\ln u), \\ h = \lambda_3 u^{(2m+1)}, \end{gathered} \tag{1.51}$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_0 = 1$, $\lambda_3 = r$.

Отже, це випадок 5 із табл. 1.1 при $k = 0$.

б) $m = p = 0$.

У даному випадку система (1.18) набуває вигляду

$$\dot{f}^0 = 0, \; u\dot{f}^a = -\gamma_a, \; u\dot{h} = h - r_1 u f^0 - \alpha_a u f^a + r_2 u. \tag{1.52}$$

Загальним розв'язком системи (1.52) є функції

$$f^0 = \lambda_0, \quad f^a = \lambda_a \ln u, \quad h = u(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5), \tag{1.53}$$

де λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) $\lambda_0 = 1$.

Отже, це випадок 9 із табл. 1.1.

Теорему 1.3 доведено.

1.4. Достатні умови розширення основної алгебри інваріантності

Теорема 1.4. *Для того щоб максимальні алгебри інваріантності рівняння (1.1) були ширшими порівняно з алгеброю (1.2), необхідно і достатньо, щоб рівняння (1.1) мало один з нееквівалентних відносно перетворень (1.12) виглядів, записаних у другій колонці табл. 1.2, при цьому відповідні максимальні алгебри інваріантності наведено в третій колонці цієї таблиці.*

Таблиця 1.2. Максимальні алгебри інваріантності (1+2)-вимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + h(u)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}$	$f^0, h - \forall$,
2	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D$	$f^0 - \forall$
3	$u_0 = \triangle u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a,$ Q, D, Π, Q_∞	
4	$u_0 = \triangle u \pm 1$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $G_a \pm \frac{1}{2}x_0x_a\partial_u,$ $Q \pm \frac{1}{2}x_0\partial_u,$ $D \pm 2x_0\partial_u,$ $\Pi \pm x_0(2x_0+$ $+\frac{\vec{x}^2}{4})\partial_u, Q_\infty$	
5	$u_0 = \triangle u \pm u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a,$ $Q, D \pm 2x_0u\partial_u,$ $\Pi \pm x_0^2u\partial_u, \widehat{Q}_\infty$	
6	$u_0 = \triangle u \pm u\ln u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, \widehat{Q}, H_a$	
7	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D, \mathcal{D}_0$	$s = 1$
8	$u_0 = \partial_a(e^{su}u_a) \pm e^{mu}$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(s-m)D - 2\mathcal{D}_0$	$m \neq 0$
9	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm 1$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $D - 2\mathcal{D}_0, \mathcal{T}$	$s = 1$
10	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm e^u \pm 1$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, \mathcal{T}$	
11	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D, D_0$	$k \neq -1;0$
12	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u^m$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(k-m+1)D - 2D_0$	$k \neq -1;0$ $m \neq 1$
13	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $kD - 2D_0, T$	$k \neq -1;0$
14	$u_0 = \partial_a(u^k u_a \pm u^{k+1} \pm u)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, T$	$k \neq 0$
15	$u_0 = \partial_a(u^{-1}u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D_0, X_\infty$	$k = -1$
16	$u_0 = \partial_a(u^{-1}u_a) \pm u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, T, X_\infty$	$k = -1$

№	Рівняння	МАІ	Умови
17	$u_0=\partial_a(e^{su}u_a)+$ $+\lambda_b e^{mu}K_{ab}(u)u_a+re^{(2m-s)u}$	$\partial_0,\partial_a,(m-s)D+$ $+\mathcal{D}_0+pJ_{12}$	$m\neq s$ $(m,p)\neq(0,0)$
18	$u_0=\partial_a(e^{u}u_a)+$ $+\lambda_a uu_a+re^{-u}$	$\partial_0,\partial_a,$ $D-\mathcal{D}_0-x_0\lambda_a\partial_a$	$s=1$
19	$u_0=\partial_a(e^{u}u_a)+$ $+\lambda_b e^{u}K_{ab}(u)u_a+re^{u}$	$\partial_0,\partial_a,\mathcal{D}_0+pJ_{12}$	$s=1$
20	$u_0=\partial_a(e^{u}u_a)+$ $+e^{u}\lambda_a u_a+re^{u}\pm 1$	$\partial_0,\partial_a,\mathcal{T}$	
21	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+ru^{2m-k+1}+$ $+\lambda_b u^mK_{ab}(\ln u)u_a$	$\partial_0,\partial_a,(m-k)D+$ $+D_0+pJ_{12}$	$m\neq k,$ $(m,p)\neq(0,0)$
22	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+$ $+\ln u\lambda_a u_a+ru^{-k+1}$	$\partial_0,\partial_a,$ $kD-D_0-x_0\lambda_a\partial_a$	$k\neq 0$
23	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+$ $+\lambda_b u^mK_{ab}(\ln u)u_a+ru^{k+1}$	$\partial_0,\partial_a,D_0+pJ_{12}$	$k\neq 0,$ $p\neq 0$
24	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+$ $+u^k\lambda_a u_a+ru^{k+1}$	$\partial_0,\partial_a,D_0$	$k\neq 0,$ $k^2\lambda_3\neq$ $\neq 4(k+1)$
25	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+$ $+u^k\lambda_a u_a+ru^{k+1}\pm u$	∂_0,∂_a,T	$k\neq 0, k^2\lambda_3\neq$ $\neq 4(k+1)$
26	$u_0=\partial_a(u^ku_a)+$ $+4\frac{k+1}{k^2}u^k\,(ku_1+u)$	$\partial_0,\partial_a,D_0,Q_a$	$k\neq -1;0$
27	$u_0=\partial_a(u^ku_a)\pm u+$ $+4\frac{k+1}{k^2}u^k\,(ku_1+u)$	$\partial_0,\partial_a,T,Q_a$	$k\neq -1;0$
28	$u_0=\triangle u+u\lambda_a u_a\pm u$	$\partial_0,\partial_a,\mathcal{H}$	
29	$u_0=\triangle u+u\lambda_a u_a+r$	$\partial_0,\partial_a,D-u\partial_u-$ $-\frac{3}{2}rx_0(\mathcal{G}-\partial_u),\mathcal{G}$	
30	$u_0=\triangle u+\ln u\lambda_a u_a+ru$	∂_0,∂_a,G	
31	$u_0=\triangle u+\lambda_a\ln u u_a\pm u\ln u$	∂_0,∂_a,H	
32	$u_0=\triangle u\pm 2\ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2u(\ln^2u+q)$	∂_0,∂_a,Y	

У табл. 1.2 введено такі позначення

$J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a, \quad G_a = x_0\partial_a + x_aQ,$

$Q = -\frac{1}{2}u\partial_u, \quad \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - (x_0 + \frac{\vec{x}^2}{4})u\partial_u,$

$H_a = e^{\pm x_0}(\partial_a \mp \frac{1}{2}x_a u\partial_u), \quad \widehat{Q} = e^{\pm x_0}u\partial_u, \quad \mathcal{D}_0 = sx_0\partial_0 - \partial_u,$

$D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u, \quad \mathcal{T} = e^{\mp x_0}(\partial_0 \pm \partial_u), \quad T = e^{\mp kx_0}(\partial_0 \pm u\partial_u),$

$\mathcal{G}_a = e^{\pm x_0}(\partial_a \mp \frac{\lambda_a}{\vec{\lambda}^2}\partial_u), \mathcal{H} = e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_a \mp \partial_u), H = e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_a \mp u\partial_u),$

$\mathcal{G} = x_0\lambda_a\partial_a - \partial_u, \quad G = x_0\lambda_a\partial_a - u\partial_u, \quad Y = e^{\vec{\lambda}^2 x_0 \mp \vec{\lambda}\vec{x}}u\partial_u,$

$Q_1 = e^{-x_1}(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\cos x_2 u\partial_u),$

$Q_2 = e^{-x_1}(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\sin x_2 u\partial_u),$

$Q_\infty = b(x_0, \vec{x})\partial_u, b(x_0, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння $b_0 = \triangle b$,

$\widehat{Q}_\infty = \beta(x_0, \vec{x})\partial_u, \quad \beta(x_0, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння $\beta_0 = \triangle\beta \pm \beta$,

$X_\infty = A(\vec{x})\partial_1 + B(\vec{x})\partial_2 - 2uC(\vec{x})\partial_u$, функції $A(\vec{x}), B(\vec{x}), C(\vec{x})$ – пов'язані співвідношеннями $A_1 = B_2 = C$,

$A_2 = -B_1, \ k, \ m, \ p, \ q, \ \lambda_1, \ \lambda_2,$ – довільні сталі, $r \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in \{0, 1\}$, $\vec{\lambda}^2 \neq 0$.

Доведення. Зауважимо, що для $f^a = 0$ (відсутні конвективні доданки) результати класифікації рівняння (1.1) наведено в працях [15, 40]. Ці результати поміщено в табл. 1.2 у перших шістнадцяти випадках. Тому основну увагу звернемо на доведення випадків 17–32.

Для встановлення достатніх умов розширення основної алгебри інваріантності рівняння (1.1) потрібно використати результати теореми 1.3, Іншими словами, дослідити симетрійні властивості рівняння (1.1) для кожного набору нелінійностей із табл. 1.1.

Нехай $f^0 = e^{su}, \ f^a = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu),$ $h = re^{(2m-s)u}, \ |m| + |p| \neq 0, m \neq s$. Підставивши ці функції в рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи, одержимо

$$
\begin{gathered}
(au+b)se^{su} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^{su},\\
(au+b)\lambda_b e^{mu}[m(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu)+\\
+p(-\delta_{ab}\sin pu + \varepsilon_{ab}\cos pu) =\\
= [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_c e^{mu}(\delta_{bc}\cos pu + \varepsilon_{bc}\sin pu)-\\
-2a_a e^{su} - 2(a_a u + b_a)se^{su} - \xi^a_0,\\
r(2m-s)(au+b)e^{(2m-s)u} = r(a-\xi^0_0)e^{(2m-s)u}-\\
-(\triangle au + \triangle b)e^{su} - (a_a u + b_a)\lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}\cos pu+\\
+\varepsilon_{ab}\sin pu) + a_0 u + b_0.
\end{gathered}
\tag{1.54}
$$

Розчепивши систему (1.54) за різними функціями змінної u, отримаємо $a=0,\ b_0=b_a=0$ та

$$\xi^a_0 = 0, \tag{1.55}$$

$$sb = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\ mb = \xi^1_1 - \xi^0_0,\ pb = \xi^2_1,\ (2m-s)b + \xi^0_0 = 0, \tag{1.56}$$

Із рівнянь (1.56), одержимо

$$\xi^a_{bc} = 0. \tag{1.57}$$

Із (1.55), (1.57) та (1.5) маємо

$$
\begin{gathered}
\xi^1 = (m-s)c_1x_1 + c_1px_2 + d_1,\\
\xi^2 = -c_1px_1 + (m-s)c_1x_2 + d_2.
\end{gathered}
\tag{1.58}
$$

Врахувавши (1.56), (1.58), (1.5), отримаємо

$$\xi^0 = 2(m-s)c_1x_0 + sc_1x_0 + d_0,\ \eta = -c_1, \tag{1.59}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.58), (1.59) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, (m-s)D + \mathcal{D}_0 + pJ_{12} > .$$

Іншими словами, це випадок 17 із табл. 1.2.

Нехай $f^0 = e^u,\ f^a = \lambda_a u,\ h = re^{-u}$. Підставивши ці функції у рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned}
(au+b)e^u &= (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^u,\\
(au+b)\lambda_a &= [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_a u - 2a_a e^u -\\
&\quad -2(a_a u + b_a)e^u - \xi^a_0,\\
-r(au+b)e^{-u} &= r(a-\xi^0_0)e^{-u} - (\triangle au + \triangle b)e^u -\\
&\quad -(a_a u + b_a)\lambda_a u + a_0 u + b_0.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Розчепивши систему (1.60) за різними функціями змінної u, отримаємо, що $a = 0, b_0 = b_a = 0$ та

$$b = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\ \xi^1_1 - \xi^0_0 = 0,\ \xi^2_1 = 0,\ \lambda_a b = -\xi^a_0, \tag{1.61}$$

$$r(b - \xi^0_0) = 0. \tag{1.62}$$

Із рівнянь (1.61) та (1.5) маємо

$$\xi^a = -c_1(\lambda_a x_0 - x_a) + d_1,\ b = c_1. \tag{1.63}$$

Урахувавши (1.61), (1.63), (1.5) та (1.9), отримаємо

$$\xi^0 = c_1 x_0 + d_0,\ \eta = c_1, \tag{1.64}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (1.3) з координатами (1.63), (1.64) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, D - \mathcal{D}_0 - x_0\lambda_a\partial_a > .$$

Іншими словами, це випадок 18 із табл. 1.2.

Нехай

$$f^0 = e^u,\ f^a = \lambda_b e^u(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu),\ h = re^u + \lambda_3.$$

Підставивши ці функції в рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи, одержимо

$$(au+b)e^u = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)e^u,$$

$$\begin{gathered}(au+b)\lambda_b e^u[(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu)+\\ +p(-\delta_{ab}\sin pu + \varepsilon_{ab}\cos pu) =\\ = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_c e^u(\delta_{bc}\cos pu + \varepsilon_{bc}\sin pu)-\\ -2a_a e^u - 2(a_a u + b_a)e^u - \xi^a_0,\end{gathered} \tag{1.65}$$

$$\begin{gathered}r(au+b)e^u = (re^u + \lambda_3)(a - \xi^0_0)e^u - (\triangle au + \triangle b)e^u-\\ -(a_a u + b_a)\lambda_b e^u(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu) + a_0 u + b_0.\end{gathered}$$

Розчепивши систему (1.65) за різними функціями змінної u, отримаємо

$$\begin{gathered}a = b_a = \xi^a_0 = 0,\ b = 2\xi^1_1 - \xi^0_0,\ b = \xi^1_1 - \xi^0_0,\\ pb = \xi^2_1,\ r(b + \xi^0_0) = 0,\ b_0 = \lambda_3\xi^0_0.\end{gathered} \tag{1.66}$$

Розв’язок системи (1.66) залежить від сталої λ_3. Можливі такі нееквівалентні випадки: $\lambda_3 = 0; \lambda_3 \neq 0$, кожен із яких розглянемо окремо.

1) $\lambda_3 = 0$.

Із (1.66) маємо, що b є сталою. Із (1.66), (1.5) та (1.9) отримаємо

$$\begin{gathered}\xi^0 = c_1x_0 + d_0, \quad \xi^1 = pc_1x_2 + d_1,\\ \xi^2 = -pc_1x_1 + d_2, \quad \eta = -c_1,\end{gathered} \tag{1.67}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.67) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 + pJ_{12} > .$$

Іншими словами, це випадок 19 із табл. 1.2.

2) $\lambda_3 \neq 0$ (із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) можна вважати $\lambda_3 = \pm 1$).

Із (1.66), (1.5) та (1.9) отримаємо

$$\begin{gathered} \xi^0 = c_1 e^{\mp x_0} + d_0, \quad \xi^1 = d_1, \\ \xi^2 = d_2, \quad \eta = \pm c_1 e^{\pm x_0}. \end{gathered} \tag{1.68}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі.

Інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.68) породжує таку алгебру

$$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{T} > .$$

Іншими словами, справедливий випадок 20 із табл. 1.2.

Нехай

$$f^0 = u^k, f^a = \lambda_b u^m (\delta_{ab} \cos p \ln u + \varepsilon_{ab} \sin p \ln u),$$

$$h = r u^{2m-k+1}, |m| + |p| \neq 0, m \neq k.$$

Запишемо для цього випадку рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи:

$$(au + b) k u^{k-1} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0) u^k,$$

$$\begin{gathered} (au + b)\lambda_b u^{m-1} [m(\delta_{ab} \cos p \ln u + \varepsilon_{ab} \sin p \ln u) - \\ -p(\delta_{ab} \sin p \ln u - \varepsilon_{ab} \cos p \ln u)] = \\ = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}]\lambda_c u^m (\delta_{bc} \cos p \ln u + \varepsilon_{bc} \sin p \ln u) - \\ -2a_a u^k - 2(a_a u + b_a) k u^{k-1} - \xi^a_0, \\ \\ r(au + b)(2m - k + 1) u^{2m-k} = r(a - \xi^0_0) u^{2m-k+1} - \\ -(\triangle a u + \triangle b) u^k - (a_a u + b_a)\lambda_b u^m (\delta_{ab} \cos p \ln u + \\ +\varepsilon_{ab} \sin p \ln u) + a_0 u + b_0. \end{gathered} \tag{1.69}$$

Із рівнянь (1.69) маємо

$$\begin{aligned} & ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad ma = \xi^1_1 - \xi^0_0, \quad pa = \xi^2_1, \\ & b = a_0 = a_a = \xi^a_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Розв'язком системи (1.70) є функції

$$\begin{aligned} \xi^0 &= (2m-k)c_1x_0 + d_0, \\ \xi^1 &= (m-k)c_1x_1 + pc_1x_2 + d_1, \\ \xi^2 &= -pc_1x_1 + (m-k)c_1x_2 + d_2, \\ \eta &= -c_1u. \end{aligned} \tag{1.71}$$

де c_1, d_0, d_1, d_2 – довільні сталі. Інфінітезимальний оператор (1.3) з координатами (1.71) породжує таку алгебру

$$< \partial_0, \partial_a, (m-k)D + D_0 + pJ_{12} > .$$

Іншими словами, це випадок 21 із табл. 1.2.

Нехай

$$f^0 = u^k,\ f^a = \lambda_a \ln u,\ h = ru^{-k+1}, k \neq 0.$$

Запишемо для цього випадку рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи:

$$\begin{aligned} &(au+b)ku^{k-1} = (2\xi^1_1 - \xi^0_0)u^k, \\ &(au+b)\lambda_a\frac{1}{u} = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b \ln u - \\ &-2a_a u^k - 2(a_a u + b_a)ku^{k-1} - \xi^a_0, \\ &r(au+b)(-k+1)u^{-k} = r(a - \xi^0_0)u^{-k+1} - \\ &-(\triangle au + \triangle b)u^k - (a_a u + b_a)\lambda_a \ln u + a_0 u + b_0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Із рівнянь (1.72) маємо

$$\begin{aligned} &ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad \xi^1_1 = \xi^a_0, \quad \xi^2_1 = 0, \quad \lambda_a a = -\xi^a_0 \\ &b = a_0 = a_a = 0. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Розв'язком системи (1.73) є функції

$$\begin{aligned} \xi^0 &= kc_1x_0 + d_0, \\ \xi^1 &= c_1(-\lambda_a x_0 + kx_1) + d_1, \\ \xi^2 &= c_1(-\lambda_a x_0 + kx_1) + d_2, \\ \eta &= c_1u. \end{aligned} \tag{1.74}$$

де $c_1,\ d_0,\ d_1,\ d_2$ – довільні сталі. Інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.71) породжує алгебру

$$< \partial_0, \partial_a, kD - D_0 - x_0\lambda_a\partial_a > .$$

Іншими словами, це випадок 22 із табл. 1.2.

Нехай

$$f^0 = u^k,\ f^a = \lambda_a u^k K_{ab}(\ln u),\ h = u(\lambda_3 u^k + \lambda_4),\ k \neq 0. \quad (1.75)$$

Підставивши функції (1.75) у рівняння (1.6)–(1.8), одержимо

$$\begin{gathered} b = 0, \quad ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \quad \xi^a_0 = 0, \\ \lambda_b a(kK_{ab} + \dot{K}_{ab}) - [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_c K_{bc} = 2(k+1)a_a, \quad (1.76) \\ \lambda_3(ka + \xi^0_0) = -\lambda_b K_{ab} a_a, \quad a_0 = \lambda_4\xi^0_0. \end{gathered}$$

Розв'язок системи (1.76) залежить від значень сталої p. Якщо $p \neq 0$, то з рівнянь (1.76) отримаємо

$$\begin{gathered} b = 0, \quad a_a = 0, \quad \xi^a_0 = 0, \quad \xi^1_1 = 0, \\ \xi^2_1 = pa, \quad ka + \xi^0_0 = 0, \quad \lambda_4\xi^0_0 = 0. \end{gathered} \quad (1.77)$$

Розв'язок системи (1.77) залежить від значень сталої λ_4:

1) $\lambda_4 \neq 0$. Тоді з рівнянь (1.77) отримаємо такі умови $a = b = 0, \quad \xi^0_0 = \xi^a_0 = \xi^a_b = 0$, що приводить до A^{bas};

2) $\lambda_4 = 0$ (із точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_3 = r$, де $r \in \{-1, 0, 1\}$). У цьому випадку загальним розв'язком системи рівнянь (1.77), (1.4), (1.5) є функції

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0,\ \xi^a = -pc_0\varepsilon_{ab}x_b + d_a,\ \eta = -c_0u. \quad (1.78)$$

Формули (1.78) задають таку максимальну алгебру інваріатності рівняння (1.1)

$$< \partial_0, \partial_a, D_0 + pJ_{12} > .$$

Іншими словами, справедливий випадок 23 із табл. 1.2.

Якщо $p = 0$, то рівняння (1.1) із нелінійностями (1.75) набуває вигляду

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k u_1 + u(\lambda_3 u^k + \lambda_4). \tag{1.79}$$

Із рівнянь (1.76) отримаємо

$$\begin{aligned} b = \xi^a_0 = 0, \quad ka = 2\xi^1_1 - \xi^0_0, \\ 2(k+1)a_a = -\lambda_a\xi^1_1 + \lambda^{\perp}_a\xi^2_1, \\ (\overrightarrow{\lambda}^2 - 4(k+1)\lambda_3)\xi^1_1 = 0, \quad \xi^0_{00} + k\lambda_4\xi^0_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Розв'язок системи (1.80) залежить від сталих λ_3, λ_4. Можливі такі нееквівалентні випадки:

1) $4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2$, $\lambda_4 = 0$;

2) $4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2$, $\lambda_4 \neq 0$;

3) $4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2$, $\lambda_4 = 0$;

4) $4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2$, $\lambda_4 \neq 0$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2$, $\lambda_4 = 0$.

Загальним розв'язком системи рівнянь (1.80), (1.4), (1.5) будуть такі функції

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0, \quad \xi^a = d_a, \quad \eta = c_0u. \tag{1.81}$$

Формули (1.81) породжують алгебру

$$< \partial_0, \partial_a, D_0 = kx_a\partial_a - u\partial_u >,$$

що збігається з випадком 24 табл. 1.2.

2) $4(k+1)\lambda_3 \neq \overrightarrow{\lambda}^2, \lambda_4 \neq 0$ (із точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_3 = r, \lambda_4 = \pm 1$). Загальним розв'язком системи рівнянь (1.80), (1.4), (1.5) будуть такі функції:

$$\xi^0 = c_0e^{\mp kx_0} + d_0, \quad \xi^a = d_a, \quad \eta = \pm c_0e^{\mp kx_0}u. \tag{1.82}$$

Формули (1.82) породжують алгебру

$$< \partial_0, \, \partial_a, T > .$$

Іншими словами, справедливий випадок 25 табл. 1.2.

3) $4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2, \ \lambda_4 = 0.$

Із (1.80) отримаємо

$$\frac{4(k+1)}{k}\lambda_a \xi^1_{1a} + \overrightarrow{\lambda}^2 \xi^1_1 = 0. \tag{1.83}$$

Загальним розв'язком рівняння (1.83) є функція

$$\xi^1_1 = e^w \psi(\omega), \tag{1.84}$$

де $\psi = \psi(\omega)$ – довільна гладка функція, $\omega = -\frac{k}{4(k+1)} \overrightarrow{\lambda}^{\perp} \overrightarrow{x}, w = -\frac{k}{4(k+1)} \overrightarrow{\lambda} \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{\lambda}^{\perp} = (-\lambda_2, \lambda_1)$ – вектор, перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{\lambda}$.

Врахувавши (1.5), із (1.84) маємо

$$\xi^2_1 = e^w \dot{\psi}. \tag{1.85}$$

Із сумісності системи (1.84),(1.85) випливає, що

$$\ddot{\psi} + \psi = 0. \tag{1.86}$$

Загальним розв'язком рівняння (1.86) є

$$\psi = c_1 \cos\omega + c_2 \sin\omega,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі. Тоді

$$\begin{aligned} \xi^1_1 &= e^w(c_1 \cos\omega + c_2 \sin\omega), \\ \xi^1_2 &= e^w(c_1 \sin\omega - c_2 \cos\omega). \end{aligned} \tag{1.87}$$

Використавши формули (1.5), отримаємо також

$$\begin{aligned} \xi^2_1 &= e^w(-c_1 \sin\omega + c_2 \cos\omega), \\ \xi^2_2 &= e^w(c_1 \cos\omega + c_2 \sin\omega). \end{aligned} \tag{1.88}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (1.87), (1.88) є такі функції

$$\xi^1 = -\frac{4(k+1)}{k\overrightarrow{\lambda}^2}e^w(\overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{c}\cos\omega + \overrightarrow{\lambda}^{\perp}\overrightarrow{c}\sin\omega) + d_1, \qquad (1.89)$$

$$\xi^2 = -\frac{4(k+1)}{k\overrightarrow{\lambda}^2}e^w(\overrightarrow{\lambda}^{\perp}\overrightarrow{c}\cos\omega - \overrightarrow{\lambda}\overrightarrow{c}\sin\omega) + d_2, \qquad (1.90)$$

де $d_1,\ d_2$ – сталі інтегрування.

При $\lambda_4 = 0$ загальним розв'язком останнього рівняння (1.80) є функція

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0. \qquad (1.91)$$

Із (1.9) з урахуванням (1.91) отримаємо

$$\eta = [\frac{2}{k}e^w(c_1\cos\omega + c_2\sin\omega) - c_0)]u. \qquad (1.92)$$

Рівняння (1.79) заміною

$$\begin{gathered}\frac{\vec{\lambda}^2k^2}{16(k+1)^2}x_0 \longrightarrow x_0,\ \frac{k}{4(k+1)}\lambda_a x_a \longrightarrow x_1,\\ \frac{k}{4(k+1)}\lambda_a^{\perp}x_a \longrightarrow x_2,\ u \longrightarrow u\end{gathered} \qquad (1.93)$$

зводиться до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^ku_a) + 4\frac{k+1}{k}u^ku_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}. \qquad (1.94)$$

Формули (1.86), (1.89), (1.91), (1.92) із урахуванням заміни (1.93) задають таку максимальну алгебру рівняння (1.1):

$$< \partial_0,\ \partial_a,\ Q_1,\ Q_2,\ D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u >,$$

іншими словами, це випадок 26 із табл. 1.2.

4) $4(k+1)\lambda_3 = \overrightarrow{\lambda}^2, \lambda_4 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (1.12) $\lambda_4 = \pm 1$).

Із останнього рівняння (1.80) отримаємо

$$\xi^0 = c_0e^{\mp kx_0} + d_0. \qquad (1.95)$$

Із (1.9), урахувавши (1.89) і (1.95), маємо

$$\eta = [\frac{2}{k}e^{w}(c_1\cos\omega + c_2\sin\omega) - c_0 e^{\mp kx_0})]u. \qquad (1.96)$$

Рівняння (1.79) заміною (1.93) зводиться до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\frac{k+1}{k}u^k u_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1} \pm u. \qquad (1.97)$$

Формули (1.86), (1.89), (1.91), (1.96) із урахуванням заміни (1.93) задають алгебру

$$< \partial_0,\ \partial_a,\ Q_a,\ T >,$$

що збігається з випадком 27 табл. 1.2.

Нехай

$$f^0 = 1,\ f^a = \lambda_a u,\ h = ru + \lambda_3.$$

Запишемо рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи для розглядуваного випадку:

$$\begin{gathered}
\xi^0_0 = 2\xi^1_1,\\
(au+b)\lambda_a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b u - 2a_a - \xi^a_0,\\
\lambda_3(au+b) = (a - \xi^0_0)(ru + \lambda_3) - \triangle au - \triangle b -\\
-(a_a u + b_a)\lambda_a u + a_0 u + b_0.
\end{gathered} \qquad (1.98)$$

Розчепивши систему (1.98) за різними степенями функції u, отримаємо

$$\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \quad \xi^2_1 = 0, \qquad (1.99)$$

$$a = -\xi^1_1, \qquad (1.100)$$

$$\lambda_a b = -\xi^a_0 - 2a_a, \qquad (1.101)$$

$$\lambda_a a_a = 0, \qquad (1.102)$$

$$a_0 = \lambda_3\xi^0_0 + \lambda_a b_a + \triangle a, \qquad (1.103)$$

$$b_0 = \lambda_3 b - \lambda_4(a - \xi_0^0) + \triangle b. \qquad (1.104)$$

Із (1.99) маємо

$$\xi^0 = 2A(x_0), \qquad (1.105)$$

$$\xi^a = \dot{A}(x_0)x_a + B^a(x_0). \qquad (1.106)$$

Урахувавши (1.105), із рівняння (1.100) одержимо

$$a = -\dot{A}(x_0), \qquad (1.107)$$

а з (1.101) –

$$b = -\frac{1}{\overrightarrow{\lambda}^2}\lambda_a \xi_0^a. \qquad (1.108)$$

Із урахуванням (1.107) з (1.108) отримаємо $\ddot{A} = 0$. Тоді

$$A = c_1 x_0 + \frac{d_0}{2}. \qquad (1.109)$$

Використавши (1.109), із (1.105) та (1.106) знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \qquad (1.110)$$

$$a = -c_1, \qquad (1.111)$$

$$\xi^a = c_1 x_a + B^a(x_0). \qquad (1.112)$$

Із формул (1.112), (1.108) отримаємо

$$b = -\frac{1}{\overrightarrow{\lambda}^2}\lambda_a \dot{B}^a. \qquad (1.113)$$

Продиференціювавши (1.113) за x_a, маємо

$$b_a = 0. \qquad (1.114)$$

За допомогою формул (1.114), (1.111) та (1.103) отримаємо умови

$$rc_1 = 0. \qquad (1.115)$$

Нехай $r = \pm 1$. Із (1.115) одержимо

$$c_1 = 0. \qquad (1.116)$$

Урахувавши (1.116), із системи (1.110)–(1.112) маємо

$$a = 0, \tag{1.117}$$

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^a = B^a(x_0). \tag{1.118}$$

Із рівнянь (1.104), (1.113) отримаємо

$$\lambda_a B^a = c_2 + c_3 \overrightarrow{\lambda}^2 e^{\pm x_0},$$

$$b = -c_3 e^{\pm x_0}. \tag{1.119}$$

Тоді

$$\eta = -c_3 e^{\mp x_0}. \tag{1.120}$$

Із урахуванням (1.119) з (1.101) маємо

$$\xi^a = \pm \lambda_a c_3 e^{\pm x_0} + d_a. \tag{1.121}$$

Неважко переконатися, що інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.118), (1.121), (1.120) породжує алгебру

$$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{H} >,$$

тобто справедливий випадок 28 табл. 1.2.

Нехай

$$\lambda_3 = 0. \tag{1.122}$$

Урахувавши (1.122), (1.114), із (1.104) отримаємо

$$\lambda_a B^a = -r \frac{3 \overrightarrow{\lambda}^2 c_1}{2} x_0^2 + c_2 \overrightarrow{\lambda}^2 x_0 + c_3. \tag{1.123}$$

Використавши (1.123) та (1.113), знаходимо

$$b = -3 r c_1 x_0 + c_2, \tag{1.124}$$

тоді, скориставшись (1.112) та (1.101), одержимо

$$B^a = \lambda_a (-r \frac{3c_1}{2} x_0^2 + c_2 \overrightarrow{\lambda}^2 x_0) + d_a. \tag{1.125}$$

Із (1.112), (1.125) отримаємо

$$\xi^a = c_1 x_0 + \lambda_a(-r\frac{3c_1}{2}x_0^2 + c_2\overrightarrow{\lambda}^2 x_0) + d_a, \qquad (1.126)$$

а з рівнянь (1.111), (1.124) –

$$\eta = -c_1 u - 3rc_1 x_0 + c_2. \qquad (1.127)$$

Тобто інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.110), (1.126), (1.127) породжує таку алгебру інваріантності:

$$< \partial_0, \partial_a, D - \partial_u - \frac{3}{4}rx_0(\mathcal{G} - 2\partial_u), \mathcal{G} > .$$

Іншими словами, справедливий випадок 29 табл. 1.2.

Нехай $f^0 = 1,\ f^a = \lambda_a \ln u,\ h = (\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)u.$

Підставивши ці функції у рівняння (1.6)–(1.8) визначальної системи, одержимо

$$\begin{gathered}
\xi^0_0 = 2\xi^1_1, \\
(au+b)\frac{\lambda_a}{u} = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1\varepsilon_{ab}]\lambda_b \ln u - 2a_a - \xi^a_0, \\
(au+b)(2\lambda_3 \ln u + \lambda_4 + \lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5) = \\
= (a - \xi^0_0)(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)u - \\
-(\triangle au + \triangle b)(a_0 u + b_0) - (a_a u + b_a)\lambda_a \ln u + \\
+a_0 u + b_0.
\end{gathered} \qquad (1.128)$$

Розчепивши систему (1.128) за різними нелінійностями, отримаємо $b = 0$ та

$$\xi^0 = d_0, \qquad (1.129)$$

$$\xi^a = \xi^a(x_0), \qquad (1.130)$$

$$\lambda_a a_a + 2\lambda_3 a = 0, \qquad (1.131)$$

$$2a_a = -\lambda_a a - \xi^a_0, \qquad (1.132)$$

$$-a_0 + \lambda_4 a = -\triangle a. \qquad (1.133)$$

Розв'язок системи (1.129)–(1.133) залежить від сталої λ_3. Можливі такі нееквівалентні випадки:

1) $\lambda_3 \neq 0, \frac{\vec{\lambda}^2}{4}$;

2) $\lambda_3 = 0$;

3) $\lambda_3 = \frac{\vec{\lambda}^2}{4}$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $\lambda_3 \neq 0, \frac{\vec{\lambda}^2}{4}$. Тоді з рівнянь (1.77) отримаємо $a = b = 0$, $\xi^0_0 = \xi^a_0 = \xi^a_b = 0$, що приводить до A^{bas}.

2) $\lambda_3 = 0$. Із (1.131)–(1.133) маємо

$$a = a(x_0), \quad a_0 = \lambda_4 a.$$

Якщо $\lambda_4 = 0$, то з (1.131)–(1.133) одержимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^a = c_1\lambda_a x_0 + d_a, \quad \eta = -c_1 u. \tag{1.134}$$

Інфінітезимальний оператор (1.3) з координатами (1.134) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, G > .$$

Іншими словами, це випадок 30 табл. 1.2.

Якщо $\lambda_4 \neq 0$ (з точністю до перетворень еквівалентності (1.12) $\lambda_4 = \pm 1$), то з (1.131)–(1.133) отримаємо

$$a = \varphi(x_0). \tag{1.135}$$

Використавши (1.132), (1.135), маємо

$$\xi^a_0 = -\lambda_a \varphi. \tag{1.136}$$

Урахувавши (1.131), (1.133), (1.135), одержимо

$$\dot{\varphi} \mp \varphi = 0. \tag{1.137}$$

Із (1.137) отримаємо $\varphi = c_1 e^{\mp x_0}$. Тоді

$$\eta = c_1 e^{\pm x_0} u. \tag{1.138}$$

Із урахуванням (1.138) із (1.136) маємо

$$\xi^a = \mp c_1 \lambda_a e^{\pm x_0} + d_a. \tag{1.139}$$

Тобто інфінітезимальний оператор (1.3) із координатами (1.129), (1.139), (1.138) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, H > .$$

Іншими словами, це випадок 31 табл. 1.2.

3) $\lambda_3 = \frac{\vec{\lambda}^2}{4}$ (із точністю до перетворень еквівалентності (1.12) $\lambda_4 = 0$). Тоді

$$a = \varphi(x_0) e^{-\frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}}. \tag{1.140}$$

Із рівняння (1.132) маємо

$$\xi^a_0 = 0, \tag{1.141}$$

а з (1.141) –

$$\xi^a = d_a. \tag{1.142}$$

Використавши формули (1.140), (1.133), отримаємо

$$\varphi = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4} x_0},$$

тоді

$$a = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4} x_0 - \frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}},$$

звідки

$$\eta = c_1 e^{\frac{\vec{\lambda}^2}{4} x_0 - \frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{x}} u. \tag{1.143}$$

Якщо замість λ_a вибрати $2\lambda_a$, то інфінітезимальний оператор (1.3) з координатами (1.129), (1.142), (1.143) породжує таку алгебру:

$$< \partial_0, \partial_a, Y > .$$

Іншими словами, справедливий випадок 32 із табл. 1.2.

Теорему 1.4 доведено.

1.5. Додаткові перетворення еквівалентності та їх застосування

Крім неперервних перетворень еквівалентності, клас рівнянь (1.1) має також додаткові перетворення еквівалентності. Поставимо задачу: знайти всі можливі невироджені локальні перетворення вигляду

$$y_0 = a(x,u), \quad y_a = b^a(x,u), \quad v = c(x,u), \tag{1.144}$$

які зводять довільне рівняння класу (1.1) до рівняння того самого класу:

$$v_{y_0} = \partial_{y_a}(F^0(v)v_{y_a}) + F^a(v)v_{y_a} + H(v), \tag{1.145}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2), u = u(x), y = (y_0, y_1, y_2), v = v(y), F^0 = F^0(v)$, $F^a = F^a(v), H = H(v)$ – довільні гладкі функції.

Теорема 1.5. *Будь-яке рівняння (1.1) зводиться до (1.145) за допомогою невиродженої локальної підстановки (1.144) тоді і тільки тоді, коли підстановка має вигляд*

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ v = \alpha(x)u + \beta(x), \tag{1.146}$$

причому функції a, b^a, α, β, f^0, f^a, h, F^0, F^a, H *задовольняють такі умови:*

$$\dot{a}\alpha(b^1_1 b^2_2 - b^1_2 b^2_1) \neq 0, \tag{1.147}$$

$$b^2_1 = \pm b^1_2, \tag{1.148}$$

$$b^2_2 = \mp b^1_1, \tag{1.149}$$

$$b^1_a b^1_a f^0(u) = \dot{a}F^0(v), \tag{1.150}$$

$$\begin{gathered} -\frac{2}{\alpha} b^a_b\left(\alpha_b u + \beta_b\right)\dot{f}^0(u) + \left(\triangle a - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b^a_b\right) f^0(u) - \\ -b^a_0 + b^a_b f^b(u) = \dot{a}F^a(v), \end{gathered} \tag{1.151}$$

$$\begin{gathered}\alpha_0 u+\beta_0+\left[\frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u+\beta_a)-(\triangle\alpha u+\triangle\beta)\right]f^0(u)+\\+\frac{1}{\alpha}(\alpha_a u+\beta_a)(\alpha_a u+\beta_a)\dot f^0(u)-\\-(\alpha_a u+\beta_a)f^a(u)+\alpha h(u)=\dot a H(v).\end{gathered}\tag{1.152}$$

Доведення. Для того щоб перетворення (1.146) були невиродженими, якобіан цих перетворень має бути відмінним від нуля:

$$J=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & a_u\\ b_0^1 & b_1^1 & b_2^1 & b_u^1\\ b_0^2 & b_1^2 & b_2^2 & b_u^2\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_u\end{vmatrix}\neq 0.\tag{1.153}$$

Постановка задачі знаходження додаткових перетворень потребує виконання такої умови

$$\begin{gathered}u_0-\partial_a(f^0(u)u_a)-f^a(u)u_a-h(u)-\\-\lambda[v_{y_0}-\partial_{y_a}(F^0(v)v_{y_a})-F^a(v)v_{y_a}-H(v)]=0,\end{gathered}\tag{1.154}$$

де $\lambda=\lambda(x,u)$ – функція, яка підлягає визначенню. Як бачимо з (1.154), необхідно задати зв'язок між похідними функцій u та v. Одержимо такі формули:

$$u_0=-\frac{v_{y_0}a_0+v_{y_a}b_0^a-c_0}{\sigma},\tag{1.155}$$

$$u_a=-\frac{v_{y_0}a_a+v_{y_b}b_a^b-c_a}{\sigma},\tag{1.156}$$

$$\begin{gathered}u_{ab}=-\frac{1}{\sigma}[(a_a+a_u u_a)(a_b+a_u u_b)v_{y_0y_0}+\\+2(a_a+a_u u_a)(b_b^c+b_u^c u_b)v_{y_0y_c}+\\+(b_a^c+b_u^c u_a)(b_b^d+b_u^d u_b)v_{y_c}v_{y_d}+\\+(a_{ab}+a_{au}u_b+a_{bu}u_a+a_{uu}u_a u_b)v_{y_0}-\\-(b_{ab}^c+b_{au}^c u_b+b_{bu}^c u_a+b_{uu}^c u_a u_b)v_{y_c}-\\-(c_{ab}+c_{au}u_b+c_{bu}u_a+c_{uu}u_a u_b)],\end{gathered}\tag{1.157}$$

де $\sigma = v_{y_0}a_u + v_{y_a}b^a_u - c_u$, $u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a}$, $v_{y_a} = \frac{\partial v}{\partial y_a}$, $u_{ab} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_a x_b}$, $v_{y_a y_b} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_a y_b}$.

Урахувавши, що в рівнянні (1.145) повинні бути відсутні похідні $v_{y_0y_0}$, $v_{y_0y_a}$, $v_{y_1y_2}$, а також коефіцієнти біля $v_{y_1y_1}$, $v_{y_2y_2}$ повинні бути рівними, отримаємо

$$a_a + a_u u_a = 0, \tag{1.158}$$

$$\left(b^1_a + b^1_u u_a\right)\left(b^2_a + b^2_u u_a\right) = 0, \tag{1.159}$$

$$\left(b^1_a + b^1_u u_a\right)\left(b^1_a + b^1_u u_a\right) = \left(b^2_a + b^2_u u_a\right)\left(b^2_a + b^2_u u_a\right). \tag{1.160}$$

Проаналізувавши (1.158)–(1.160), одержимо

$$a_a = a_u = 0, \tag{1.161}$$

$$b^1_a b^2_a = 0, \tag{1.162}$$

$$b^1_a b^2_u + b^1_u b^2_a = 0, \tag{1.163}$$

$$b^1_a b^1_a = b^2_a b^2_a, \tag{1.164}$$

$$b^1_a b^1_u = b^2_a b^2_u,\ b^1_u b^2_u = 0,\ (b^1_u)^2 = (b^2_u)^2.$$

Із умов (1.163), (1.164) випливає

$$b^1_u = b^2_u = 0. \tag{1.165}$$

На підставі рівнянь (1.161), (1.165) отримаємо

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ v = c(x,u). \tag{1.166}$$

Урахувавши (1.161), (1.165) із (1.155)–(1.157) маємо

$$u_0 = \frac{1}{c_u}(\dot{a}v_{y_0} + b^a_0 v_{y_a} - c_0), \tag{1.167}$$

$$u_a = \frac{1}{c_u}(b^b_a v_{y_b} - c_a), \tag{1.168}$$

$$\begin{aligned}\triangle u = \frac{1}{c_u}\Bigg[& b^1_a b^1_a \triangle v - \frac{c_{uu}}{c_u^2} b^c_a b^d_a v_{y_c} v_{y_d} + \\ & + \left(\triangle b^c - \frac{2c_{au}}{c_u} b^c_a + 2\frac{c_{uu}}{c_u^2} b^c_a c_a\right) v_{y_c} + 2\frac{c_{au}}{c_u} c_a - \frac{c_{uu}}{c_u^2} c_a c_a - \triangle c\Bigg].\end{aligned} \tag{1.169}$$

Підставивши (1.167)–(1.169) у (1.154) та розчепивши за похідними функції v, одержимо $\lambda = \frac{\dot{a}}{c_u}$ та

$$c_{uu} = 0, \tag{1.170}$$

$$b_a^1 b_a^1 f^0(u) = \dot{a} F^0(v), \tag{1.171}$$

$$\begin{gathered}
-\frac{2}{\alpha} b_b^a(\alpha_b u + \beta_b)\dot{f}^0(u) + \left(\triangle a - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a\right) f^0(u) - \\
-b_0^a + b_b^a f^b(u) = \dot{a} F^a(v),
\end{gathered} \tag{1.172}$$

$$\begin{gathered}
\alpha_0 u + \beta_0 + \left[\frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle \alpha u + \triangle \beta)\right] f^0(u) + \\
+\frac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0(u) - \\
-(\alpha_a u + \beta_a) f^a(u) + \alpha h(u) = \dot{a} H(v).
\end{gathered} \tag{1.173}$$

Взявши до уваги (1.161), (1.165), із (1.153), маємо

$$\dot{a}\alpha(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \neq 0. \tag{1.174}$$

Використавши (1.170), із (1.166), знаходимо

$$y_0 = a(x_0),\ y_a = b^a(x),\ w = \alpha(x)u + \beta(x). \tag{1.175}$$

Урахувавши (1.175) із (1.174), (1.172), (1.173), отримаємо (1.147), (1.151), (1.152).

Отже, підстановка (1.175) має задовольняти такі умови (1.147), (1.162), (1.164), (1.171), (1.151), (1.152).

Теорему 1.5 доведено.

Застосуємо результати теореми 1.5 для знаходження перетворень, які зводять рівняння з табл. 1.2 до інших рівнянь цієї таблиці. Справедливе таке твердження.

Теорема 1.6. *Усі рівняння табл. 1.2, які за допомогою локальних перетворень можна звести до інших рівнянь цієї самої таблиці, наведені в табл. 1.3.*

Таблиця 1.3. Спрощення рівняння (1.1) за допомогою додаткових перетворень еквівалентності

№	Вигляд рівняння до спрощення	Зв'язок	Вигляд рівняння після спрощення
1	$u_0 = \triangle u \pm 1$	$y_0 = x_0, y_a = x_a,$ $v = u \pm x_0$	$v_{y_0} = \triangle v$
2	$u_0 = \triangle u \pm u$	$y_0 = x_0, y_a = x_a,$ $v = e^{\pm x_0} u$	$v_{y_0} = \triangle v$
3	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) \pm$ $\pm 1 + re^u$	$y_0 = \pm e^{\pm x_0},$ $y_a = x_a,$ $v = u \pm x_0$	$v_{y_0} = \partial_{y_a}(e^v v_{y_a}) +$ $+ re^v$
4	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ ru^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm k x_0}}{k},$ $y_a = x_a,$ $v = e^{\pm x_0} u$	$v_{y_0} = \partial_{y_a}(v^k v_{y_a}) +$ $+ rv^{k+1}$
5	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) +$ $+ e^u \lambda_a u_a + re^u \pm 1$	$y_0 = \pm e^{\pm x_0},$ $y_a = x_a,$ $v = u \pm x_0$	$v_{y_0} = \partial_{y_a}(e^v v_{y_a}) +$ $+ e^v \lambda_a v_{y_a} + re^v$
6	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ u^k \lambda_a u_a +$ $+ ru^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm k x_0}}{k},$ $y_a = x_a,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_{y_0} = \partial_{y_a}(v^k v_{y_a}) +$ $+ v^k \lambda_a v_{y_a} + rv^{k+1}$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) +$ $+ 4\frac{k+1}{k} u^k u_1 +$ $+ 4\frac{k+1}{k^2} u^{k+1} \pm u$	$y_0 = \pm \frac{e^{\pm k x_0}}{k},$ $y_a = x_a,$ $v = e^{\pm x_0} u$	$v_{y_0} = \partial_{y_a}(v^k v_{y_a}) +$ $+ 4\frac{k+1}{k} v^k v_1 +$ $+ 4\frac{k+1}{k^2} v^{k+1}$
8	$u_0 = \triangle u +$ $+ u \lambda_a u_a \pm 1$	$y_0 = x_0,$ $y_a = x_a \pm \frac{1}{2} \lambda_a x_0^2,$ $v = u \pm x_0$	$v_{y_0} = \triangle v + v \lambda_a v_{y_a}$
9	$u_0 = \triangle u +$ $+ \ln u \lambda_a u_a \pm u$	$y_0 = x_0,$ $y_a = x_a \pm \frac{1}{2} \lambda_a x_0^2,$ $v = e^{\mp x_0} u$	$v_{y_0} = \triangle v + \ln v \lambda_a v_{y_a}$

Доведення. Як випливає з умов (1.150), (1.151), для того щоб рівняння з другої колонки табл. 1.3 за допомогою додаткових перетворень еквівалентності зводилися до рівнянь із четвертої колонки цієї самої таблиці, необхідно, щоб їх максимальні алгебри інваріантності мали однакові розмірності, а функції f^0, F^0 та f^a, F^a належали до одного класу. Знайдемо додаткові перетворення, що зводять рівняння з другої колонки до рівнянь четвертої колонки табл. 1.3.

Результати пунктів 1–4 табл. 1.3 отримані іншими авторами (див., наприклад, [63]), тому детально зупинимося на доведенні пунктів 5–9.

Розглянемо рівняння з пункту 20 табл. 1.2

$$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + e^u \lambda_a u_a + re^u \pm 1. \tag{1.176}$$

Його МАІ складається з 4-х базових операторів

$$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{T} > .$$

МАІ рівняння

$$v_0 = \partial_a(e^v v_a) + e^v \lambda_a v_a \pm 1, \tag{1.177}$$

одержаного з рівняння пункту 19 табл. 1.2 при $p = 0$, також 4-х вимірна. Її базові генератори мають вигляд

$$< \partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 > .$$

За допомогою теореми 1.5 побудуємо заміну, яка зводить рівняння (1.176) до вигляду (1.177). Умова (1.150) буде такою

$$b^1_a b^1_a e^u = \dot{a} e^{\alpha u + \beta}. \tag{1.178}$$

Із рівняння (1.178) отримаємо, що

$$\alpha = 1, \quad b^1_a b^1_a = \dot{a} e^{\beta}. \tag{1.179}$$

Розглянемо частинний випадок $b^a = x_a$. Тоді з (1.179) випливає

$$\beta = -\ln \dot{a}, \tag{1.180}$$

Іншими словами, $\beta = \beta(x_0)$.

Умова (1.151) виконується тотожно, а з умови (1.152) знаходимо $\beta = \mp x_0$. Із рівняння (1.180) отримуємо $a = \pm e^{\pm x_0}$.

Отже, заміна, яка зводить рівняння (1.176) до рівняння (1.177), набуває вигляду

$$y_0 = \pm e^{\pm x_0},\ y_a = x_a,\ v = u \mp x_0. \tag{1.181}$$

Встановимо додаткові перетворення еквівалентності, які зводять рівняння

$$u_0 = \partial_a \left(u^k u_a\right) + u^k \lambda_a u_a + r u^{k+1} \pm u \tag{1.182}$$

до рівняння

$$v_{y_0} = \partial_{y_a} \left(v^k v_{y_a}\right) + v^k \lambda_a v_{y_a} + r v^{k+1}. \tag{1.183}$$

У цьому випадку рівняння (1.150)–(1.152) набудуть вигляду

$$b_a^1 b_a^1 u^k = \dot{a} v^k, \tag{1.184}$$

$$\begin{gathered} -\frac{2}{\alpha} b_b^a (\alpha_b u + \beta_b) k u^{k-1} + \left(\triangle b - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a\right) u^k - b_0^a + \\ + b_b^a \lambda_b u^k = \dot{a} \lambda_a v^k, \end{gathered} \tag{1.185}$$

$$\begin{gathered} \alpha_0 u + \beta_0 + \left[\frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle\alpha u + \triangle\beta)\right] u^k + \\ + \frac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a) k u^{k-1} - \\ -(\alpha_a u + \beta_a)\lambda_b u^k + \alpha r u^{k+1} \pm u = \dot{a} r v^{k+1}. \end{gathered} \tag{1.186}$$

Одним із розв'язків (1.148)–(1.149) є

$$b^a = x_a. \tag{1.187}$$

Урахувавши (1.147), (1.187), із (1.184) маємо

$$\alpha^k \dot{a} = 1, \tag{1.188}$$

$$\beta = 0. \tag{1.189}$$

Із рівнянь (1.187), (1.188),

$$\dot{a} = \alpha^{-k}. \tag{1.190}$$

Взявши до уваги (1.187), (1.189), (1.190), із (1.186) отримаємо

$$\alpha_0 \pm \alpha = 0. \tag{1.191}$$

Із (1.190), (1.191) маємо

$$\alpha = e^{\pm x_0}. \tag{1.192}$$

Урахувавши (1.192), із (1.190) одержимо $a = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k}$.

Отже, маємо локальну підстановку

$$y_0 = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k}, \quad y_a = x_a, \quad v = e^{\mp x_0} u,$$

яка зводить рівняння (1.182) до вигляду (1.183).

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\frac{k+1}{k} u^k u_1 + 4\frac{k+1}{k^2} u^{k+1} \pm u \tag{1.193}$$

до рівняння

$$v_0 = \partial_a(v^k v_a) + 4\frac{k+1}{k} v^k v_1 + 4\frac{k+1}{k^2} v^{k+1}. \tag{1.194}$$

Підставивши значення функцій f^0, f^a, h, F^0, F^a, H із рівнянь (1.193), (1.194) у систему (1.150)–(1.152), урахувавши при цьому (1.146), (1.187), після розщеплення за різними степенями змінної u, одержимо систему

$$\dot{a} = \alpha^k, \ \beta = 0, \ \alpha_0 = \pm\alpha. \tag{1.195}$$

Неважко переконатися, що одним із розв'язків системи (1.195) є функції

$$a = \pm \frac{e^{\pm kx_0}}{k}, \ b = x_a, \ \alpha = e^{\pm x_0}, \ \beta = 0,$$

які визначають пертворення

$$y_0 = \pm \frac{e^{\pm k x_0}}{k},\ y_a = x_a,\ w = e^{\pm x_0} u,$$

що зводять рівняння (1.193) до вигляду (1.194). Одержаний результат доводить сьомий випадок табл. 1.3.

Встановимо додаткові перетворення еквівалентності, які зводять рівняння

$$u_0 = \triangle u + u \lambda_a u_a \pm 1 \tag{1.196}$$

до рівняння

$$v_0 = \triangle v + v \lambda_a v_a. \tag{1.197}$$

У цьому випадку рівняння (1.150)–(1.152) будуть такі

$$b_a^1 b_a^1 = \dot{a}, \tag{1.198}$$

$$\triangle b - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a - b_0^a + b_b^a \lambda_b u = \dot{a}\lambda_a(\alpha u + \beta),$$

$$\alpha_0 u + \beta_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle \alpha u + \triangle \beta) -$$
$$-(\alpha_a u + \beta_a)\lambda_a u + \alpha r = 0.$$

Розчепивши систему (1.198)–(1.165) за різними степенями функції u, одержимо систему

$$\begin{gathered} b_a^1 b_a^1 = \dot{a},\ b_b^a \lambda_b = \lambda_a \alpha \dot{a},\ \lambda_a \alpha_a = 0, \\ \triangle b - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a - b_0^a = \lambda_a \beta \dot{a}, \\ \alpha_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a \alpha_a - \triangle \alpha - \lambda_a \beta_a = 0, \\ \beta_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a \beta_a - \triangle \beta + \alpha r = 0. \end{gathered} \tag{1.199}$$

Одним із розв'язків системи (1.199) є функції

$$a = x_0,\ b^a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ \alpha = 1,\ \beta = \mp x_0, \tag{1.200}$$

які визначають перетворення

$$y_0 = x_0,\ y_a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ v = u \mp x_0.$$

Іншими словами, це випадок 8 із табл. 1.3.

Знайдемо підстановку, яка зводить рівняння

$$u_0 = \triangle u + \ln u \lambda_a u_a \pm u \tag{1.201}$$

до рівняння

$$v_0 = \triangle \ln v + v \lambda_a v_a. \tag{1.202}$$

Підставивши функції

$$\begin{gathered} f^0(u) = 1,\ f^a(u) = \lambda_a \ln u,\ h(u) = \pm u, \\ F^0(v) = 1,\ F^a(v) = \lambda_a \ln v,\ H(v) = 0 \end{gathered} \tag{1.203}$$

у систему (1.147)–(1.152) та розчепивши одержані рівняння за різними нелінійностями змінної u, одержимо

$$\begin{gathered} b^1_a b^1_a = \dot{a},\ \beta = 0,\ \lambda_a \alpha_a = 0,\ \lambda_a \dot{a} = \lambda_b b^a_b, \\ b^a_0 = -\frac{2}{\alpha}\lambda_b b^a_b - \lambda_a \dot{a} \ln \alpha,\ \alpha_0 + \frac{2}{\alpha}\alpha_a \alpha_a - \triangle \alpha \pm \alpha = 0. \end{gathered} \tag{1.204}$$

Неважко переконатися, що функції

$$a = x_0,\ b^a = x_a \pm \frac{1}{2}\lambda_a x_0^2,\ \alpha = e^{\mp x_0},\ \beta = 0 \tag{1.205}$$

є одним із розв'язків системи (1.204). Іншими словами, це випадок 9 із табл. 1.3.

Теорему 1.6 доведено.

Зазначимо, що усі інші рівняння з табл. 1.2 є локально нееквівалентними.

Таким чином, з урахуванням результатів табл. 1.3 одержуємо, що групову класифікацію локально нееквівалентних рівнянь (1.1) можна навести у вигляді таблиці (табл. 1.4).

Таблиця 1.4. Групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (1.1)

№	Рівняння	MAI	Умови
1	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + h(u)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}$	$f^0, h - \forall$
2	$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D$	$f^0 - \forall$
3	$u_0 = \triangle u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, G_a,$ Q, D, Π, Q_∞	
4	$u_0 = \triangle u \pm u \ln u$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, \widehat{Q}, H_a$	
5	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D, \mathcal{D}_0$	$s = 1$
6	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a) \pm e^{mu}$	$\partial_0, \partial_a, J_{12},$ $(s-m)D - 2\mathcal{D}_0$	$m \neq 0$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D, D_0$	$k \neq -1;0$
8	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) \pm u^m$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, 2D_0-$ $-(k-m+1)D$	$k \neq -1;0$ $m \neq 1$
9	$u_0 = \partial_a(u^{-1} u_a)$	$\partial_0, \partial_a, J_{12}, D_0, X_\infty$	$k = -1$
10	$u_0 = \partial_a(e^{su} u_a)+$ $+\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u) u_a+$ $+re^{(2m-s)u}$	$\partial_0, \partial_a,$ $(m-s)D+$ $+\mathcal{D}_0 + pJ_{12}$	$m \neq s$ $(m,p) \neq$ $\neq (0,0)$
11	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)+$ $+\lambda_a u u_a + re^{-u}$	$\partial_0, \partial_a, D-$ $-\mathcal{D}_0 - x_0 \lambda_a \partial_a$	$s = 1$
12	$u_0 = \partial_a(e^u u_a)+$ $+\lambda_b e^u K_{ab}(u) u_a + re^u$	$\partial_0, \partial_a,$ $\mathcal{D}_0 + pJ_{12}$	$s = 1$
13	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u) u_a+$ $+ru^{2m-k+1}$	$\partial_0,\partial_a,(m-k)D+$ $+D_0 + pJ_{12}$	$m \neq k,$ $(m,p) \neq$ $\neq (0,0)$
14	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+\ln u \lambda_a u_a + ru^{-k+1}$	$\partial_0, \partial_a, kD-$ $-D_0 - x_0 \lambda_a \partial_a$	$k \neq 0$
15	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + ru^{k+1}+$ $+\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u) u_a$	$\partial_0, \partial_a,$ $D_0 + pJ_{12}$	$k \neq 0,$ $p \neq 0$
16	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+u^k \lambda_a u_a + \lambda_3 u^{k+1}$	$\partial_0, \partial_a, D_0$	$k \neq 0,$ $k^2 \lambda_3 \neq$

№	Рівняння	MAI	Умови
			$\neq 4(k+1)$
17	$u_0 = \partial_a(u^k u_a)+$ $+4\frac{k+1}{k^2}u^k\,(ku_1+u)$	$\partial_0, \partial_a, D_0, Q_a$	$k \neq -1;0$
18	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a \pm u$	$\partial_0, \partial_a, \mathcal{G}_a$	
19	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a$	$\partial_0, \partial_a, D - u\partial_u, \mathcal{G}$	
20	$u_0 = \triangle u + \ln u\lambda_a u_a$	$\partial_0, \partial_a, G$	
21	$u_0 = \triangle u+$ $+\ln u\lambda_a u_a \pm u\ln u$	$\partial_0, \partial_a, H$	
22	$u_0 = \triangle u \pm \ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2 u(\ln^2 u + q)$	$\partial_0, \partial_a, Y$	

1.6. Лiївськi анзаци, редукцiя та точнi розв'язки

Лiївськi симетрiї рiвняння (1.1) можна використати для побудови iнварiантних анзацiв, проведення редукцiї та знаходження точних розв'язкiв даного рiвняння.

Розв'яжемо цю задачу, наприклад, для рiвняння пункту 17 iз табл. 1.4:

$$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + 4\frac{k+1}{k^2}u^k\,(ku_1+u)\,, k \neq -1; 0. \qquad (1.206)$$

Серед рiвнянь (1.1) iз ненульовим конвективним доданком це рiвняння володiє найширшим класом симетрiї. Його максимальна алгебра iнварiантностi задається такими операторами:

$$<\partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D_0,\ Q_1,\ Q_2> .$$

Проведемо редукцiю рiвняння (1.206) до рiвняння з меншою кiлькiстю змiнних, використовуючи загальний вигляд оператора iнварiантностi

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \qquad (1.207)$$

Один із анзаців (див., наприклад, [80]) за умови $c_0 = d_0 = d_1 = 0$, отриманий за допомогою оператора (1.207), набуває вигляду

$$u = e^{-\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0, \omega),\ \omega = \sin x_2 e^{x_1} + me^{2x_1}. \tag{1.208}$$

Цей анзац редукує рівняння (1.206) до диференціального рівняння

$$\varphi_0 = (4m\omega + 1)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 4m\varphi^k\varphi_\omega.$$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\varphi_0 = \partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega). \tag{1.209}$$

Теорема 1.7. *[39] Максимальною алгеброю інваріантності диференціального рівняння (1.209) є алгебра*

$$< \partial_0,\ \partial_\omega,\ D = 2x_0\partial_0 + \omega\partial_\omega,\ D_0 = kx_0\partial_0 - \varphi\partial_\varphi >, \tag{1.210}$$

якщо $k \neq -\frac{4}{3}$;

$$\begin{gathered} < \partial_0,\, \partial_\omega,\, D_0 = 4x_0\partial_0 + 3\varphi\partial_\varphi,\, D_1 = 2\omega\partial_\omega - 3\varphi\partial_\varphi, \\ K = \omega^2\partial_\omega - 3\omega\varphi\partial_\varphi >, \end{gathered} \tag{1.211}$$

якщо $k = -\frac{4}{3}$.

Використаємо ліївську симетрію рівняння (1.209) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків (див., [88]).

Наведемо вигляд кількох нееквівалентних анзаців, що отримуються у випадку $k \neq -\frac{4}{3}$:

$$\begin{gathered} \varphi = \psi(y),\ y = \omega + px_0, \\ \varphi = x_0^{-\frac{1}{k}}\psi(y),\ y = \omega + p\ln x_0, \\ \varphi = e^{-\frac{2p}{k}x_0}\psi(y),\ y = e^{px_0}\omega, \\ \varphi = x_0^{-\frac{1+2p}{k}}\psi(y),\ y = x_0^p\omega, \end{gathered} \tag{1.212}$$

де $p \neq 0$ – довільний параметр, що виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище інваріантні анзаци підставити у рівняння (1.209). Як наслідок отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$
\begin{gathered}
\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y = 0,\\
\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y - \frac{1}{k}\psi = 0,\\
\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \frac{2m}{k}\psi = 0,\\
\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \frac{2m+1}{k}\psi = 0.
\end{gathered}
\tag{1.213}
$$

Частинними розв'язками першого з редукованих рівнянь (1.213) є функції

$$
\begin{gathered}
\psi = (pky + c)^{\frac{1}{k}},\ k \neq 0,\\
\psi = -\tanh^2\left(\frac{p}{2}y + c\right),\ k = -\frac{1}{2},\\
\psi = \tan^2\left(\frac{p}{2}y + c\right),\ k = -\frac{1}{2},\\
\tanh^{-1}(\psi^{\frac{1}{4}}) + \tan^{-1}(\psi^{\frac{1}{4}}) = -\frac{p}{2}y + c,\ k = -\frac{3}{4},
\end{gathered}
\tag{1.214}
$$

де c – довільна стала.

Перший анзац із (1.212) та розв'язки (1.214), дозволили знайти розв'язки рівняння (1.206):

$$
\begin{gathered}
u = \left[(c + pk^2x_0)e^{-2x_1} - pke^{-x_1}\sin x_2\right]^{\frac{1}{k}}, k \neq 0,\\
u = -e^{4x_1}\tanh^2[\frac{p}{2}(-e^{-x_1}\sin x_2 + px_0) + c],\ k = -\frac{1}{2},\\
u = e^{4x_1}\tan^2[\frac{p}{2}(-e^{-x_1}\sin x_2 + px_0) + c],\ k = -\frac{1}{2},\\
\tanh^{-1}\left(e^{-\frac{2}{3}x_1}u^{\frac{1}{4}}\right) + \tan^{-1}\left(e^{-\frac{2}{3}x_1}u^{\frac{1}{4}}\right) =\\
= \frac{p}{2}(e^{-x_1}\sin x_2 - px_0) + c,\ k = -\frac{3}{4}.
\end{gathered}
$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1.209) при $k = -\frac{4}{3}$ є алгебра (1.211). Не вдаючись у деталі, наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, відмінних від (1.212), що породжуються цією алгеброю:

$$\varphi = |\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y),\ r \in \{-1, 0, 1\},$$
$$y = \begin{cases} \tanh^{-1}\omega + px_0,\ r = -1, \\ \frac{1}{\omega} + px_0,\ r = 0, \\ \tan^{-1}\omega + px_0,\ r = 1, \end{cases} \tag{1.215}$$

$$\varphi = x_0^{\frac{3}{4}}|\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y),\ r \in \{-1, 0, 1\},$$
$$y = \begin{cases} \tanh^{-1}\omega + p\ln x_0,\ r = -1, \\ \frac{1}{\omega} + p\ln x_0,\ r = 0, \\ \tan^{-1}\omega + p\ln x_0,\ r = 1, \end{cases} \tag{1.216}$$

де $p \neq 0$ – довільний параметр, який виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ c_2,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (1.209). Як наслідок, отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + 3r\psi^{-\frac{1}{3}}, \tag{1.217}$$

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + \left(\frac{3}{4}\psi^{\frac{4}{3}} + 3r\right)\psi^{-\frac{1}{3}}. \tag{1.218}$$

Загальний розв'язок рівняння (1.217) при $r = 0$ набуває вигляду

$$\frac{3}{\sqrt[3]{c_1\psi}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 + c_1\psi}{(1 + \sqrt[3]{c_1\psi})^3} + \\ + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt[3]{c_1\psi} - 1)\right) = c_2 - \frac{py}{c_1} \tag{1.219}$$

при $c_1 \neq 0$, та

$$\psi = \left(-\frac{4}{3}py + c_2\right)^{-\frac{3}{4}} \tag{1.220}$$

при $c_1 = 0$.

Один із розв'язків рівняння (1.218) при $r = -1$ є таким

$$\psi = 4^{\frac{3}{4}}. \tag{1.221}$$

Використавши формули (1.208), (1.215), (1.216), знаходимо розв'язки рівняння (1.206) при $-\frac{4}{3}$:

$$-3\Phi + \frac{1}{2}\ln\frac{\Phi^3+1}{(\Phi+1)^3} - \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2\Phi-1}{\sqrt{3}} =$$
$$= (c_1)^{-\frac{4}{3}}\left[p(-\frac{1}{e^{-x_1}\sin x_2} + px_0) + c_2\right],$$

де

$$\Phi = -\frac{e^{\frac{3}{2}x_1}}{\sqrt[3]{c_1 u}\sin x_2},\ c_1 \neq 0,$$

$$u = \left[\frac{4}{3}pe^{5x_1}\sin^3 x_2(1 + (px_0 + c_2)e^{x_1}\sin x_2)\right]^{-\frac{3}{4}}, \tag{1.222}$$

$$u = \left(\frac{e^{x_1}\sin^2 x_2 - e^{-x_1}}{2\sqrt{x_0}}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

За умови $c_0 = d_0 = d_2 = 0$ за допомогою оператора (1.207) отримаємо анзац

$$u = (\sin x_2)^{\frac{2}{k}}\varphi(x_0, \omega),\ \omega = \frac{e^{x_1} + m\cos x_2}{\sin x_2}, \tag{1.223}$$

який редукує рівняння (1.206)) до диференціального рівняння

$$(m^2 + \omega^2)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 2\frac{k+2}{k^2}\left(-k\omega\varphi^k\varphi_\omega + \varphi^{k+1}\right) = \varphi_0.$$

Припустивши, що $k = -2$, одержимо рівняння

$$(m^2 + \omega^2)(\varphi^{-2}\varphi_\omega)_\omega = \varphi_0. \tag{1.224}$$

Розв'язком редукованого рівняння (1.224) (див. [18], рівняння 6.101) є

$$I\left(\frac{c_1\sqrt{x_0}}{\varphi\sqrt{\omega^2 + m^2}}\right) = \frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{\omega}{m} + c_2, \tag{1.225}$$

де $I(z)=\int_0^z \frac{d\tau}{\sqrt{c_2-m^2\tau^2-2c_1\ln\tau}}$, c_1, c_2 – довільні сталі.

Використавши анзац (1.223) та розв'язок (1.225), знаходимо розв'язок рівняння (1.206):

$$I\left(\frac{c_1\sqrt{x_0}}{u\sqrt{e^{2x_1+2me^{x_1}}\cos x_2+m^2}}\right)= \\ =\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{e^{x_1}+m\cos x_2}{m\sin x_2}+c_2. \tag{1.226}$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (1.209) за умови $k=$ $=-2$. Застосуємо до цього рівняння сукупність двох перетворень (див., наприклад, [88, 154]):

$$x_0=x_0,\ \omega=\omega,\ \varphi=v_\omega.$$

Тут $v=v(x_0,\ \omega)$ – нова невідома функція:

$$x_0=t,\ \omega=w,\ v=x,$$

де $t,\ x$ – нові незалежні змінні, $w=w\,(t,\ x)$ – нова залежна змінна.

Як наслідок одержимо рівняння

$$w_t=w_{xx},$$

яке є лінійним рівнянням теплопровідності. Відомо безліч його точних розв'язків. Для прикладу розглянемо декілька з них:

$$\begin{gathered} w=t+\frac{1}{2}x^2, \\ w=tx+\frac{1}{6}x^3, \\ w=c_3e^{m_1^2t+m_1x}+c_4e^{m_2^2t+m_2x}, \\ w=e^{(p^2-m^2)t+px}[c_3\cos(2mpt+mx)+ \\ +c_4\sin(2mpt+mx)], \end{gathered} \tag{1.227}$$

де m_1, m_2, m, p, c_3, c_4 – довільні сталі.

Використавши (1.227), знаходимо розв'язки диференціального рівняння (1.206), записані в явному та параметричному виглядах:

$$u=\left(2\sin\frac{x_2}{2}e^{\frac{x_1}{2}}-\frac{1}{2}x_0e^{x_1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$u=\frac{4}{e^{\frac{x_1}{2}}(2\tau^2+x_0)},\qquad 12\sin\frac{x_2}{2}=e^{\frac{x_1}{2}}(3x_0\tau+2\tau^3),$$

$$u=\frac{e^{x_1}}{\alpha_\tau(x_0,\tau)},\qquad e^{x_1}\sin x_2=\alpha(x_0,\tau),$$

$$u=\frac{e^{(m^2-p^2)x_0-p\tau+x_1}}{p\beta(x_0,\tau)+\beta_\tau(x_0,\tau)},\qquad e^{(m^2-p^2)x_0-p\tau+x_1}\sin x_2=\beta(x_0,\tau),$$

де

$$\alpha(x_0,\tau)=c_1e^{m_1^2x_0+m_1\tau}+c_2e^{m_2^2x_0+m_2\tau},$$

$$\beta(x_0,\tau)=c_1\cos(2mpx_0+m\tau)+c_2\sin(2mpx_0+m\tau),$$

τ – довільний параметр.

Розглянемо нелінійне рівняння

$$u_0=\partial_a(uu_a)+\lambda_1uu_1+\lambda u(1-u), \tag{1.228}$$

де λ_1, λ – довільні сталі. Рівняння (1.228) є узагальненням відомого двовимірного рівняння Фішера для пористих областей [138]:

$$u_0=\triangle u+\lambda u(1-u).$$

У випадку, коли деяка область переповнена населенням, рівняння (1.228) описує швидкість його розсіювання в область нижчої щільності (див., [167] і посилання в ньому).

Також рівняння (1.228) можна розглядати як узагальнення рівняння Мюррея:

$$u_0=\triangle u+\lambda_1uu_1+\lambda u(1-u),$$

яке описує біологічні процеси, пов'язані з процесами ангіогенезу, загоєння ран, динаміки взаємодії популяцій та ін. В одновимірному випадку рівняння досліджено в працях [125, 128, 167].

Якщо $\lambda_1 = -\lambda = 8$, то рівняння (1.228) є частинним випадком рівняння пункту 27 із табл. 1.2 при $k = 1$. Як вказано в табл. 1.3, за допомогою перетворень

$$x_0 \to -\frac{e^{-8x_0}}{8}, \ x_a \to x_a, \ u \to e^{-8x_0}u \tag{1.229}$$

рівняння (1.228) зводиться до рівняння

$$u_t = \partial_a(uu_a) + 8uu_1 + 8u^2.$$

Якщо використати знайдені розв'язки рівняння (1.206) при $k = 1$ та зробити заміну (1.229), то отримаємо такі розв'язки рівняння (1.228) при $\lambda_1 = -\lambda_2 = 8$:

$$u = e^{-2x_1-8x_0}\left[p\sin x_2 e^{x_1} - \frac{p^2}{8}e^{-8x_0} + c_2\right], \tag{1.230}$$

$$u = e^{-2x_1-8x_0}\left[c_1\ln|e^{-2x_1-8x_0}u + c_1| + p\sin x_2 e^{x_1} - \frac{p^2}{8}e^{-8x_0} + c_2\right],$$

$$u = \frac{4}{3}\sin^2 x_2 + c_1 e^{-\frac{16}{3}x_0 - 2x_1}. \tag{1.231}$$

Отримані розв'язки рівняння (1.1) можна вивчити з точки зору можливості їх фізичного застосування. Виконаємо це на прикладі розв'язків (1.222), (1.230) та (1.231). Неважко бачити, що при $x_0 \to \infty$ $u \to 0$, $x_1 \to \infty$ $u \to 0$, а при $x_2 \to \infty$ u – обмежене.

Це дає підстави стверджувати, що ці розв'язки можуть мати фізичне застосування. На рис. 1.1–1.3 наведені графіки розв'язку (1.222) при $p = \frac{3}{4}, c_2 = 1$ та фіксованих значеннях змінної x_0: $x_0 = 0$, $x_0 = 10$, $x_0 = 100$; обмеження для просторових змінних: $x_1 \in \{2, 3\}$, $x_2 \in \{\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\}$. На рис. 1.4–1.6 наведені графіки розв'язку (1.230) для $p = 4, c_2 = 0$, фіксованих значеннях змінної x_0: $x_0 = 0$, $x_0 = 0,01$, $x_0 = 0,1$ та обмеженнях $x_1 \in [0, 10]$, $x_2 \in [0, 3\pi]$, а на рис. 1.7–1.9 – графіки розв'язку (1.231) для $c_1 = 1$, фіксованих значеннях змінної x_0: $x_0 = 0$, $x_0 = 3$, $x_0 = 6$ та обмеженнях x_1, x_2, указаних на даних рисунках.

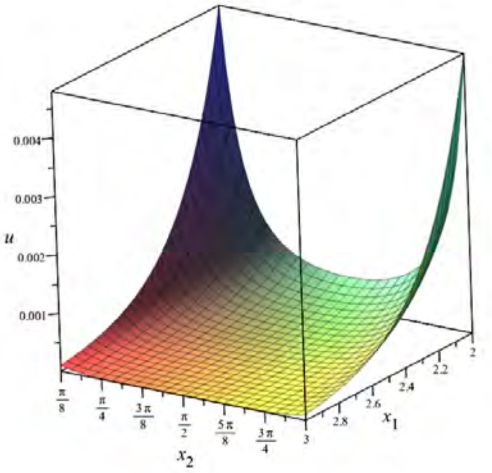


Рис. 1.1: Графік функції
$u(x_0 = 0)$

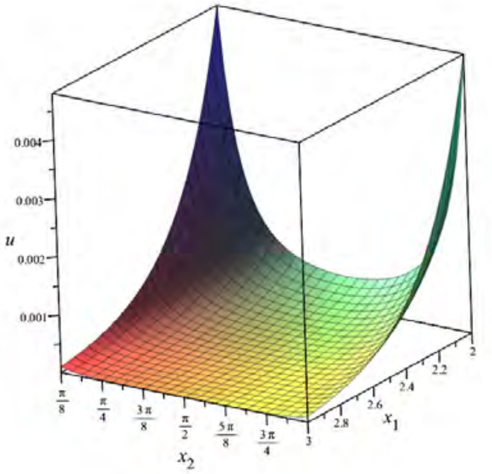


Рис. 1.2: Графік функції
$u(x_0 = 10)$

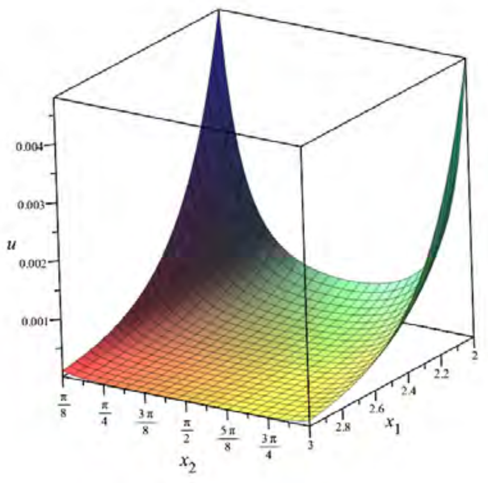


Рис. 1.3: Графік функції
$u(x_0 = 100)$

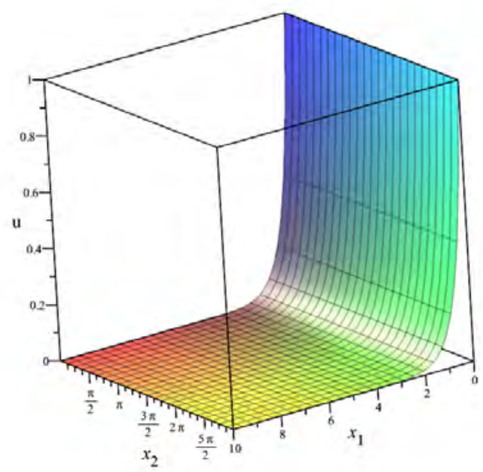


Рис. 1.4: Графік функції
$u(x_0 = 0)$

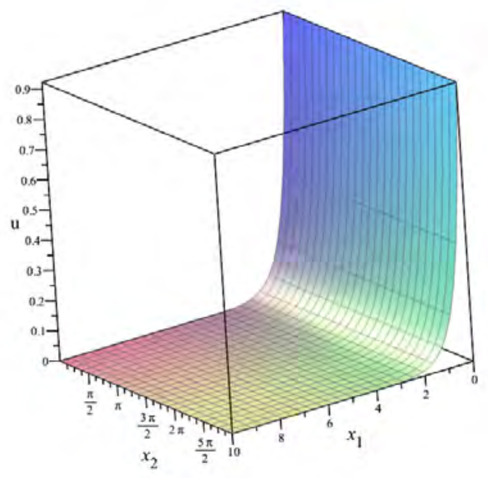


Рис. 1.5: Графік функції
$u(x_0 = 0,01)$

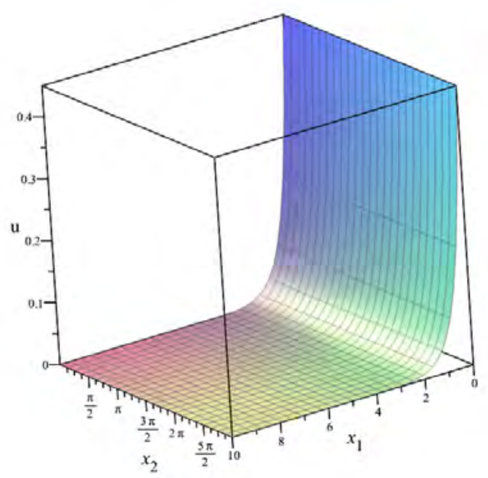


Рис. 1.6: Графік функції
$u(x_0 = 0,1)$

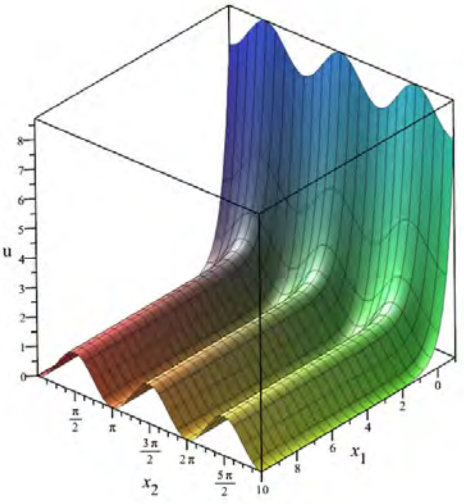


Рис. 1.7: Графік функції
$u(x_0 = 0)$

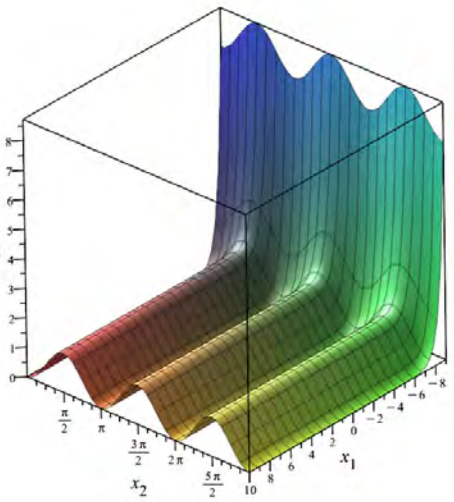


Рис. 1.8: Графік функції
$u(x_0 = 3)$

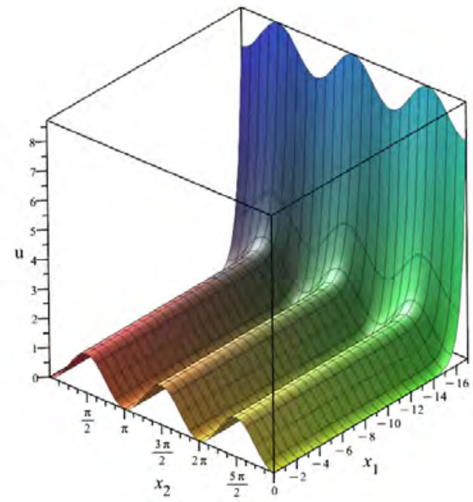


Рис. 1.9: Графік функції $u(x_0 = 6)$

РОЗДІЛ 2

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ–ДИФУЗІЇ

Вирішуючи фундаментальні проблеми з різних сфер діяльності, науковці часто зустрічаються з проблемою побудови математичних моделей процесів, що досліджуються, і вибору рівнянь чи систем, які б найточніше описували цей процес. У багатьох випадках те чи інше фізичне явище вдається змоделювати цілком визначеним диференціальним рівнянням чи системою диференціальних рівнянь. Найпростіші формулювання законів природи приводять до лінійних задач математичної фізики, але часто такі моделі неточні та не дають задовільного результату, адже багатьом реальним процесам відповідають саме нелінійні математичні моделі. І тоді виникає проблема обмеженості наявного математичного апарату для розв'язування отриманих диференціальних рівнянь чи систем. Та якщо нелінійне диференціальне рівняння (чи система рівнянь), що описує певний процес, має нетривіальні симетрійні властивості, то тут дослідники можуть застосовувати методи теорії груп і алгебр Лі.

Згідно з методом Лі диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліївською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок (анзаців). Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними. Але кількість розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння чи система. Якщо рівняння має бідну ліївську симетрію або не має її взагалі, то застосування цього методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату. Це стало передумовою для пошуку в рамках групового аналізу диференціальних рівнянь інших методів побудови нових розв'язків таких рівнянь.

Одним із цих методів став метод, який використовує нелокальні перетворення, що були застосовані в геометричних дослідженнях Л. Біанчі та М. Рібокуром, вивчені та узагальнені Ф.В. Беклундом. Перетворення є особливим випадком скінченних нелокальних перетворень залежних і незалежних змінних.

Під *нелокальними перетвореннями* розумітимемо перетворення незалежних x_i та залежних змінних u^i вигляду

$$y_i = h^i(x, U, U_{(k)}), \quad v^j = g^j(x, U, U_{(k)}),$$

де

$$x \in R^n, \quad U \in R^m, \quad U_{(k)} = \underset{1}{U}, ..., \underset{k}{U},$$

$\underset{l}{U}$ – сукупність усіх можливих похідних порядку l функції U за змінними x, дія яких перетворює рівняння

$$F(x, U, U_{(p)}) = 0$$

в інше рівняння

$$\Phi(y, V, V_{(q)}) = 0.$$

Скінченні нелокальні перетворення змінних породжують *нелокальні симетрії* диференціальних рівнянь, що є корисним для створення нових алгоритмів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Частинним випадком нелокальних симетрій є потенційні симетрії. Згідно з [107] потенційною симетрією заданого диференціального рівняння є точкова симетрія відповідної йому потенційної системи, яка не проектується в точкову симетрію цього рівняння.

Поняття потенціальної симетрії було введено канадським професором математики Дж.В. Блуменом [108, 113], а поняття перетворень потенціальної еквівалентності – Я. Лíслом [163].

Низку сучасних праць присвячено дослідженню потенційних симетрій широкого класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, серед яких [114, 187, 191].

Неперервною нелокальною групою симетрій S називають (див. [163]) будь-яку симетрію чи групу симетрій, яка не пов'язана з інфінітезимальним оператором локального типу.

В Україні серед перших праць, присвячених дослідженням у напрямі нелокальних симетрій відзначимо такі: [79, 139, 142, 203]. У праці [79] вказано спосіб побудови додаткових (нелокальних) анзаців для нелінійного рівняння теплопровідності, які неможливо отримати в рамках класичного алгоритму Лі.

Важливі результати застосування нелокальних симетрій до побудови неліївських розв'язків нелінійних рівнянь теплопровідності, рівнянь реакції–дифузії та дифузії–конвекції отримано в працях В.А. Тичиніна та його учнів [204–206].

2.1. Основні теореми

У працях [113,192] наведено нелокальні перетворення, які зводять нелінійне рівняння дифузії $u_t = \partial(u^{-2}u_x)$ до лінійного $z_t = z_{xx}$. У [154] ці перетворення узагальнено і показано, що за допомогою таких перетворень нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{2.1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція, зводиться до рівняння того самого класу.

У праці [79] ці перетворення використано для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (2.1) до звичайних диференціальних рівнянь, лінеаризації рівняння (2.1), побудови нелокальних формул розмноження та суперпозиції його розв'язків.

У [55, 56] поставлено та розв'язано задачу узагальнення результатів праць [79, 154] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії:

$$U_t = \partial_x[f(U)U_x],$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $f(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

У [202] нелокальні перетворення еквівалентності застосовано для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції–дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x + g(u)],$$

де $g(u)$ – довільна гладка функція.

У праці [52] досліджено максимальну алгебру інваріантності та знайдено деякі розв'язки системи рівнянь ван дер Ваальса, яка належить до класу систем конвекції–дифузії.

Праці, наведені вище, спонукали до узагальнення їх результатів для системи рівнянь конвекції–дифузії. Ця система використовується як модель опису різноманітних процесів у математичній фізиці, хімії та біології. До класу систем рівнянь конвекції–дифузії містяться системи, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасоперенесення, дифузії, описують еволюцію температури та густини в термоядерній плазмі. Така система описує рух рідини у пористому середовищі, перенесення енергії в плазмі, розподіл речовин у ґрунті та багато інших фізичних і біохімічних процесів. Тому її дослідження не втрачає актуальності і на сьогоднішній день.

У цьому розділі знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції–дифузії:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + K(U)U_x, \tag{2.2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $K(U) = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a\,(t,\ x)$, t – часова змінна, x – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}\,(U)$, $k^{ab} = k^{ab}\,(U)$ – відповідно коефіцієнти дифузії та конвекції, $a, b = \overline{1,2}$. Отримані перетворення використано для побудови нелокальних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків розглядуваної системи. Показано, що нелокальним анзацам відповідають оператори потенційних симетрій системи (2.2).

Нехай матриця $K(U)$ така, що її компоненти задовольняють умову

$$k^{11}_{u^2} = k^{12}_{u^1}, \quad k^{21}_{u^2} = k^{22}_{u^1}. \tag{2.3}$$

Тоді існують такі функції g^1 та g^2, що система (2.2) набуде вигляду

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{2.4}$$

де $G(U) = \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix}$.

Розглянемо сукупність трьох перетворень (див. [56], [55]):

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{2.5}$$

де $v^a = v^a(t,\ x)$ – нові невідомі функції,

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{2.6}$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a\left(x_0,\ x_1\right)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^a_1 = z^a, \tag{2.7}$$

$z^a = z^a\left(x_0,\ x_1\right)$ – нові залежні змінні.

Теорема 2.1. *Перетворення (2.5)–(2.7) є перетвореннями еквівалентності системи (2.4).*

Доведення. Застосуємо до системи (2.4) нелокальну заміну вигляду (2.5). Підставивши (2.5) в (2.4) і проінтегрувавши одержану систему за змінною x, отримаємо

$$V_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \tag{2.8}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (2.8) застосувати перетворення годографа (2.6), то ця система зведеться до вигляду

$$\begin{aligned} w^1_0 &= \frac{1}{(w^1_1)^2}\left[\left(f^{11} + w^2_1 f^{12}\right) w^1_{11} - w^1_1 f^{12} w^2_{11}\right] - w^2_1 g^1, \\ w^2_0 &= \frac{1}{(w^1_1)^3}\left[\left(f^{11} + w^2_1 f^{12}\right) w^2_1 - \left(f^{12} + w^2_1 f^{22}\right) w^1_{11}\right] + \\ &\quad + \frac{1}{(w^1_1)^2}\left(f^{22} + w^2_1 f^{12}\right) w^2_{11} - w^2_1 g^1 + g^2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

де $w^a_\mu = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $\quad w^a_{11} = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\quad \mu = \overline{0,1}$, причому у формулах (2.9) $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1})$, $\quad g^a = g^a(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1})$, $\quad a, b = \overline{1,2}$.

Продиференціювавши систему (2.9) за змінною x_1 та подіявши перетвореннями (2.7), одержимо таку систему

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{2.10}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $\quad Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\quad \Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z)$, $\quad \Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, $\quad \psi^a = \psi^a(Z)$, $\quad \mu = \overline{0,1}$. Функції φ^{ab}, $\quad \psi^a$ пов'язані з функціями f^{ab}, $\quad g^a$ такими співвідношеннями:

$$\begin{gathered} \varphi^{11} = (z^1)^{-2}(f^{11} + z^2 f^{12}), \quad \varphi^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ \varphi^{12} = (z^1)^{-3}\left[\left(f^{11} + z^2 f^{12}\right) z^2 - \left(f^{21} + z^2 f^{22}\right)\right], \\ \varphi^{22} = (z^1)^{-2}\left(f^{22} + z^2 f^{12}\right), \ \psi^1 = -z^1 g^1, \ \psi^2 = -z^2 g^1 + g^2, \end{gathered} \tag{2.11}$$

де $f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$, $\quad g^a = g^a\left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}\right)$.

Таким чином, встановили, що ланцюжок замін (2.5)–(2.7) зводить систему (2.4) до системи рівнянь того самого класу вигляду (2.10). Неважко переконатися, що система (2.10) за допомогою замін, обернених до перетворення (2.5)–(2.7), зводиться до системи (2.4).

Теорему 2.1 доведено.

Оскільки система (2.4) залежить від двох невідомих функцій u^1 і u^2, то перетворення годографа вигляду (2.6) не єдино можливе для цієї системи. Так, якщо в (2.6) замінити $v^1 \to v^2$, $\quad v^2 \to v^1$, $\quad w^1 \to w^2$, $\quad w^2 \to w^1$, то замість (2.6) одержимо

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *Перетворення (2.5), (2.12), (2.7) є перетвореннями еквівалентності системи (2.4).*

Доведення. Провівши міркування, аналогічні до тих, що наведено в доведенні теореми 2.1, приходимо до висновку, що ланцюжок замін (2.5),(2.12), (2.7) також зводить систему (2.4) до системи рівнянь того самого класу (2.10) і, навпаки, система (2.10) за допомогою перетворень, обернених до (2.7), (2.12), (2.5), зводиться до системи (2.4). При цьому функції φ^{ab}, ψ^a пов'язані з функціями f^{ab}, g^a такими співвідношеннями:

$$\begin{gathered}\varphi^{11}=(z^2)^{-2}(f^{11}-z^1f^{21}),\\ \varphi^{12}=(z^2)^{-3}[-(z^1f^{11}+f^{12})+z^1(z^1f^{21}+f^{22})],\\ \varphi^{21}=-(z^2)^{-1}f^{21},\varphi^{22}=(z^2)^{-2}(z^1f^{21}+f^{22}),\\ \psi^1=g^1-z^1g^2,\psi^2=-z^2g^2,\end{gathered}\tag{2.13}$$

де $f^{ab}=f^{ab}\left(\frac{z^1}{z^2},\frac{1}{z^2}\right),\varphi^{ab}=\varphi^{ab}\left(z^1,z^2\right),g^a=g^a\left(\frac{z^1}{z^2},\frac{1}{z^2}\right),\psi^a=\psi^a(Z)$.

Теорему 2.2 доведено.

Перетворення (2.5)–(2.7) назвемо перетвореннями першого типу для системи (2.4) і позначимо їх P_1, а перетворення (2.5), (2.12), (2.7) – перетвореннями другого типу і позначимо їх P_2.

Зауваження. *Для всього класу рівнянь (2.4) перетворення P_1 та P_2 є еквівалентними, але для конкретної системи вигляду (2.4) ці перетворення дають різні результати. Далі проілюструємо цей факт на конкретних прикладах.*

2.2. Система рівнянь ван дер Ваальса

Розглянемо систему рівнянь ван дер Ваальса:

$$\begin{aligned}u^1_t&=\lambda_1u^1_{xx}-u^1u^1_x+\mu u^2u^2_x,\\ u^2_t&=\lambda_2u^2_{xx}-u^1u^2_x-u^2u^1_x,\end{aligned}\tag{2.14}$$

де $x=(x_0,\ x_1)$, $u^a=u^a\left(x\right)$, λ_1 – коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 – коефіцієнт дифузії, μ – коефіцієнт конвекції, $a\in\{1,2\}$, яка широко використовується в молекулярно-кінетичній теорії газів і рідин (див., наприклад, [150]). Ця система належить до класу систем рівнянь конвекції–дифузії. Її коефіцієнти задовольняють умову (2.3) і її можна звести до вигляду (2.4).

Якщо до системи (2.14) застосувати перетворення P_1, то одержимо систему

$$
\begin{aligned}
Z_0 = \partial_1 \Bigg[\frac{1}{(z^1)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\, z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \\
- \frac{1}{2\,(z^1)^2} \begin{pmatrix} \left(\mu\,(z^1)^2 - 1\right) z^1 \\ \left(\mu\,(z^2)^2 + 1\right) z^2 \end{pmatrix} \Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

яку назвемо першим образом системи (2.14) і позначимо O_1.

Якщо до системи (2.14) застосувати перетворення P_2, то одержимо таку систему

$$
\begin{aligned}
Z_0 = \partial_1 \Bigg[\frac{1}{(z^2)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^2 & (\lambda_2 - \lambda_1)\, z^1 \\ 0 & \lambda_2 z^2 \end{pmatrix} Z_1 + \\
+ \frac{1}{2\,(z^2)^2} \begin{pmatrix} (z^1)^2 + \mu \\ 2 z^1 z^2 \end{pmatrix} \Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

яку назвемо другим образом системи (2.14) і позначимо O_2.

У праці [196] встановлено, що система (2.14) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея:

$$
\begin{aligned}
AG_2(1,1) =< \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - I, \\
\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI + x\partial_{u^1} >,
\end{aligned}
$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}$, $\partial_{u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$.

Якщо провести повний аналіз її симетрійних властивостей, то одержимо таке твердження.

Теорема 2.3. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.14) залежно від значення сталої μ є такі алгебри:*

1) $AG_2(1,1)$, якщо $\mu \neq 0$;
2) $< AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2} >$, якщо $\mu = 0$.

Доведення. Симетрію системи (2.14) досліджуємо методом Лі (див., наприклад, [181,184]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \tag{2.17}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(t, x, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(t, x, u^1, u^2)$ – шукані функції, $\mu = \overline{0, 1}; a = \overline{1, 2}$.

З умови інваріантності системи (2.14) відносно оператора (2.17), одержимо систему визначальних рівнянь для координат ξ^μ та η^a оператора (2.17):

$$\begin{gathered}
\xi^0_x = \xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \quad \xi^0_t = 2\xi^1_x, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\eta^1_{u^2} = 0, \\
(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_{u^1} = 0, \quad \eta^1 = -\xi^1_x u^1 + \xi^1_t + \lambda_1 \eta^1_{xu^1} + \lambda_2 \eta^2_{xu^2}, \\
\eta^2 = (\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} - \xi^1_x)u^2 + 2\lambda_2 \eta^2_{xu^1}, \\
(\eta^1_{u^2} + \mu \eta^2_{u^1})u^2 = \lambda_2 \eta^2_{xu^2} - \lambda_1 \eta^1_{xu_1}, \\
\mu \eta^2 + \mu(\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} - \xi^1_x)u^2 + 2\lambda_1 \eta^1_{xu_2} = 0, \\
\eta^1_t = \lambda_1 \eta^1_{xx} - u^1 \eta^1_x + \mu u^2 \eta^2_x, \; \eta^2_t = \lambda_2 \eta^2_{xx} - u^2 \eta^1_x - u^1 \eta^2_x.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Розв'язком системи (2.18) є функції

якщо $\mu \neq 0$	якщо $\mu = 0$
$\xi^0 = c_1 t^2 + 2xt + d_0,$ $\xi^1 = (c_1 t + x)x + gt + d_1,$ $\eta^1 = -(c_1 t + x)u^1 + c_1 x + g,$ $\eta^2 = -(c_1 t + x)u^2.$	$\xi^0 = c_1 t^2 + 2xt + d_0,$ $\xi^1 = (c_1 t + x)x + gt + d_1,$ $\eta^1 = -(c_1 t + x)u^1 + c_1 x + g,$ $\eta^2 = -(c_1 t + x + c_2)u^2.$

Для кожного з випадків стандартним чином одержуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорему 2.3 доведено.

Дослідимо ліївську симетрію образів (2.15) та (2.16). Справедливе таке твердження.

Теорема 2.4. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.15) є алгебра*

1) $A^{bas} =< \partial_0,\ \partial_1,\quad D = 2x_0\partial_0 + z^1\partial_{z^1} >$, *якщо* $\mu \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$*;*

2) $A =< A^{bas},\quad z^2\partial_{z^2} >$, *якщо* $\mu = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$*;*

3) $A =< A^{bas},\ z^2\partial_{z^2},\ e^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2} >$, *якщо* $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad \partial_{z^1} = \frac{\partial}{\partial z^1},\quad \partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}$.

Доведення. Застосувавши до системи (2.15) метод Лі, отримаємо систему визначальних рівнянь для координат ξ^μ та η^μ інфінітезимального оператора (2.17), яка має вигляд

$$\begin{gathered}
\xi^0_1 = \xi^1_0 = \xi^0_{z^a} = \xi^1_{z^a} = \eta^a_{z^b z^c},\\
\alpha^{12} = \beta^1 = \mu\eta^2 = \mu\eta^2_0 = \alpha^{11}_0 = \alpha^{22}_1 = 0,\\
2\alpha^{11} = \xi^1_1 - \xi^0_0,\quad (\lambda_2 - \lambda_1)\beta^2 = 0,\\
\beta^2 = 2\lambda_2\beta^2_1,\quad 2\lambda_2\alpha^{21}_{11} = \alpha^{21}_1,
\end{gathered} \tag{2.19}$$

де $\eta^a = \alpha^{ab}z^b + \beta^a$.

Загальний розв'язок системи (2.19) залежить від значень сталих $\mu,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2$. Можливі такі нееквівалентні випадки:

якщо $\mu \neq 0$	якщо $\mu = 0$	
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0,$ $\xi^1 = d_1,$ $\eta^1 = \kappa z^1,$ $\eta^2 = 0.$	$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0$ $\xi^1 = d_1$ $\eta^1 = \kappa z^1$ $\eta^2 = c_1 z^2$	$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0,$ $\xi^1 = d_1$ $\eta^1 = \kappa z^1,$ $\eta^2 = c_1 z^2 + c_2 e^{\frac{x_1}{2}}$

Для кожного з випадків отримуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорему 2.4 доведено.

Теорема 2.5. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (2.16) є алгебра*

1) $A^{bas} =< \partial_0,\quad \partial_1,\quad D_1 = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2},\quad Q = z^2\partial_{z^1} >$, *якщо* $\mu \neq 0,\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$*;*

2) $A =< A^{bas},\quad D_2 = x_1\partial_1 - I >$, *якщо* $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$*;*

3) $A = < A^{bas}, \quad D_2 = x_1\partial_1 - I, \quad K = x_1^2\partial_1 - 2x_1 I + 2\partial_{z^1} >,$ *якщо* $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$*;*

4) $A = < A^{bas}, Q_1 = e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - I), Q_2 = e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + I) >,$ *якщо* $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$*;*

5) $A = < A^{bas}, \quad Q_1 = \cos x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + \sin x_1 I, \quad Q_2 = = \sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) - \cos x_1 I >,$ *якщо* $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$
де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_{z^1} = \frac{\partial}{\partial z^1}, \partial_{z^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}, I = z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}.$

Доведення. Результатом застосування до системи (2.16) алгоритму Лі є така система визначальних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\xi_0^1 = \alpha^{21} = \alpha_0^{11} = \alpha_0^{12} = \alpha_0^{22} = \alpha_1^{12} = \beta^2 = \beta_0^1 = 0, \\
\alpha^{11} = -\xi_1^1, \quad \alpha^{22} = \frac{1}{2}\xi_0^0 - \xi_1^1, \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\beta^1 = 0, \\
\beta^1 = \lambda_2\xi_{11}^1; \quad (\lambda_2 - 3\lambda_1)\lambda_2\xi_{111}^1 - 2\mu\xi_1^1 = 0.
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Розв'язавши систему (2.20) залежно від значень сталих $\mu, \ \lambda_1, \ \lambda_2$, отримаємо:

для випадку $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

якщо $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, \\
\eta^1 &= c_4z^2, \\
\xi^1 &= d_1, \\
\eta^2 &= c_1z^2;
\end{aligned}$$

якщо $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, \\
\xi^1 &= c_3x_1 + d_1, \\
\eta^1 &= -c_3z^1 + c_4z^2, \\
\eta^2 &= (c_1 - c_3)z^2;
\end{aligned}$$

для випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

якщо $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, \\ \xi^1 &= c_2 x_1^2 + c_3 x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -(2c_2 x_1 + c_3) z^1 + c_4 z^2 + 2c_2, \\ \eta^2 &= [c_1 - (2c_2 x_1 + c_3)] z^2; \end{aligned}$$

якщо $\mu = -1$

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, \\ \xi^1 &= c_2 e^{x_1} + c_3 e^{-x_1} + d_1, \\ \eta^1 &= -(c_2 e^{x_1} - c_3 e^{-x_1}) z^1 + c_4 z^2 - c_2 e^{x_1} - c_3 e^{-x_1}, \\ \eta^2 &= [c_1 - (c_2 e^{x_1} - c_3 e^{-x_1})] z^2; \end{aligned}$$

якщо $\mu = 1$

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, \\ \xi^1 &= c_2 \cos x_1 + c_3 \sin x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= (c_2 \sin x_1 - c_3 \cos x_1) z^1 + c_4 z^2 - c_2 \cos x_1 - c_3 \sin x_1, \\ \eta^2 &= (c_1 + c_2 \sin x_1 - c_3 \cos x_1) z^2. \end{aligned}$$

Для кожного з випадків стандартним способом одержуємо відповідну алгебру інваріантності.

Теорему 2.5 доведено.

2.2.1. Ліївські анзаци системи рівнянь ван дер Ваальса

Із теореми 2.3 випливає, що у випадку $\mu \neq 0$ МАІ системи (2.14) є узагальненою алгеброю Галілея:

$$A^{bas} =< \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x - I,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - tI + x\partial_{u^1} > .$$

Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задають формулами

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1,\\
\xi^1 &= (c_5 t + c_4)x + c_3 t + c_2,\\
\eta^1 &= -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3,\\
\eta^2 &= -(c_5 t + c_4)u^2,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

де $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$ – групові параметри.

Для того щоб знайти інваріанти інфінітезімального оператора алгебри інваріантності системи рівнянь (2.14), необхідно розв'язати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1} = \frac{dx}{(c_5 t + c_4)x + c_3 t + c_2} =$$
$$= \frac{du^1}{-(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3} = \frac{du^2}{-(c_5 t + c_4)u^2} = d\tau,$$

або

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= c_5 t^2 + 2c_4 t + c_1,\\
\dot{x} &= (c_5 t + c_4)x + c_3 t + c_2,\\
\dot{u}^1 &= -(c_5 t + c_4)u^1 + c_5 x + c_3,\\
\dot{u}^2 &= -(c_5 t + c_4)u^2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

де крапка означає диференціювання за змінною τ.

Перед тим, як розв'язати систему рівнянь (2.22), зведемо її до простішого вигляду за допомогою перетворень, які породжуються алгеброю $AG_2(1,1)$:

$$\begin{aligned}
t' &= e^{2\theta_4}\frac{t}{1-\theta_5 t} + \theta_1,\\
x' &= e^{\theta_4}\frac{x}{1-\theta_5 t} + \theta_3 e^{2\theta_4}\frac{t}{1-\theta_5 t} + \theta_2,\\
u^{1'} &= e^{-\theta_4}[(1-\theta_5 t)u^1 + \theta_5 x],\\
u^{2'} &= e^{-\theta_4}(1-\theta_5 t)u^2,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

де θ_i – довільні сталі.

Лема 1. *Перетворення (2.23) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (2.22).*

Доведення. Підставивши перетворення (2.23) у систему (2.22), записану в системі координат $(t', x', u^{1'}, u^{2'})$, одержимо

$$\begin{aligned} \dot{t} &= C_5 t^2 + 2C_4 t + C_1, \\ \dot{x} &= (C_5 t + C_4)x + C_3 t + C_2, \\ \dot{u^1} &= -(C_5 t + C_4)u^1 + C_5 x + C_3, \\ \dot{u^2} &= -(C_5 t + C_4)u^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

де $C_1, ..., C_5$ виражають через $c_1, ..., c_5$ та $\theta_1, ..., \theta_5$ такими співвідношеннями:

$$\begin{gathered} C_1 = (c_5\theta_1^2 + 2c_4\theta_1 + c_1)e^{-2\theta_4}, \\ C_2 = -\theta_3 C_1 + (c_5\theta_1\theta_2 + c_4\theta_2 + c_3\theta_1 + c_2)e^{-\theta_4}, \\ C_3 = \theta_3\theta_4 C_1 + (c_5\theta_2 + c_3)e^{\theta_4} - \theta_3(c_5\theta_1 + c_4) - \\ -\theta_5(c_5\theta_1\theta_2 + c_4\theta_2 + c_3\theta_1 + c_2)e^{-\theta_4}, \\ C_4 = -\theta_5 C_1 + c_5\theta_1 + c_4, \\ C_5 = \theta_5^2 C_1 - 2\theta_5(c_5\theta_1 + c_4) + c_5 e^{2\theta_4}. \end{gathered}$$

Цей факт і доводить твердження леми 1.

Лему доведено.

Проаналізуємо, чи можна вибрати параметри θ_i так, щоб занулити деякі сталі C_i. Елементарними перетвореннями сталі C_1 та C_5 зводять до вигляду

$$\begin{gathered} C_1 = c_5 e^{-2\theta_4}[(\theta_1 + \frac{c_4}{c_5})^2 + \frac{1}{c_5^2}(c_1c_5 - c_4^2)], \\ C_5 = c_5 e^{-2\theta_4}[(e^{2\theta_4} + \theta_5(\theta_1 + \frac{c_4}{c_5}))^2 + \frac{\theta_5}{c_5}(c_1c_5 - c_4^2)]. \end{gathered}$$

У випадку, коли $c_1c_5 - c_4^2 > 0$, неможливо вибрати параметри θ_i так, щоб занулити сталі C_1 та C_5. Легко переконатися, що в цьому випадку параметри θ_i можна вибрати так, щоб $C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad C_1 = C_5 = 1.$

У випадку, коли $c_1c_5 - c_4^2 \le 0$ параметри θ_i, можна вибрати так, щоб $C_5 = 0$. Розглянемо ці випадки окремо.

У першому випадку систему (2.22) запишемо так:

$$
\begin{aligned}
\dot{t} &= t^2 + 1,\\
\dot{x} &= tx,\\
\dot{u^1} &= tu^1,\\
\dot{u^2} &= tu^2.
\end{aligned}
$$

Розв'язавши цю систему, одержимо вигляд інваріантного анзацу

$$
\begin{aligned}
u^1 &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(\psi^1(\omega) + t\omega),\\
u^2 &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega),\\
\omega &= (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}x.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

У другому випадку для побудови інваріантних анзаців системи (2.14) необхідно проінтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$
\begin{aligned}
\dot{t} &= 2C_4t + C_1,\\
\dot{x} &= C_4x + C_3t + C_2,\\
\dot{u^1} &= -C_4u^1 + C_3,\\
\dot{u^2} &= -C_4u^2.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Щоб полегшити інтегрування системи, зведемо її до простішого вигляду. Це можна зробити, якщо подіяти на неї перетвореннями, які породжуються розширеною алгеброю Галілея $AG_1(1,1)$:

$$
\begin{aligned}
t' &= e^{2\theta_4}t + \theta_1,\\
x' &= e^{\theta_4}x + \theta_3e^{2\theta_4}t + \theta_2,\\
u^{1'} &= e^{-\theta_4}u^1 + \theta_3,\\
u^{2'} &= e^{-\theta_4}u^2.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Застосувавши перетворення (2.27) до системи (2.26), зведемо її до вигляду

$$
\begin{aligned}
\dot{t} &= 2C_4 t + C_1, \\
\dot{x} &= C_4 x + C_3 t + C_2, \\
\dot{u^1} &= -C_4 u^1 + C_3, \\
\dot{u^2} &= -C_4 u^2,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

де

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (2c_4\theta_1 + c_1)e^{-2\theta_4}, \\
C_2 &= (c_4\theta_2 + c_3\theta_1 - 2c_4\theta_1\theta_3 - c_1\theta_3 + c_2)e^{-2\theta_4}, \\
C_3 &= (-c_4\theta_3 + c_3)e^{\theta_4}, \\
C_4 &= c_4.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Проаналізувавши можливість вибору параметрів θ_i такі, щоб занулити деякі зі сталих (2.29), отримуємо нееквівалентні випадки:

а) $C_4 = 1,\ C_1 = C_2 = C_3 = 0$;

б) $C_4 = C_2 = 0,\ C_3 = 1,\ C_1 - \forall$;

в) $C_4 = C_3 = 0,\ C_1,\ C_2 - \forall$.

Розв'язавши систему (2.26) для кожного з цих випадків, знаходимо відповідні анзаци:

$$
u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.30}
$$

$$
u^1 = \psi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2; \tag{2.31}
$$

$$
u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx, \tag{2.32}
$$

де k і m – довільні сталі.

Побудуємо ліївські анзаци системи рівнянь ван дер Ваальса для інших значення параметрів $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu$. Одержуємо такі інваріантні анзаци для випадку $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} u^1 &= \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\psi^1(\omega)+t\omega\right), \\ u^2 &= \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} e^{n\arctan t}\psi^2(\omega), \\ \omega &= \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} x, \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^n\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \tag{2.34}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2, \tag{2.35}$$

$$u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = e^{nt}\psi^2(\omega), \quad \omega = kt + mx. \tag{2.36}$$

2.2.2. Ліївські анзаци першого образу системи рівнянь ван дер Ваальса

Використаємо ліївську симетрію системи (2.15) для побудови її інваріантних анзаців. Система для знаходження інваріантних змінних має такий вигляд:

для випадку $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \frac{dx_1}{c_2} = \frac{dz^1}{c_1z^1} = \frac{dz^2}{0} = d\tau, \tag{2.37}$$

для випадку $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \frac{dx_1}{c_2} = \frac{dz^1}{c_3z^1} = \frac{dz^2}{c_4z^2} = d\tau, \tag{2.38}$$

для випадку $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\frac{dx_0}{2c_3x_0+c_1} = \frac{dx_1}{c_2} = \frac{dz^1}{c_3z^1} = \frac{dz^2}{c_4z^2+c_5e^{\frac{x_1}{2}}}. \tag{2.39}$$

Розв'язавши системи (2.37)–(2.39) для кожного з указаних вище випадків, знаходимо відповідні анзаци:

для випадку $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0, \tag{2.40}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0, \tag{2.41}$$

для випадку $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0, \tag{2.42}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0, \tag{2.43}$$

для випадку $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0, \tag{2.44}$$

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0, \tag{2.45}$$

$$\begin{gathered} z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{sx_0}\psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \\ \omega = x_1 + mx_0, \quad m \neq -2s, \end{gathered} \tag{2.46}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = (\psi^2(\omega) + x_0)e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + mx_0, \tag{2.47}$$

$$\begin{gathered} z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^s\psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \\ \omega = x_1 + m\ln x_0, \quad m \neq -2s, \end{gathered} \tag{2.48}$$

$$\begin{gathered} z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = (\psi^2(\omega) + \ln x_0)e^{\frac{x_1}{2}}, \\ \omega = x_1 + m\ln x_0. \end{gathered} \tag{2.49}$$

2.2.3. Ліївські анзаци другого образу системи рівнянь ван дер Ваальса

Використаємо ліївську симетрію системи (2.16) для побудови її інваріантних анзаців. Система для знаходження інваріантних змінних має такий вигляд:

для випадку $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{dx_0}{2c_3x_0 + c_1} = \frac{dx_1}{c_2} = \frac{dz^1}{c_4z^1} = \frac{dz^2}{c_3z^2} = d\tau; \tag{2.50}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\frac{dx_0}{2c_3x_0 + c_1} = \frac{dx_1}{c_5x_1 + c_2} = \frac{dz^1}{c_4z^2 - c_5z^1} = \frac{dz^2}{(c_3 - c_5)z^2} = d\tau; \tag{2.51}$$

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered}\frac{dx_0}{2c_3x_0 + c_1} = \frac{dx_1}{c_6x_1^2 + c_5x_1 + c_2} = \\ = \frac{dz^1}{-2c_6x_1(z^1 + 1) - c_5z^1 + c_4z^2} = \\ = \frac{dz^2}{-(2c_6x_1 + c_5 - c_3)z^2} = d\tau;\end{gathered} \tag{2.52}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered}\frac{dx_0}{2c_3x_0 + c_1} = \frac{dx_1}{c_6e^{-x_1} + c_5e^{x_1} + c_2} = \\ = \frac{dz^1}{c_6e^{-x_1}(z^1 + 1) - c_5e^{x_1}(z^1 - 1) + c_4z^2} = \\ = \frac{dz^2}{(c_6e^{-x_1} - c_5e^{x_1} + c_3)z^2} = d\tau;\end{gathered} \tag{2.53}$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered}\frac{dx_0}{2c_3x_0 + c_1} = \frac{dx_1}{c_6\sin x_1 + c_5\cos x_1 + c_2} = \\ = \frac{dz^1}{-c_6(\cos x_1 z^1 + \sin x_1) + c_5(\sin x_1 z^1 - \cos x_1) + c_4z^2} = \\ = \frac{dz^2}{-(c_6\cos x_1 - c_5\sin x_1 - c_3)z^2} = d\tau,\end{gathered} \tag{2.54}$$

де $c_1, ..., c_6$ – групові параметри.

Розв'язавши системи (2.50)–(2.54) залежно від значень c_i, знайдемо відповідні нееквівалентні анзаци для системи рівнянь (2.16).

При $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega) + kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0, \tag{2.55}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0. \tag{2.56}$$

При $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k\ln x_0, \tag{2.57}$$

$$z^1 = x_0^k \psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{k-\frac{1}{2}} \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^k, \tag{2.58}$$

$$z^1 = \psi^1(\omega) + m\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0, \tag{2.59}$$

$$\begin{gathered} z^1 = [\psi^1(\omega) + mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \\ \omega = e^{kx_0} x_1. \end{gathered} \tag{2.60}$$

При $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2 + 1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1}, \omega = \ln x_0 + m \arctan x_1, \tag{2.61}$$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2 + 1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1}, \quad \omega = x_0 + m \arctan x_1. \tag{2.62}$$

При $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 + k \arctan m e^{x_1}, \tag{2.63}$$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \; z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \; \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1}, \tag{2.64}$$

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + l e^{x_1}, \tag{2.65}$$

$$\begin{gathered} z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \\ \omega = \ln x_0 + k \arctan m e^{x_1}, \end{gathered} \tag{2.66}$$

$$\begin{gathered} z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \\ \omega = \ln x_0 - k \arctan n e^{x_1}, \end{gathered} \tag{2.67}$$

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = \sqrt{x_0}e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + l e^{x_1}, \tag{2.68}$$

де $\sigma = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$.

При $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = x_0 + \ln \cot \frac{x_1}{2}, \tag{2.69}$$

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \; z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \; \omega = \ln x_0 + \ln \cot \frac{x_1}{2}, \tag{2.70}$$

де $k, \; l, \; m$ – довільні сталі.

2.3. Нелокальні анзаци та редукція системи рівнянь ван дер Ваальса

Розглянемо систему (2.15).

Для відшукання нелокальних анзаців системи (2.14) подіємо нелокальними перетвореннями, оберненими до P_1 або P_2, на знайдені ліївські анзаци систем (2.15) та (2.16).

2.3.1. Нелокальні анзаци системи рівнянь ван дер Ваальса, одержані з першого образу

1) Випадок $\mu \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Анзац (2.40) набуває вигляду

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Подіявши на (2.40) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.6) цей анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо такий анзац:

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - mt, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{2.71}$$

Продиференціювавши анзац (2.71) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega), \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{2.72}$$

Отже, маємо, що анзац (2.40) під дією перетворень (2.5)–(2.7) переходить у ліївський анзац (2.32) при $k = 0, \quad m = 1$.

Розглянемо анзац (2.41):

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0.$$

Подіявши на (2.41) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \sqrt{x_0}\Psi^1(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.6) цей анзац набуде вигляду

$$x = \sqrt{t}\Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - m\ln t, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.73}$$

Продиференціювавши анзац (2.73) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.74}$$

Як наслідок, маємо, що анзац (2.41) під дією перетворень (2.5)–(2.7) переходить у ліївський анзац (2.30).

2) Випадок $\mu = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (2.42):

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Подіявши на (2.42) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = e^{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.6) цей анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = e^t\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - mt, \quad w^2 = e^t\Psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{2.75}$$

Продиференціювавши анзац (2.75) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^t\varphi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{2.76}$$

Отже, маємо, що анзац (2.42) під дією перетворень (2.5)–(2.7) переходить у ліївський анзац (2.35) при $k = 0, \quad n = 1$.

Розглянемо анзац (2.43):

$$z^1 = \sqrt{x_0}\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0.$$

Подіявши на (2.43) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \sqrt{x_0}\Psi^1(\omega), \quad v^2 = x_0\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.6) цей анзац набуде вигляду

$$x = \sqrt{t}\Psi^1(\omega), \quad w^2 = t\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^1 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω, одержимо такий анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - m\ln t, \quad w^2 = t\Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.77}$$

Продиференціювавши анзац (2.77) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), одержимо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t\varphi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.78}$$

Як наслідок, маємо, що анзац (2.43) під дією перетворень (2.5)–(2.7) переходить у ліївський анзац (2.34) при $n = 1$.

3) Випадок $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Анзаци (2.44) та (2.45) збігаються з анзацами (2.42) та (2.43). Їх розглянуто у попередньому випадку. Тоді отримаємо, що анзац (2.44) переходить у анзац (2.35) при $p = 0,\ n = 1,\ k = 0,\ m = 1$, а анзац (2.45) – у анзац (2.34) при $p = 0,\ n = 1$.

Розглянемо анзац (2.46):

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{sx_0}\psi^2(\omega) + e^{\frac{x_1}{2}}, \omega = x_1 + mx_0, \quad m \neq -2s.$$

Подіявши на (2.46) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = e^{sx_0}\Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.6) анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = e^{st}\Psi^2(\omega) + 2e^{\frac{w^1}{2}}, \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω та ввівши заміну:

$$\Psi^1 = 2\ln 2\varphi^1, \quad \Psi^2 = \Phi^2,$$

одержимо такий анзац:

$$\begin{gathered} w^1 = 2\ln\varphi^1(\omega) - mt, \quad w^2 = e^{st}\Phi^2(\omega) + e^{pt}\varphi^1(\omega), \\ \omega = x, \quad p = -\frac{m}{2}, \quad p \neq s. \end{gathered} \tag{2.79}$$

Продиференціювавши анзац (2.79) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$\begin{gathered} u^1 = 2\frac{\dot\varphi^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = e^{st}\varphi^2(\omega) + e^{pt}\dot\varphi^1(\omega), \\ \omega = x, \quad p = -\frac{m}{2}, \quad p \neq s, \end{gathered} \tag{2.80}$$

де $\varphi^2(\omega) = \dot\Phi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (2.47):

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\frac{x_1}{2}}(\psi^2(\omega) + x_0), \quad \omega = x_1 + mx_0. \qquad (2.81)$$

Подіявши на (2.81) перетворенням (2.5) після інтегрування за змінною x_1, отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = (\Psi^2(\omega) + 2x_0)e^{\frac{x_1}{2}}, \quad \omega = x_1 + mx_0,$$

де Ψ^1, – первісна для ψ^1,

$$\Psi^2(\omega) = e^{-\frac{\omega}{2}} \int e^{\frac{\omega}{2}} \psi^2(\omega) d\omega.$$

Під дією перетворення годографа (2.6) цей анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = (\Psi^2(\omega) + 2t)e^{\frac{w^1}{2}}, \quad \omega = w^1 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^1 і ω та ввівши заміну

$$\Psi^1 = 2\ln\varphi^1, \quad \Psi^2 = 2\frac{\Phi^2}{\varphi^1},$$

одержимо такий анзац:

$$w^1 = 2\ln\varphi^1(\omega), \quad w^2 = 2(\Phi^2(\omega) + t\varphi^1(\omega))e^{-\frac{m}{2}t}, \omega = x. \qquad (2.82)$$

Продиференціювавши анзац (2.82) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), одержимо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$\begin{gathered} u^1 = 2\frac{\dot\varphi^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = 2(\varphi^2(\omega) + t\dot\varphi^1(\omega))e^{pt}, \\ \omega = x, \quad p = -\frac{m}{2}. \end{gathered} \qquad (2.83)$$

Зауваження. *Використавши перетворення інваріантності системи (2.14) вигляду*

$$t' = t, \quad x' = x, \quad u^{1\prime} = u^1, \quad u^{2\prime} = \theta u^2$$

можна підібрати параметр θ *так, щоб анзац* (2.83) *мав вигляд*

$$u^2 = 2\frac{\dot{\varphi}^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \quad u^2 = e^{pt}(\varphi^2(\omega) + t\dot{\varphi}^1(\omega)), \quad \omega = x. \qquad (2.84)$$

Аналогічно можна показати, що анзаци (2.48), (2.49) перейдуть відповідно у такі нелокальні анзаци системи (2.14):

$$u^1 = \frac{2}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, u^2 = t^s\varphi^2(\omega) + t^p\dot{\varphi}^1(\omega), \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, p \neq s, \qquad (2.85)$$

$$u^1 = \frac{2}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^1(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, u^2 = t^s(\varphi^2(\omega) + \ln t\dot{\varphi}^1(\omega)), \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}. \qquad (2.86)$$

Як наслідок, отримали, що анзаци (2.40)–(2.45) перейдуть у ліївські анзаци для системи (2.14), а анзаци (2.46)–(2.49) – у нелокальні анзаци (2.80), (2.83), (2.85), (2.86).

2.3.2. Нелокальні анзаци системи рівнянь ван дер Ваальса, одержані з другого образу

Подіємо композицією нелокальних перетворень, а саме (2.5), (2.12), (2.7) на вже знайдені ліївські анзаци системи (2.16). Розглянемо перетворення кожного з анзаців окремо.

1) Випадок $\mu \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (2.55):

$$z^1 = \psi^1(\omega) + kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + mx_0.$$

Перепишемо цей анзац у вигляді

$$\begin{gathered} z^1 = \psi^1(\omega) - 2kx_0\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \\ \omega = x_1 + mx_0. \end{gathered} \qquad (2.87)$$

Подіявши на (2.87) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2kx_0\Psi^2(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - kx_0^2, \omega = x_1 + mx_0,$$

де $\Psi^1, \Psi^2(\omega) - kx_0^2$ – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2kt\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega) - kx_0^2, \quad \omega = w^2 + mt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2ktx, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - mt, \quad \omega = x + kt^2. \qquad (2.88)$$

Продиференціювавши анзац (2.88) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - 2kt, \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = x + kt^2. \qquad (2.89)$$

Як наслідок, маємо, що анзац (2.55) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.31).

Розглянемо анзац (2.56):

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = \sqrt{x_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0.$$

Подіявши на (2.56) перетворенням (2.5), одержимо

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + m\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2. Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + m\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, отримаємо такий анзац:

$$w^1 = \Psi^1, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - m\ln t, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \qquad (2.90)$$

Продиференціювавши анзац (2.90) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x.$$

Отже, маємо, що анзац (2.56) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.30).

2) Випадок $\mu = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Розглянемо анзац (2.57)

$$z^1 = \psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k\ln x_0.$$

Подіявши на (2.57) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + k\ln x_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = t^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + k\ln t.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо анзац

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - k\ln t, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.91}$$

Продиференціювавши анзац (2.91) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.92}$$

Як наслідок, анзац (2.57) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.34) при $n = -\frac{1}{2}$.

Розглянемо анзац (2.58)

$$z^1 = x_0^k\psi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{k+\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_1x_0^k.$$

Подіявши на (2.58) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega), \quad v^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1x_0^k,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega), \quad x = t^{\frac{1}{2}}\Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 t^k.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$w^1 = \Psi^1, \quad w^2 = t^{-k}\Psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.93}$$

Продиференціювавши анзац (2.93) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}}\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-k-\frac{1}{2}}\psi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x.$$

Отже, маємо, що анзац (2.58) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.34) при $n = -k - \frac{1}{2}$.

Тепер розглянемо анзац (2.59):

$$z^1 = \psi^1(\omega) + m\psi^2(\omega), \quad z^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0.$$

Подіявши на (2.59) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + m\Psi^2(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_1 + kx_0,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + m\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = w^2 + kt.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо анзац:

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + mx, \quad w^2 = \Psi^2(\omega) - kt, \quad \omega = x. \tag{2.94}$$

Продиференціювавши анзац (2.94) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = \psi^1(\omega), \quad u^2 = \psi^2(\omega), \quad \omega = x. \tag{2.95}$$

Отже, маємо, що анзац (2.59) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.36) при $n = 0,\ k = 0,\ m = 1$.

Розглянемо анзац (2.60):

$$z^1 = [\psi^1(\omega) + mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \quad \omega = e^{kx_0}x_1.$$

Перепишемо цей анзац у вигляді

$$\begin{gathered} z^1 = [\psi^1(\omega) - 2mx_0\psi^2(\omega)]e^{kx_0}, \quad z^2 = e^{kx_0}\psi^2(\omega), \\ \omega = e^{kx_0}x_1. \end{gathered} \tag{2.96}$$

Подіявши на (2.96) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - 2mx_0\Psi^2(\omega), \quad v^2 = \Psi^2(\omega) - mx_0^2, \quad \omega = e^{kx_0}x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $\psi^1, \psi^2 + mx_0^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - 2mt\Psi^2(\omega), \quad x = \Psi^2(\omega) - mt^2, \quad \omega = e^{kt}w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, матимемо анзац:

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) - 2mt(x + mt^2), \quad w^2 = e^{-kt}\Psi^2(\omega), \\ \omega = x + mt^2. \end{gathered} \tag{2.97}$$

Продиференціювавши анзац (2.97) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$u^1 = \psi^1(\omega) - 2mt, \quad u^2 = e^{-kt}\psi^2(\omega), \quad \omega = x + mt^2. \tag{2.98}$$

Отже, маємо, що анзац (2.60) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у ліївський анзац (2.35) при $n = -k$.

3) Випадок $\mu = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Розглянемо анзац (2.61):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2+1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1},$$
$$\omega = \ln x_0 + m \arctan x_1.$$

Подіявши на (2.61) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(x_1^2+1),\ v^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega),\ \omega = \ln x_0 + m \arctan x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $m\psi^1$, $m\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln((w^2)^2+1), \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \omega = \ln t + m \arctan w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(\tan^2\alpha + 1), \quad w^2 = \tan\alpha, \\ \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + qt. \end{gathered} \tag{2.99}$$

Продиференціювавши анзац (2.99) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$\begin{gathered} u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}(\varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega)\tan\alpha), \\ u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\dot{\varphi}^2(\omega)\cos^{-2}\alpha, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \end{gathered} \tag{2.100}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Отже, маємо, що анзац (2.61) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у нелокальний анзац для системи (2.14).

Розглянемо анзац (2.62):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + 2x_1}{x_1^2+1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{x_1^2+1}, \quad \omega = x_0 + m \arctan x_1.$$

Подіявши на (2.62) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(x_1^2 + 1), \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + m \arctan x_1,$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $m\psi^1, m\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln((w^2)^2 + 1), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + m \arctan w^2.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln(\tan^2 \alpha + 1), \quad w^2 = \tan \alpha, \\ \omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + qt, \quad q = -\frac{1}{m}. \end{gathered} \tag{2.101}$$

Продиференціювавши анзац (2.101) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), отримаємо

$$\begin{gathered} u^1 = \varphi^1(\omega) + 2\dot{\varphi}^2(\omega) \tan \alpha, \quad u^2 = \dot{\varphi}^2(\omega) \cos^{-2} \alpha, \\ \omega = x, \end{gathered} \tag{2.102}$$

де $\varphi^1(\omega) = m\Psi^1(\omega), \quad \varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Отже, маємо, що анзац (2.62) під дією перетворень (2.5), (2.12), (2.7) переходить у нелокальний анзац для системи (2.14).

4) Випадок $\mu = -1, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Розглянемо анзац (2.63):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 + k \arctan m e^{x_1},$$

де $\sigma = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$. Подіявши на (2.63) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + k \arctan m e^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $\frac{1}{mkc_2}\psi^1, \frac{1}{mkc_2}\psi^2$. Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$x = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + k \arctan m e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$w^1 = \Psi^1 + \ln \frac{2c_2 m}{\sin 2\alpha}, \quad w^2 = \ln \frac{1}{m} + \ln \tan \alpha, \quad \omega = x, \tag{2.103}$$

де $\alpha = \varphi^2(\omega) + qt$.

Продиференціювавши анзац (2.103) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega) \cot \alpha, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin \alpha}, \quad \omega = x, \tag{2.104}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (2.64):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'}{\sigma}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sigma}, \quad \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1}.$$

Подіявши на (2.64) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $\frac{1}{nkc_2}\psi^1$, $\frac{1}{nkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t - k \arctan n e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1 + \ln \frac{2c_2 n}{\sinh 2\alpha}, \quad w^2 = \ln \frac{1}{m} + \ln \tanh \alpha, \\ \omega = x, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \end{gathered} \tag{2.105}$$

Продиференціювавши анзац (2.105) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega) \coth \alpha, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sinh \alpha}, \quad \omega = x, \tag{2.106}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (2.65):

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + le^{x_1}.$$

Подіявши на (2.65) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - x_1, \quad w^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + le^{w^2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - w^2, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + le^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) - \ln\left(\Psi^2(\omega) - \frac{1}{l}t\right), \\ w^2 = \ln\left(\Psi^2(\omega) - \frac{1}{l}t\right), \\ \omega = x. \end{gathered} \tag{2.107}$$

Продиференціювавши анзац (2.107) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \frac{\dot\varphi^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad u^2 = \frac{\dot\varphi^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + t}, \quad \omega = x, \tag{2.108}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (2.66):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma(x_1)}, \omega = \ln x_0 + k\arctan me^{x_1},$$

де $\sigma(x_1) = c_1e^{x_1} + c_2e^{-x_1}$. Подіявши на (2.66) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sigma, \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + k\arctan me^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $\frac{1}{mkc_2}\psi^1, \frac{1}{mkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \omega = \ln t + k \arctan m e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \frac{2c_2 m}{\sin 2\alpha}, \quad w^2 = \ln \frac{1}{m} + \ln \tan \alpha, \\ \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \end{gathered} \tag{2.109}$$

Продиференціювавши анзац (2.109) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$\begin{gathered} u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega) \cot \alpha, \\ u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin \alpha}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \end{gathered} \tag{2.110}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt$.

Розглянемо анзац (2.67):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sigma(x_1)}, \omega = \ln x_0 - k \arctan n e^{x_1},$$

де $\sigma(x_1) = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{-x_1}$. Подіявши на (2.64) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(x_1), \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \omega = x_0 - k \arctan n e^{x_1},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій $\frac{1}{nkc_2}\psi^1, \frac{1}{nkc_2}\psi^2$.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln \sigma(w^2), \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \omega = \ln t - k \arctan n e^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$w^1 = \Psi^1 + \ln\frac{2c_2 n}{\sinh 2\alpha}, \quad w^2 = \ln\frac{1}{m} + \ln\tanh\alpha, \\ \omega = x, \quad \alpha = \Psi^2(\omega) + qt. \tag{2.111}$$

Продиференціювавши анзац (2.111) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \dot{\varphi}^2(\omega)\coth\alpha, \\ u^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sinh\alpha}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \tag{2.112}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

Розглянемо анзац (2.68):

$$z^1 = e^{x_1}\psi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = \sqrt{x_0}e^{x_1}\psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + le^{x_1}.$$

Подіявши на (2.68) перетворенням (2.5), отримаємо

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - x_1, \quad w^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + le^{w^2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$v^1 = \Psi^1(\omega) - w^2, \quad v^2 = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + le^{w^2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$w^1 = \Psi^1(\omega) - \ln\left(\Psi^2(\omega) - \frac{1}{l}t\right), \\ w^2 = \ln\left(\Psi^2(\omega) - \frac{1}{l}t\right), \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{2.113}$$

Продиференціювавши анзац (2.113) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi^1(\omega) - \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \\
u^2 &= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}},
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega)$.

5) Випадок $\mu = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Розглянемо анзац (2.69):

$$
z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2}.
$$

Подіявши на (2.69) перетворенням (2.5), отримаємо

$$
v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin x_1, \quad v^2 = \Psi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2},
$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$
w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin(w^2), \quad x = \Psi^2(\omega), \quad \omega = t + k\tan\frac{w^2}{2}.
$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$
\begin{aligned}
w^1 &= \Psi^1 + \ln 2\frac{e^t\Psi^2(\omega)}{A}, \\
w^2 &= 2\arctan e^{-t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = x.
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

Продиференціювавши анзац (2.115) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \varphi^1(\omega) - 2\frac{\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega))}{A}, \\
u^2 &= 2e^t\frac{\dot{\varphi}^2(\omega))}{A}, \quad \omega = x,
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad A = (\varphi^2)^2 + e^{2t}$.

Розглянемо анзац (2.70):

$$z^1 = \frac{\psi^1(\omega) + \cos x_1}{\sin x_1}, \quad z^2 = \sqrt{x_0}\frac{\psi^2(\omega)}{\sin x_1}, \quad \omega = \ln x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2}.$$

Подіявши на (2.70) перетворенням (2.5), отримаємо

$$v^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin x_1, \quad v^2 = \sqrt{x_0}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln x_0 + \ln\tan\frac{x_1}{2},$$

де Ψ^1, Ψ^2 – первісні для функцій ψ^1, ψ^2.

Під дією перетворення годографа (2.12) цей анзац набуде вигляду

$$w^1 = \Psi^1(\omega) + \ln\sin w^2, \quad x = \sqrt{t}\Psi^2(\omega), \quad \omega = \ln t + \ln\tan\frac{w^2}{2}.$$

Помінявши місцями інваріантні змінні Ψ^2 і ω, одержимо такий анзац:

$$\begin{gathered} w^1 = \Psi^1(\omega) + \frac{2t\Psi^2(\omega)}{(\Psi^2(\omega))^2 + t^2}, \\ w^2 = 2\arctan\frac{\varphi^2(\omega)}{t}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}. \end{gathered} \tag{2.117}$$

Продиференціювавши анзац (2.117) за змінною x та застосувавши перетворення (2.7), маємо нелокальний анзац для системи (2.14):

$$\begin{gathered} u^1 = \frac{1}{\sqrt{t}}[\varphi^1(\omega) - 2\frac{\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega)}{B}], \\ u^2 = 2\sqrt{t}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{B}, \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \end{gathered} \tag{2.118}$$

де $\varphi^2(\omega) = \Psi^2(\omega), \quad B = (\varphi^2)^2 + t^2$.

Як наслідок отримали, що анзаци (2.55)–(2.60) перейдуть у лiївські анзаци для системи (2.14), а анзаци (2.61)–(2.70) – в нелокальні анзаци (2.100), (2.102), (2.104), (2.106), (2.108), (2.110), (2.112), (2.114), (2.116), (2.118).

2.3.3. Редукція системи рівнянь ван дер Ваальса

Підставивши анзаци (2.80), (2.83), (2.85), (2.86) та (2.100), (2.102), (2.104), (2.106), (2.108), (2.110), (2.112), (2.114), (2.116), (2.118) у систему (2.14), одержимо такі редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь:

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered} \dot{z} - z^2 - p = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - 2z\dot{\varphi}^2 - (2z^2 + 2p + s)\varphi^2 = 0, \end{gathered} \tag{2.119}$$

$$\begin{gathered} \dot{z} - z^2 - p = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - 2z\dot{\varphi}^2 - (2z^2 + 2p + 1)\varphi^2 - \dot{\varphi}^1 = 0, \end{gathered} \tag{2.120}$$

$$\begin{gathered} \dot{z} - z^2 + \frac{\omega}{2}z - p - \frac{1}{2} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (2z - \frac{\omega}{2})\dot{\varphi}^2 - (2z^2 - \omega z + 2p + s + 1)\varphi^2 = 0, \end{gathered} \tag{2.121}$$

$$\begin{gathered} \dot{z} - z^2 + \frac{\omega}{2}z - s - \frac{1}{2} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (2z - \frac{\omega}{2})\dot{\varphi}^2 - (2z^2 - \omega z + 3s + 1)\varphi^2 - \dot{\varphi}^1 = 0, \end{gathered} \tag{2.122}$$

де $z = \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}$;

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi}^1 = \varphi^1\dot{\varphi}^1 + 4\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\omega\dot{\varphi}^1 + \varphi^1), \\ \ddot{\varphi}^2 = (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2, \end{gathered} \tag{2.123}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi}^1 = \varphi^1\dot{\varphi}^1 + 4\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 = \varphi^1\dot{\varphi}^2; \end{gathered} \tag{2.124}$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi}^1 = \varphi^1\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 = \varphi^1\dot{\varphi}^2 - \varphi^2, \end{gathered} \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= [\varphi^1 - \frac{1}{2}(\varphi^1 - \omega)]\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi^2; \end{aligned} \tag{2.126}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 - \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + q, \end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + q, \end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \varphi^1\dot{\varphi}^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= \varphi^1\dot{\varphi}^2 + 1, \end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= -\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 + (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \frac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 + q, \end{aligned} \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= \dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}^2 + (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \frac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2 + q, \end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}^1 &= (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^1 - \frac{1}{2}\varphi^1, \\ \ddot{\varphi}^2 &= (\varphi^1 - \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{2.132}$$

2.4. Нелокальні анзаци і редукція образів системи рівнянь ван дер Ваальса

Задачу знаходження нелокальних анзаців та проведення редукції можна розв'язати і для образів O_1 і O_2, використавши ліївські анзаци системи рівнянь ван дер Ваальса та перетворення P_1, P_2.

Для відшукання нелокальних анзаців першого образу системи рівнянь ван дер Ваальса подіємо композицією нелокальних перетворень (2.5)–(2.7) на вже знайдені ліївські анзаци системи (2.14). Як наслідок, одержимо, що частина анзаців системи (2.14) перейде у ліївські анзаци для системи (2.15), а інші анзаци – у такі нелокальні анзаци:

$$
\begin{gathered}
z^1 = \frac{1}{\varphi^1(\omega) - 2kx_0}, \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega) - 2kx_0}, \\
\omega = \tau + kx_0^2, \quad \tau_1 = z^1,
\end{gathered} \tag{2.133}
$$

$$
\begin{gathered}
z^1 = \frac{\sqrt{x_0^2+1}}{\varphi^1(\omega) + x_0\omega}, \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega) + x_0\omega}, \\
\omega = \frac{\tau}{\sqrt{x_0^2+1}}, \quad \tau_1 = z^1.
\end{gathered} \tag{2.134}
$$

Аналогічним чином одержимо нелокальний анзац для системи (2.16):

$$
\begin{gathered}
z^1 = \varphi^1(\omega) + x_0\varphi^2(\omega)\dot{\varphi}^2(\omega), \\
z^2 = \sqrt{x_0^2+1}\dot{\varphi}^2(\omega), \quad \omega = x_1.
\end{gathered} \tag{2.135}
$$

Якщо підставити анзаци (2.133), (2.134) у систему (2.15), то одержимо такі редуковані системи рівнянь:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 + 2k = 0, \\
\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^1\varphi^2 = 0;
\end{gathered} \tag{2.136}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1\dot{\varphi}^1 + \mu\varphi^2\dot{\varphi}^2 - \omega = 0, \\
\lambda_2\ddot{\varphi}^2 - \varphi^1\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^1\varphi^2 = 0.
\end{gathered} \tag{2.137}
$$

Якщо підставити анзац (2.135) у систему (2.16), то отримаємо таку редуковану систему рівнянь:

$$
\begin{gathered}
(2\lambda_1\dot{\varphi}^1 - \frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\lambda_2}(\varphi^1)^2 + \mu)\ddot{\varphi}^2 - \\
-(\lambda_1\ddot{\varphi}^1 - \frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\lambda_2}\varphi^1\dot{\varphi}^1)\dot{\varphi}^2 - (\dot{\varphi}^2)^4\varphi^2 = 0, \\
\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \varphi^1\dot{\varphi}^2 = 0.
\end{gathered} \tag{2.138}
$$

2.5. Точні розв'язки системи рівнянь ван дер Ваальса

Якщо розв'язати редуковані системи (2.119)–(2.132) та використати відповідні анзаци, то можна побудувати точні розв'язки системи рівнянь ван дер Ваальса. Наведемо деякі з них.

Розв'язками редукованої системи (2.119) є функції

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= -\frac{c_1}{\omega}, \\ \varphi^2 &= c_2\omega + \frac{c_3}{\omega^2}, \end{aligned} \tag{2.139}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \frac{c_1}{\cos\omega}, \\ \varphi^2 &= -2\ln\cos\omega + c_2\omega + c_3, \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \frac{c_1}{\cosh\omega}, \\ \varphi^2 &= -2\ln\cosh\omega + c_2\omega + c_3, \end{aligned} \tag{2.141}$$

де $c_1,\ c_2,\ c_3$ – довільні сталі.

Використавши анзац (2.80), розмножений перетвореннями

$$t \to t, \quad x \to x + \theta t, \quad u^1 \to u^1 - \theta, \quad u^2 \to u^2, \tag{2.142}$$

та розв'язки (2.139)–(2.141), знаходимо розв'язки системи (2.14):

$$\begin{aligned} u^1 &= -\frac{2}{x+\theta t} + \theta, \\ u^2 &= c_2(x+\theta t) + \frac{c_3 - 2c_1 e^{-mt}}{(x+\theta t)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^1 &= 2\tan(x+\theta t) + \theta, \\ u^2 &= -2\ln\cos(x+\theta t) + 2c_1 e^{-mt}\frac{\tan(x+\theta t)}{\cos(x+\theta t)} + c_2(x+\theta t) + c_3, \\ u^1 &= -2\tanh(x+\theta t) + \theta, \\ u^2 &= -2\ln\cosh(x+\theta t) - 2c_1 e^{-mt}\frac{\tanh(x+\theta t)}{\cosh(x+\theta t)} + c_2(x+\theta t) + c_3. \end{aligned}$$

Розв'язками редукованої системи (2.125) є такі функції (див., [18], [185]):

$$\varphi^1 = -\frac{2}{\omega}, \qquad \varphi^2 = \frac{\cos\omega}{\omega}; \tag{2.143}$$

$$\varphi^1 = \tan\frac{\omega}{2}, \qquad \varphi^2 = \frac{c_1\cos\frac{\sqrt5}{2}\omega + c_2\sin\frac{\sqrt5}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}, \tag{2.144}$$

$$\varphi^1 = -\tanh\frac{\omega}{2}, \qquad \varphi^2 = \frac{c_1\cos\frac{\sqrt3}{2}\omega + c_2\sin\frac{\sqrt3}{2}}{\cosh\frac{\omega}{2}}, \tag{2.145}$$

де c_1, c_2 – довільні сталі.

Використавши анзац (2.116), розмножений перетвореннями Галілея (2.142) та розв'язки (2.143)–(2.145), знаходимо такі розв'язки системи (2.14):

$$u^1 = \frac{(x+\theta t)\sin[2(x+\theta t)] + 2\cos^2(x+\theta t)}{(x+\theta t)\cos^2(x+\theta t) + e^{2t}(x+\theta t)^3} - \frac{1}{x+\theta t} + \theta, \qquad u^2 = 2e^t\frac{(x+\theta t)\sin(x+\theta t) + \cos(x+\theta t)}{\cos^2(x+\theta t) + e^{2t}(x+\theta t)^2}, \tag{2.146}$$

$$u^1 = \tan\frac{x+\theta t}{2} - \frac{1}{\cos\frac{x+\theta t}{2}}\frac{C[2C_x\cos\frac{x+\theta t}{2} + C\sin\frac{x+\theta t}{2}]}{C^2 + e^{2t}\cos^2\frac{x+\theta t}{2}} + \theta, \qquad u^2 = e^t\frac{2C_x\cos\frac{x+\theta t}{2} + C\sin\frac{x+\theta t}{2}}{C^2 + e^{2t}\cos^2\frac{x+\theta t}{2}},$$

$$u^1 = -\tan\frac{x+\theta t}{2} - \frac{1}{\cosh\frac{x+\theta t}{2}}\frac{D[2D_x\cosh\frac{x+\theta t}{2} - D\sinh\frac{x+\theta t}{2}]}{D^2 + e^{2t}\coth^2\frac{x+\theta t}{2}} + \theta, \qquad u^2 = e^t\frac{2D_x\cosh\frac{x+\theta t}{2} - D\sin\frac{x+\theta t}{2}}{D^2 + e^{2t}\cosh^2\frac{x+\theta t}{2}},$$

де $C = c_1\cos\frac{\sqrt5}{2}(x+\theta t) + c_2\sin\frac{\sqrt5}{2}(x+\theta t)$, $D = c_1\cos\frac{\sqrt3}{2}(x+\theta t) + c_2\sin\frac{\sqrt3}{2}(x+\theta t)$.

Розв'язком редукованої системи (2.129) є функції

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= -\frac{2}{\omega},\\ \varphi^2 &= \frac{c_1}{\omega} + c_2 + \frac{\omega^2}{6},\end{aligned} \tag{2.147}$$

де $c_1,\ c_2$ – довільні сталі.

Використавши анзац (2.108), розмножений перетвореннями (2.142) та розв'язок (2.147), знаходимо розв'язки системи (2.14):

$$\begin{aligned}u^1 &= -\frac{2}{x+\theta t} - \frac{2(x+\theta t)^3 - c_1}{(x+\theta t)^4 + (6t+c_2)(x+\theta t)^2 + c_1(x+\theta t)} + \theta,\\ u^2 &= -\frac{2(x+\theta t)^3 - c_1}{(x+\theta t)^4 + (6t+c_2)(x+\theta t)^2 + c_1(x+\theta t)}.\end{aligned}$$

Отримані розв'язки системи рівнянь ван дер Ваальса можна вивчити з точки зору можливості їх фізичного застосування. Покажемо це на прикладі розв'язку (2.146). Неважко бачити, що при $t \to \infty$ і $x \to \infty$ $u^1 \to \theta,\ u^2 \to 0$. Це дає підстави стверджувати, що цей розв'язок може мати фізичне застосування. На рис. 2.1 і 2.2 наведено графіки такого розв'язку за таких обмежень: $\theta = 1,\ t \in \{2, 8\},\ x \in \{2, 10\}$.

Розв'язавши редуковані системи (2.136)–(2.138) та використавши відповідні анзаци, можна знайти точні розв'язки обох образів системи рівнянь ван дер Ваальса. Оскільки системи диференціальних рівнянь (2.15) та (2.16) є не достатньо вивченими з точки зору фізичного застосування і не відомо, чи вони описують конкретні фізичні процеси, то їхні розв'язки тут не наведено.

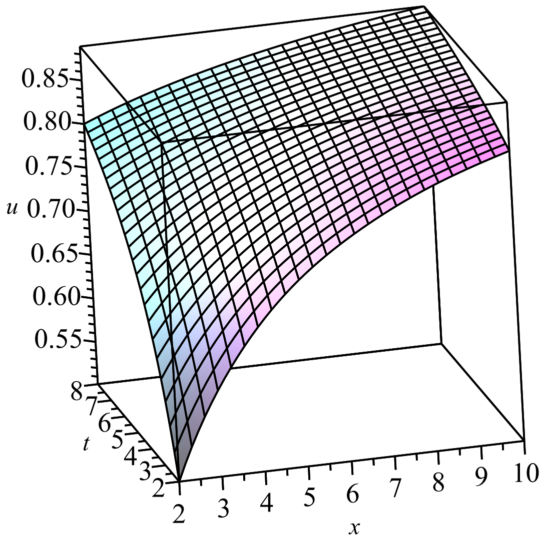


Рис. 2.1: Графік функції u^1

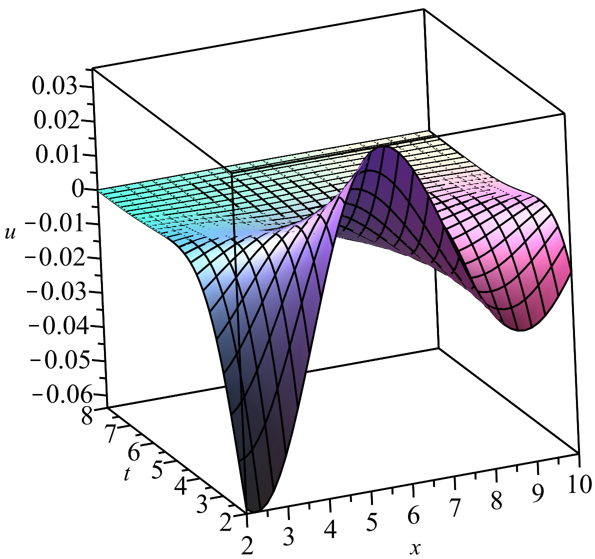


Рис. 2.2: Графік функції u^2

2.6. Нелокальні симетрії системи рівнянь ван дер Ваальса

Наявність нелокальних анзаців означає наявність нелокальних симетрій цієї системи. Кожному нелокальному анзацу відповідає нелокальний оператор. Знайдемо нелокальні оператори, які відповідають нелокальним анзацам системи рівнянь ван дер Ваальса. Наведемо оператори, які породжують лієвські анзаци першого та другого образу:

для випадку $\mu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$X_1 = 2\partial_0 - 2m\partial_1 - me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}, \tag{2.148}$$

$$X_2 = 4m\partial_1 - 2x_0\partial_0 - z^1\partial_{z^1} + 2me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}, \tag{2.149}$$

$$X_3 = m\partial_0 - \partial_1 - (x_1^2\partial_1 - 2x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}) + 2\partial_{z^1}), \tag{2.150}$$

$$\begin{gathered} X_4 = 2\partial_1 - m(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) + 2(x_1^2\partial_1 - \\ -2x_1(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}) + 2\partial_{z^1}); \end{gathered} \tag{2.151}$$

для випадку $\mu = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{gathered} X_5 = km\partial_0 - m^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - \\ -z^2\partial_{z^2}) - e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{2.152}$$

$$\begin{gathered} X_6 = kn\partial_0 + n^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ -e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{2.153}$$

$$X_7 = l\partial_0 - e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \tag{2.154}$$

$$\begin{gathered} X_8 = km(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) - 2m^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - \\ -z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - 2e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{2.155}$$

$$\begin{gathered} X_9 = kn(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) - 2n^2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - \\ -z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) + 2e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}), \end{gathered} \tag{2.156}$$

$$X_{10} = l(2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}) + 2e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}); \tag{2.157}$$

для випадку $\mu=1, \quad \lambda_1=\lambda_2=1$

$$X_{11}=\partial_0-\sin x_1(\partial_1-\partial_{z^1})+\cos x_1(z^1\partial_{z^1}+z^2\partial_{z^2}), \qquad (2.158)$$

$$\begin{gathered}X_{12}=2x_0\partial_0+z^2\partial_{z^2}-2\sin x_1(\partial_1-\partial_{z^1})+\\+2\cos x_1(z^1\partial_{z^1}+z^2\partial_{z^2}).\end{gathered} \qquad (2.159)$$

Подіявши перетвореннями, оберненими до P_1, на оператори (2.148)–(2.149) та перетвореннями, оберненими до P_2, на оператори (2.152)–(2.151) отримаємо такі нелокальні оператори для системи ван дер Ваальса:

для випадку $\mu=0, \quad \lambda_1=\lambda_2=1$

$$Q_1=\partial_t-\frac{m}{2}e^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2}, \qquad (2.160)$$

$$Q_2=2t\partial_t+x\partial_x-u^1\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}-2me^{\frac{v^1}{2}}u^1\partial_{u^2}, \qquad (2.161)$$

$$Q_3=m\partial_t-2u^2\partial_{u^1}-2v^2u^2\partial_{u^2}, \qquad (2.162)$$

$$\begin{gathered}Q_4=2t\partial_t+mx\partial_x-(mu^1+4u^2)\partial_{u^1}-\\-(mu^2+4v^2u^2)\partial_{u^2};\end{gathered} \qquad (2.163)$$

для випадку $\mu=-1, \quad \lambda_1=\lambda_2=1$

$$\begin{gathered}Q_5=km\partial_t+(m^2e^{v^2}+e^{-v^2})u^2\partial_{u^1}+\\+(m^2e^{v^2}-e^{-v^2})u^2\partial_{u^2},\end{gathered} \qquad (2.164)$$

$$\begin{gathered}Q_6=kn\partial_t-(n^2e^{v^2}-e^{-v^2})u^2\partial_{u^1}-\\-(n^2e^{v^2}+e^{-v^2})u^2\partial_{u^2},\end{gathered} \qquad (2.165)$$

$$Q_7=l\partial_t-e^{-v^2}u^2(\partial_{u^1}-\partial_{u^2}), \qquad (2.166)$$

$$\begin{gathered}Q_8=2kmt\partial_t+kmx\partial_x+[kmu^1+2(m^2e^{v^2}+\\+e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1}+[kmu^2+2(m^2e^{v^2}-e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2},\end{gathered} \qquad (2.167)$$

$$\begin{gathered}Q_9=2knt\partial_t+knx\partial_x-[knu^1+2(n^2e^{v^2}-\\-e^{-v^2})u^2]\partial_{u^1}-[knu^2+2(n^2e^{v^2}+e^{-v^2})u^2]\partial_{u^2},\end{gathered} \qquad (2.168)$$

$$Q_{10}=2l\partial_t+lx\partial_x-(lu^1-2e^{v^2}u^2)(\partial_{u^1}+\partial_{u^2}); \qquad (2.169)$$

для випадку $\mu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$Q_{11} = \partial_t + u^2 \sin v^2 \partial_{u^1} - u^2 \cos v^2 \partial_{u^2}, \tag{2.170}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x - (u^1 - 2u^2 \sin v^2)\partial_{u^1} - \\ -(u^1 + 2u^2 \cos v^2 \partial_{u^2}), \end{aligned} \tag{2.171}$$

де $v^1 = \int u^1 dx$, $v^2 = \int u^2 dx$.

Процедуру отримання нелокальних операторів (2.160)–(2.163) з ліївських операторів (2.148)–(2.151) за допомогою перетворень P_1 та P_2 наведемо на прикладі операторів (2.148), (2.152) та (2.160), (2.164).

Подіявши оператором (2.148):

$$X_1 = 2\partial_0 - 2m\partial_1 - me^{\frac{x_1}{2}}\partial_{z^2}$$

на z^1 та z^2 та використавши умову

$$Xz^1 = 0, \quad Xz^2 = 0, \tag{2.172}$$

отримаємо

$$2z^1_0 - 2mz^1_1 = 0, \quad 2z^2_0 - 2mz^1_1 + 2me^{\frac{x_1}{2}} = 0. \tag{2.173}$$

Подіявши на (2.173) перетворенням (2.7) та проінтегрувавши за змінною x_1, маємо

$$2w^1_0 - 2mw^1_1 = 0, \quad 2w^2_0 - 2mw^1_1 + 2me^{\frac{x_1}{2}} = 0. \tag{2.174}$$

Подіявши перетворенням годографа (2.6) на (2.174)

$$w^1_0 = -\frac{v^1_t}{v^1_x}, \quad w^2_0 = v^2_t - \frac{v^1_t v^2_x}{v^1_x}, \quad w^1_1 = \frac{1}{v^1_x}, \quad w^2_1 = \frac{v^2_x}{v^1_x},$$

одержимо

$$v^1_t + m = 0, \quad v^2_t + me^{\frac{v^1}{2}} = 0. \tag{2.175}$$

Продиференціювавши систему (2.175) за змінною x та застосувавши перетворення (2.5), маємо

$$u^1_t = 0, \quad u^2_t + \frac{m}{2}e^{\frac{v^1}{2}}u^1 = 0. \tag{2.176}$$

Системі (2.176) відповідає оператор (2.160).

Отже, маємо, що ліївський оператор (2.148) переходить у нелокальний оператор(2.160).

Подіявши оператором (2.152):

$$X_3 = km\partial_0 - m^2 e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}) - \\ -e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2})$$

на z^1 та z^2 та використавши умову (2.172), отримаємо

$$\begin{gathered} kmz_0^1 - m^2 e^{x_1}(z_1^1 + z^1 - 1) - e^{-x_1}(z_1^1 - z^1 - 1) = 0, \\ kmz_0^2 - m^2 e^{x_1}(z_1^2 + z^2) - e^{-x_1}(z_1^2 - z^2) = 0. \end{gathered} \tag{2.177}$$

Подіявши на (2.177) перетворенням (2.7) та проінтегрувавши за змінною x_1, маємо

$$\begin{gathered} kmw_0^1 - m^2 e^{x_1}(w_1^1 - 1) - e^{-x_1}(w_1^1 + 1) = 0, \\ kmw_0^2 - m^2 e^{x_1} w_1^2 - e^{-x_1} w_1^2 = 0. \end{gathered}$$

Подіявши перетворенням годографа (2.12) на цю систему та використавши формули

$$w_0^1 = v_t^1 - \frac{v_t^2 v_x^1}{v_x^2}, \quad w_0^2 = -\frac{v_t^2}{v_x^2}, \quad w_1^1 = \frac{v_x^1}{v_x^2}, \quad w_1^2 = \frac{1}{v_x^2},$$

одержимо

$$kmv_t^1 + m^2 e^{v^2} - e^{-v^2} = 0, \quad kmv_t^2 + m^2 e^{v^2} + e^{-v^2} = 0. \tag{2.178}$$

Продиференціювавши систему (2.178) за змінною x та застосувавши перетворення (2.5), маємо

$$kmu_t^1 + (m^2 e^{v^2} - e^{-v^2})u^2 = 0, \ kmu_t^2 + (m^2 e^{v^2} + e^{-v^2})u^2 = 0. \tag{2.179}$$

Системі (2.179) відповідає оператор (2.164).

Як наслідок, отримаємо, що ліївський оператор (2.152) переходить у нелокальний оператор (2.165).

Отже, показано, що координати ξ^μ та η^a ліївських операторів (2.148)–(2.151) залежать від змінних t, x, z^1, z^2, а координати нелокальних операторів (2.160)–(2.163) – t, x, u^1, u^2, v^1, v^2, де $v^1 = \int u^1 dx$, $v^2 = \int u^2 dx$. Це означає, що оператори (2.160)–(2.171) є операторами потенційних симетрій системи рівнянь ван дер Ваальса (2.14).

2.7. Система рівнянь хемотаксису з конвективним доданком

У сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли зберігається різко окреслена форма кілець хемотаксису і вони рухаються зі швидкістю, що залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксичних властивостей, добре описуються математичними моделями, які ґрунтуються на рівняннях Келлера–Зегеля [153]:

$$\begin{aligned} S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g\,(S)\,b, \\ b_t &= -V\,(b\chi(S)S_x)_x + D_b b_{xx} + k_2 g\,(S)\,b, \end{aligned} \tag{2.180}$$

де $S(t,x)$ – концентрація субстрату-атрактанта, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ – щільність бактерій, $g\,(S)$ – питома швидкість росту бактерій, $\chi\,(S)$ – функція хемотаксичної відповіді, D_S та D_b – коефіцієнти дифузії відповідно, субстрату й бактерій V, k_1, k_2 – сталі, t, x – часова та просторова змінні. Моделлю Келлера–Зегеля та її деякими модифікаціями описуються також формування і поширення хемотаксичних кілець Адлера (див. [93]) та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях у випадку їх взаємодії [17].

Як відомо, кооперативна поведінка найпростіших мікроорганізмів описується також системою вигляду (2.3) із реактивним доданком (див., наприклад, [169]). Проаналізуємо систему

(2.180) за відсутності реактивної складової та наявності конвективної взаємодії бактерій та субстрату-атрактанта:

$$U_t = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x + \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix} \right]_x, \qquad (2.181)$$

де довільні гладкі функції своїх аргументів $f\left(u^1\right)$, $g^1\left(u^1, u^2\right)$, $g^2\left(u^1, u^2\right)$ – коефіцієнти дифузивної та конвективної взаємодії, λ_1, λ_2 – довільні сталі.

Оскільки процеси хемотаксису задовольняють принцип відносності Галілея, Іншими словами, протікають однаково в різних інерційних системах, що рухаються зі сталою швидкістю одна відносно одної, то природно вимагати, щоб і математична модель (2.181) задовольняла той самий принцип відносності, Іншими словами, була інваріантна щодо групи перетворень Галілея. У праці [196] описано всі можливі системи рівнянь реакції–конвекції–дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних і проєктивних перетворень. У цій праці, зокрема, показано, що система рівнянь

$$U_t = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u^2)^2 \right]_x, \qquad (2.182)$$

де μ – const (не втрачаючи загальності, можна покласти $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ із базовими генераторами

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q - u^2\partial_{u^2}, \quad G = t\partial_x + xQ,$$
$$Q = -\frac{1}{2}u^1\partial_{u^1}, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \left(\frac{1}{2}x^2 + t\right)Q - tu^2\partial_{u^2}$$

при $\mu \neq 0$ та алгебри

$$\langle AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2} \rangle$$

при $\mu = 0$.

Оскільки система рівнянь (2.182) задовольняє принцип відносності Галілея і є частинним випадком системи (2.181), а коефіцієнти її конвективних доданків задовольняють умову (2.3), то поставимо задачу застосування перетворень P_1 та P_2 до знаходження нелокальних анзаців, редукції системи рівнянь (2.182) до систем звичайних диференціальних рівнянь і знаходження точних розв'язків системи (2.182).

2.7.1. Образи системи рівнянь хемотаксису (2.182) та їх ліївські симетрії.

Перш за все зауважимо, що при $\mu \neq 0$ система рівнянь (2.182) заміною:

$$t \to \frac{t}{\mu^2}, \quad x \to \frac{x}{\mu}, \quad U \to U$$

зводиться до вигляду (2.182) при $\mu = 1$. Тому надалі будемо вважати, що $\mu \in \{0, 1\}$.

За допомогою перетворень P_1 система (2.182) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{(z^1)^2} & 0 \\ -\frac{(\lambda+1)z^2}{(z^1)^3} & \frac{\lambda}{(z^1)^2} \end{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{z^2}{z^1}\right)^2\right]. \tag{2.183}$$

Теорема 2.6. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності системи рівнянь (2.183) є алгебра з базовими генераторами:*

1) при $\mu = 1$

$$\begin{aligned} A^{bas} = \langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - z^2\partial_{z^2}, \\ D_2 = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}\rangle; \end{aligned} \tag{2.184}$$

2) при $\mu = 0$

$$A^{bas}, z^2\partial_{z^2}. \tag{2.185}$$

На підставі перетворень P_2 система рівнянь (2.182) набуде вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{(z^2)^2}\begin{pmatrix}-1 & (\lambda+1)\frac{z^1}{z^2}\\ -2\frac{z^2}{z^1} & \lambda+2\end{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial x_1}-\frac{\mu}{(z^2)^2}Z\right]. \quad (2.186)$$

Теорема 2.7. *Максимальна в розумінні Лі алгебра інваріантності системи рівнянь (2.186) залежно від значень коефіцієнтів λ та μ задається такими базовими генераторами:*

1) $\lambda \neq 1, \mu = 1:$

$$A^{bas},\quad Q=e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\left(\lambda\partial_1+z^1\partial_{z^1}+z^2\partial_{z^2}\right), \quad (2.187)$$

де $A^{bas}=\langle\partial_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ D=2x_0\partial_0+z^2\partial_{z^2},z^1\partial_{z^1}\rangle;$

2) $\lambda = 1, \mu = 1:$

$$\begin{gathered}A^{bas},\quad Q_1=e^{x_1}\left(\partial_1-2z^1\partial_{z^1}-z^2\partial_{z^2}\right),\\ Q_2=e^{-x_1}\left(\partial_1+z^1\partial_{z^1}+z^2\partial_{z^2}\right);\end{gathered} \quad (2.188)$$

3) $\lambda = 1, \mu = 0:$

$$\begin{gathered}A^{bas},\quad D_1=x_1\partial_1-z^2\partial_{z^2},\\ K=x_1^2\partial_1-3x_1z^1\partial_{z^1}-2x_1z^2\partial_{z^2};\end{gathered} \quad (2.189)$$

4) $\lambda \neq 1, \mu = 0:$

$$A^{bas},\quad D_2=x_1\partial_1-z^1\partial_{z^1}-z^2\partial_{z^2}. \quad (2.190)$$

Доведення. Теореми 2.6, 2.7 доводять стандартним методом С. Лі (див., наприклад, [140, 159, 181, 184]).

Застосуємо ліївські симетрії образів (2.183), (2.186) та перетворення P_1, P_2 для знаходження нелокальних анзаців, які редукують систему рівнянь (2.182) до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що перетворення P_1 та P_2 мають деяку специфіку щодо ліївських симетрій образів системи (2.182). Ця специфіка полягає в тому, що оператори алгебри інваріантності образів, коефіцієнти яких лінійно залежать від змінної x_1, під дією перетворень, обернених до (2.5), (2.7) або (2.5), (2.7), (2.12) переходять в ліївські оператори алгебри інваріантності системи рівнянь (2.182). Тому виключимо з розгляду алгебри операторів інваріантності першого образу (2.184), (2.185), алгебру інваріантності другого образу (2.190) та деякі підалгебри алгебр (2.187), (2.188), (2.189), які не містять операторів Q, Q_1, Q_2 та K.

2.7.2. Ліївські анзаци другого образу.

Застосувавши методи знаходження нееквівалентних ліївських анзаців (див., наприклад, [140,184]) алгебр (2.187)–(2.189), отримуємо наступні результати.

I. $\lambda \neq 1, \mu = 1$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (2.187), які приводять до нелокальних анзаців системи (2.182), мають вигляд

$$\begin{aligned} X_1 = c_2 D + c_3 z^1 \partial_{z^1} + Q = 2c_2 x_0 \partial_0 + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}} \partial_1 + \\ + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_2\right) z^2 \partial_{z^2}, \end{aligned} \tag{2.191}$$

$$\begin{aligned} X_2 = c_0 \partial_0 + c_3 z^1 \partial_{z^1} + Q = c_0 \partial_0 + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}} \partial_1 + \\ + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + e^{-\frac{x_1}{\lambda}} z^2 \partial_{z^2}. \end{aligned} \tag{2.192}$$

Оператори X_1, X_2 породжують такі ліївські анзаци для системи рівнянь (2.186):

$$\begin{gathered} z^1 = x_0^m e^{\frac{x_1}{\lambda}} \varphi^1(\omega),\ z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x_1}{\lambda}} \varphi^2(\omega), \\ \omega = p \ln x_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}},\ p = -\frac{1}{2c_2},\ m = \frac{c_3}{2c_2}, \end{gathered} \tag{2.193}$$

$$\begin{gathered} z^1 = e^{m x_0 + \frac{x_1}{\lambda}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\frac{x_1}{\lambda}} \varphi^2(\omega), \\ \omega = p x_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \quad p = -\frac{1}{c_0}, \quad m = \frac{c_3}{c_0}, \end{gathered} \tag{2.194}$$

де $\varphi^1 = \varphi^1(\omega), \varphi^2 = \varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції.

II. $\lambda = \mu = 1$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (2.188), які приводять до нелокальних анзаців системи (2.182), мають вигляд

$$\begin{gathered}
X_3 = 2c_2 x_0 \partial_0 + e^{-x_1}\partial_1 + \left(e^{-x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + \\
+ \left(e^{-x_1} + c_2\right) z^2 \partial_{z^2}, \\
X_4 = c_0 \partial_0 + e^{-x_1}\partial_1 + \left(e^{-x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + e^{-x_1} z^2 \partial_{z^2}, \\
X_5 = 2x_0 \partial_0 + \left(c_4 e^{x_1} + c_5 e^{-x_1}\right)\partial_1 + \\
+ \left(c_5 e^{-x_1} - 2c_4 e^{x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + \\
+ \left(c_5 e^{-x_1} - c_4 e^{x_1} + 1\right) z^2 \partial_{z^2}, \\
X_6 = \partial_0 + \left(c_4 e^{x_1} + c_5 e^{-x_1}\right)\partial_1 + \\
+ \left(c_5 e^{-x_1} - 2c_4 e^{x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + \\
+ \left(c_5 e^{-x_1} - c_4 e^{x_1}\right) z^2 \partial_{z^2}, \\
X_7 = 2c_2 x_0 \partial_0 + \left(e^{x_1} + c_1\right)\partial_1 + \left(-2e^{-x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} + \\
+ \left(-e^{x_1} + c_2\right) z^2 \partial_{z^2}, \\
X_8 = c_0 \partial_0 + \left(e^{x_1} + c_1\right)\partial_1 + \\
+ \left(-2e^{x_1} + c_3\right) z^1 \partial_{z^1} - e^{x_1} z^2 \partial_{z^2}.
\end{gathered} \tag{2.195}$$

Оператори $X_3, ..., X_8$ породжують такі ліївські анзаци для системи рівнянь (2.186):

$$\begin{gathered}
z^1 = x_0^m e^{x_1} \varphi^1(\omega), \\
z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1} \varphi^2(\omega), \\
\omega = p \ln x_0 + e^{x_1} \\
\left(p = -\frac{1}{2c_2},\ m = \frac{c_3}{2c_2}\right);
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
z^1 = e^{mx_0+x_1}\varphi^1(\omega),\\
z^2 = e^{x_1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = px_0 + e^{x_1}\\
\left(p = -\frac{1}{c_2}, \quad m = \frac{c_2}{c_0}\right);\\[2ex]
z^1 = x_0^k e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1}+1\right)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega),\\
z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1}+1\right)^{-1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = p\ln x_0 + \tan^{-1}(me^{x_1})\\
\left(p = -\frac{1}{2}\sqrt{c_4c_5},\ m = \sqrt{\frac{c_4}{c_5}},\ k = \frac{1}{2}c_3,\ c_4c_5 > 0\right);\\[2ex]
z^1 = e^{kx_0+x_1}\left(m^2e^{2x_1}+1\right)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega),\\
z^2 = e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1}+1\right)^{-1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = px_0 + \tan^{-1}(me^{x_1})\\
\left(p = -\sqrt{c_4c_5}, \quad m = \sqrt{\frac{c_4}{c_5}}, \quad k = c_3\right);\\[2ex]
z^1 = x_0^m e^{-2x_1}\varphi^1(\omega),\\
z^2 = x_0^{p+\frac{1}{2}} e^{-x_1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = x_0^p\left(1+ke^{-x_1}\right)\\
\left(k = c_1, \quad p = \frac{c_1}{2c_2}, \quad m = \frac{2c_1+c_3}{2c_2}\right);\\[2ex]
z^1 = e^{mx_0-2x_1}\varphi^1(\omega),\\
z^2 = e^{px_0-x_1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = e^{px_0}\left(1+ke^{-x_1}\right)\\
\left(k = c_1, \quad m = \frac{2c_1+c_3}{c_0}, \quad p = \frac{c_1}{c_0}\right).
\end{gathered}
\tag{2.196}
$$

III. $\lambda = 1, \mu = 0$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (2.188), які приводять до нелокальних анзаців системи

(2.182), мають вигляд

$$X_9 = 2c_2x_0\partial_0 + x_1^2\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} - (2x_1 - c_2)z^2\partial_{z^2},$$
$$X_{10} = 2c_2x_0\partial_0 + (x_1^2 - 1)\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} + \\ +(-2x_1 + c_2)z^2\partial_{z^2},$$
$$X_{11} = 2c_2x_0\partial_0 + (x_1^2 + 1)\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} + \\ +(-2x_1 + c_2)z^2\partial_{z^2}, \tag{2.197}$$
$$X_{12} = c_0\partial_0 + x_1^2\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2},$$
$$X_{13} = c_0\partial_0 + (x_1^2 - 1)\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2},$$
$$X_{14} = c_0\partial_0 + (x_1^2 + 1)\partial_1 - (3x_1 - c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2}.$$

Оператори $X_9, ..., X_{14}$ породжують такі ліївські анзаци для системи рівнянь (2.186):

$$z^1 = x_0^m x_1^{-3}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} x_1^{-2}\varphi^2(\omega), \\ \omega = p\ln x_0 + x_1^{-1};$$
$$z^1 = x_0^m \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega),\ z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \left(x_1^2 - 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega = p\ln x_0 + \tanh^{-1} x_1;$$
$$z^1 = x_0^m \left(x_1^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega),\ z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \left(x_1^2 + 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega = p\ln x_0 + \tan^{-1} x_1; \tag{2.198}$$
$$z^1 = e^{mx_0} x_1^{-3}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_1^{-2}\varphi^2(\omega), \\ \omega = px_0 + x_1^{-1};$$
$$z^1 = e^{mx_0} \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega),\ z^2 = \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^2(\omega), \\ \omega = px_0 + \tanh^{-1} x_1;$$
$$z^1 = e^{mx_0} \left(x_1^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega),\ z^2 = \left(x_1^2 + 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega = px_0 + \tan^{-1} x_1.$$

У перших трьох анзацах (2.198) $p = \frac{1}{2c_2}$, $m = \frac{c_3}{2c_2}$, а в останніх трьох $p = \frac{1}{c_0}$, $m = \frac{c_3}{c_0}$.

2.7.3. Нелокальні анзаци системи рівнянь хемотаксису

Подіявши перетворенням, оберненим до P_2, на ліївські анзаци системи рівнянь (2.186), які задаються формулами (2.193), (2.194), (2.196), (2.198), одержимо нелокальні анзаци для системи (2.182). Перехід від ліївських анзаців до нелокальних наведемо на прикладі анзацу (2.193).

Подіємо на анзац (2.193) перетворенням (2.7). Як наслідок, одержимо

$$\frac{\partial w^1}{\partial x_1}=x_0^m e^{\frac{x_1}{\lambda}}\varphi^1(\omega),\ \frac{\partial w^2}{\partial x_1}=x_0^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x_1}{\lambda}}\varphi^2(\omega),\qquad \omega=p\ln x_0+e^{\frac{x_1}{\lambda}}. \tag{2.199}$$

Провівши інтегрування за змінною x_1 у формулах (2.199), отримаємо

$$w^1=x_0^m\lambda\Phi^1(\omega),\ w^2=x_0^{\frac{1}{2}}\lambda\Phi^2(\omega),\ \omega=p\ln x_0+e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \tag{2.200}$$

де $\Phi^1(\omega)$ та $\Phi^2(\omega)$ – первісні відповідно для $\varphi^1(\omega)$ та $\varphi^2(\omega)$.

Застосувавши до (2.200) перетворення (2.6), одержимо

$$v^1=t^m\lambda\Phi^1(\omega),\ x=t^{\frac{1}{2}}\lambda\Phi^2(\omega),\ \omega=p\ln t+e^{\frac{v^2}{\lambda}}, \tag{2.201}$$

Помінявши місцями інваріантні змінні $\lambda\Phi^2$ та ω, формули (2.201) запишемо так:

$$v^1=t^m\lambda\Phi^1(\omega),\, v^2=\lambda\ln(\lambda\Phi^2(\omega)-p\ln t),\, \omega=t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.202}$$

Подіявши перетворенням (2.5) на формули (2.202), отримаємо

$$u^1=t^m\lambda\varphi^1(\omega)t^{-\frac{1}{2}},\, u^2=\lambda\frac{\lambda\dot{\Phi}^2(\omega)t^{-\frac{1}{2}}}{\lambda\Phi^2(\omega)-p\ln t},\, \omega=t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.203}$$

Якщо в формулах (2.203) ввести такі позначення:

$$\lambda\varphi^1(\omega)=\psi^1(\omega),\quad \lambda\Phi^2(\omega)=\psi^2(\omega),\quad m-\frac{1}{2}=k,$$

де $\psi^1 = \psi^1(\omega), \psi^2 = \psi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, k – довільна стала, то остаточно маємо нелокальний анзац для системи рівнянь (2.182):

$$u^1 = t^k\psi^1(\omega), \quad u^2 = \lambda t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - p\ln t}, \qquad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{2.204}$$

Здійснивши аналогічні міркування щодо анзаців (2.194), (2.196), (2.198), отримаємо нелокальні анзаци для (2.182). Анзац (2.194) переходить у анзац

$$u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega), \quad u^2 = \lambda\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - pt}, \quad \omega = x. \tag{2.205}$$

Анзаци (2.204) і (2.205) можливі у випадку I. $\lambda \neq 1, \mu = 1$. У випадку II. $\lambda = \mu = 1$ ліївські анзаци (2.196) під дією перетворення, оберненого до P_2 переходять у такі нелокальні анзаци для системи рівнянь (2.182):

$$\begin{gathered}
u^1 = t^k\psi^1(\omega), \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - p\ln t}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x;\\
u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega), \quad u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - pt}, \quad \omega = x;\\
u^1 = t^n\psi^1(\omega)\cos\alpha,\ u^2 = 2t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha},\ \omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\\
\alpha = \psi^2(\omega) - p\ln t;\\
u^1 = e^{kt}\psi^1(\omega)\cos\alpha, u^2 = 2\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha}, \omega = x, \alpha = \psi^2(\omega) - pt;\\
u^1 = t^q(\psi^2(\omega) - t^p)\psi^1(\omega), \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - t^p},\\
\omega = t^{-\frac{1}{2}}x;\\
u^1 = e^{qt}(\psi^2(\omega) - e^{pt})\psi^1(\omega),\ u^2 = -\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) + e^{pt}},\ \omega = x,
\end{gathered} \tag{2.206}$$

де p, q, k, m, n – довільні сталі.

Зауважимо, що перші два анзаци (2.206) є частинними випадками анзаців (2.204), (2.205) при $\lambda = 1$.

Ліївські анзаци (2.198) у випадку III. $\lambda = 1, \mu = 0$ під дією перетворення, оберненого до P_2, переходять у такі нелокальні анзаци для системи (2.182):

$$\begin{gathered}
u^1 = t^k \alpha \psi^1(\omega),\ u^2 = -t^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-2} \dot{\psi}^2(\omega),\ \omega = t^{-\frac{1}{2}} x; \\
u^1 = t^k \psi^1(\omega) \cosh \alpha,\ u^2 = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cosh^2 \alpha},\ \omega = t^{-\frac{1}{2}} x; \\
u^1 = t^k \psi^1(\omega) \cos \alpha,\ u^2 = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha},\ \omega = t^{-\frac{1}{2}} x; \\
u^1 = e^{mt} \beta \psi^1(\omega),\ u^2 = -\beta^{-2} \dot{\psi}^2(\omega),\ \omega = x; \\
u^1 = e^{mt} \psi^1(\omega) \cosh \beta,\ u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cosh^2 \beta},\ \omega = x; \\
u^1 = e^{mt} \psi^1(\omega) \cos \beta,\ u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cos^2 \beta},\ \omega = x,
\end{gathered} \tag{2.207}$$

де $\alpha = \psi^2(\omega) - p \ln t, \beta = \psi^2(\omega) - pt$.

2.7.4. Нелокальні оператори інваріантності системи рівнянь хемотаксису.

Наявність нелокальних анзаців для системи (2.182) означає наявність нелокальних операторів інваріантності розглядуваної системи. Тому природно поставити задачу знаходження таких операторів. Цю задачу можна розв'язати, подіявши на ліївські оператори $X_1, \ldots, X_{14}$ другого образу системи (2.182) оберненим перетворенням P_2. Проілюструємо це на прикладі оператора X_1.

Подіємо оператором X_1 на розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.186) вигляду

$$\begin{aligned}
z^1 - f^1(x_0, x_1) = 0, \\
z^2 - f^2(x_0, x_1) = 0.
\end{aligned}$$

Як наслідок, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2c_2x_0\frac{\partial z^1}{\partial x_0}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial z^1}{\partial x_1}-\left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}}+c_3\right)z^1=0,\\ 2c_2x_0\frac{\partial z^2}{\partial x_0}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial z^2}{\partial x_1}-\left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}}+c_2\right)z^2=0. \end{aligned} \tag{2.208}$$

Застосуємо до системи (2.208) перетворення (2.7). Тоді

$$\begin{aligned} 2c_2x_0\frac{\partial^2 w^1}{\partial x_0\partial x_1}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial^2 w^1}{\partial x_1^2}-\left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}}+c_3\right)\frac{\partial w^1}{\partial x_1}=0,\\ 2c_2x_0\frac{\partial^2 w^2}{\partial x_0\partial x_1}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial^2 w^2}{\partial x_1^2}-\left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}}+c_2\right)\frac{\partial w^2}{\partial x_1}=0. \end{aligned} \tag{2.209}$$

Проінтегрувавши рівняння (2.209) за змінною x_1, одержимо

$$\begin{aligned} 2c_2x_0\frac{\partial w^1}{\partial x_0}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial w^1}{\partial x_1}-c_3w^1=0,\\ 2c_2x_0\frac{\partial w^2}{\partial x_0}+\lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial w^2}{\partial x_1}-c_2w^2=0. \end{aligned} \tag{2.210}$$

Застосувавши до системи рівнянь (2.210) перетворення (2.12), маємо рівняння

$$\begin{aligned} 2c_2t\frac{\partial v^1}{\partial t}+c_2x\frac{\partial v^1}{\partial x}-c_3v^1=0,\\ 2c_2t\frac{\partial v^2}{\partial t}+c_2x\frac{\partial v^2}{\partial x}-\lambda e^{-\frac{v^2}{\lambda}}=0. \end{aligned} \tag{2.211}$$

Продиференціювавши рівняння системи (2.211) за змінною x та використавши перетворення (2.5), отримаємо

$$\begin{aligned} 2c_2t\frac{\partial u^1}{\partial t}+c_2x\frac{\partial u^1}{\partial x}+(c_2-c_3)u^1=0,\\ 2c_2t\frac{\partial u^2}{\partial t}+c_2x\frac{\partial u^2}{\partial x}+\left(c_2+e^{-\frac{v^2}{\lambda}}\right)u^2=0. \end{aligned}$$

Врахувавши, що $c_2=-\frac{1}{2p}, c_3=-\frac{m}{p}$ (див. (2.193)), знаходимо

$$\begin{aligned} 2t\frac{\partial u^1}{\partial t}+x\frac{\partial u^1}{\partial x}-(2m-1)u^1=0,\\ 2t\frac{\partial u^2}{\partial t}+x\frac{\partial u^2}{\partial x}-\left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}}-1\right)u^2=0. \end{aligned} \tag{2.212}$$

Із системи (2.212) одержуємо, що нелокальний оператор, який відповідає ліївському оператору (2.191) і породжує анзац (2.204), набуває вигляду

$$Q_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + (2m-1)u^1\partial_{u^1} + \left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}} - 1\right)u^2\partial_{u^2}, \quad (2.213)$$

де $v^2 = \int u^2 dx$. Аналогічно отримуються інші нелокальні оператори, які відповідають ліївським операторам (2.192), (2.195), (2.197) і породжують анзаци (2.205), (2.206) та (2.207). Наведемо їх остаточний вигляд:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \partial_t + mu^1\partial_{u^1} + pe^{-\frac{v^2}{\lambda}}u^2\partial_{u^2},\\
Q_3 &= 2t\partial_t + x\partial_x + (2m-1)u^1\partial_{u^1} + \left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}} - 1\right)u^2\partial_{u^2},\\
Q_4 &= \partial_t + mu^1\partial_{u^1} + pe^{-v^2}u^2\partial_{u^2},\\
Q_5 &= 2t\partial_t + x\partial_x + \left(2mpe^{v^2} + 2k - 1\right)u^1\partial_{u^1} -\\
&\quad - \left(2mpe^{v^2} - \frac{2p}{m}e^{-v^2} + 1\right)u^2\partial_{u^2},\\
Q_6 &= \partial_t + \left(mpe^{v^2} + k\right)u^1\partial_{u^1} - \left(mpe^{v^2} - \frac{p}{m}e^{-v^2}\right)u^2\partial_{u^2},\\
Q_7 &= 2t\partial_t + x\partial_x - \left(\frac{2p}{k}e^{v^2} + 4p - 2m + 1\right)u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left(\frac{2p}{k}e^{v^2} - 1\right)u^2\partial_{u^2},\\
Q_8 &= \partial_t - \left(\frac{p}{k}e^{v^2} + 2p - m\right)u^1\partial_{u^1} + \frac{p}{k}e^{v^2}u^2\partial_{u^2},\\
Q_9 &= 2t\partial_t + x\partial_x - \left(2pv^2 + 1 - 2m\right)u^1\partial_{u^1} + \left(4pv^2 - 1\right)u^2\partial_{u^2},\\
Q_{10} &= Q_9,\\
Q_{11} &= Q_9,\\
Q_{12} &= \partial_t - \left(pv^2 - m\right)u^1\partial_{u^1} + 2pv^2u^2\partial_{u^2},\\
Q_{13} &= Q_{12},\\
Q_{14} &= Q_{12}.
\end{aligned} \quad (2.214)$$

Проаналізувавши вигляд операторів (2.213), (2.214), приходимо до висновку, що вони є операторами потенційних симетрій системи (2.182).

2.7.5. Редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь для системи рівнянь хемотаксису

Підставивши знайдені нелокальні анзаци в систему рівнянь (2.182), після дещо громіздких перетворень одержуємо такі редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь для визначенння функцій $\psi^1(\omega), \psi^2(\omega)$:

I. $\lambda \neq 1, \mu = 1$:

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - k\psi^1 = 0, \\ \lambda\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0; \end{gathered} \tag{2.215}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}^1 - m\psi^1 = 0, \\ \lambda\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0. \end{gathered} \tag{2.216}$$

II. $\lambda = \mu = 1$:

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - k\psi^1 = 0, \\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0; \end{gathered} \tag{2.217}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}^1 - m\psi^1 = 0, \\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0; \end{gathered} \tag{2.218}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + n\right)\psi^1 = 0, \\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0; \end{gathered} \tag{2.219}$$

$$\ddot{\psi}^1 - \left(\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0; \tag{2.220}$$

$$\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - (p+q)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p\psi^2 = 0; \tag{2.221}$$

$$\ddot{\psi}^1 - (p+q)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p\psi^2 = 0. \tag{2.222}$$

III. $\lambda = 1, \mu = 0:$

Перші три анзаци (2.207) редукують систему диференціальних рівнянь (2.182) до такої системи:

$$\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(r\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0, \tag{2.223}$$

де $r = -1, 0, 1$.

Останні три анзаци (2.207) редукують систему (2.182) до системи вигляду

$$\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(r\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0. \tag{2.224}$$

2.7.6. Точні розв'язки системи рівнянь хемотаксису

Якщо розв'язати редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь (2.215)–(2.224) та використати відповідні анзаци, то отримаємо точні розв'язки системи рівнянь (2.182). Наведемо деякі з них:

1. $\lambda \neq 1, \mu = 1:$

$$u^1 = c_1 t^{-\frac{1}{2}} e^{\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} A^{-1}(\tau) e^{\frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau}{2}} d\tau},$$

$$u^2 = \lambda t^{-\frac{1}{2}} \frac{c_2 e^{\frac{x^2}{4t}} A^{-\frac{2}{\lambda}} \left(t^{-\frac{1}{2}} x\right)}{c_2 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{\frac{\tau^2}{4\lambda}} A^{-\frac{2}{\lambda}}(\tau) d\tau + c_3 - p \ln t}; \tag{2.225}$$

$$u^1 = e^{-t} \cos x,$$

$$u^2 = \lambda \frac{\cos^{-\frac{2}{\lambda}} x \left(\int \cos^{\frac{2}{\lambda}} x dx + c_1\right)}{\int \cos^{-\frac{2}{\lambda}} x \left(\int \cos^{\frac{2}{\lambda}} x dx + c_1\right) dx + \lambda t}. \tag{2.226}$$

2. $\lambda = \mu = 1:$

$$u^1 = e^{-t} \cos x,$$

$$u^2 = \frac{2(x + c_1) + \sin 2x}{(x + c_1) \sin 2x + 4t \cos^2 x}; \tag{2.227}$$

$$u^1 = e^{-s^2 t} \cos sx - e^{-l^2 t} \cos lx,$$

$$u^2 = \frac{s \sin sx \cos lx - l \sin lx \cos sx}{\cos lx \left(\cos sx + e^{-s^2 t} \cos lx\right)}. \tag{2.228}$$

3. $\lambda = 1, \mu = 0:$

$$u^1 = e^{-t} \left((x + c_1) \sin x + 2t \cos x\right),$$

$$u^2 = \frac{2(x + c_1) + \sin 2x}{\left((x + c_1) \sin x + 2t \cos x\right)^2}. \tag{2.229}$$

У розв'язках, наведених вище, c_1, c_2, c_3, s, l – довільні сталі,

$$A = A(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\frac{\sigma^2}{4}} d\sigma.$$

Візуалізуємо отримані розв'язки (2.225)–(2.229) системи диференціальних рівнянь (2.182) за допомогою графіків за наперед заданих значень сталих c_1, c_2, c_3, s, l. Проілюструємо сказане вище для розв'язку (2.229), вибравши $c_1 = 0$ (див. рис. 2.3, 2.4).

Зауважимо, що отримані розв'язки при $t \to \infty$ обмежені. Це дає підстави припустити, що їх можна застосовувати під час опису конкретних практичних задач.

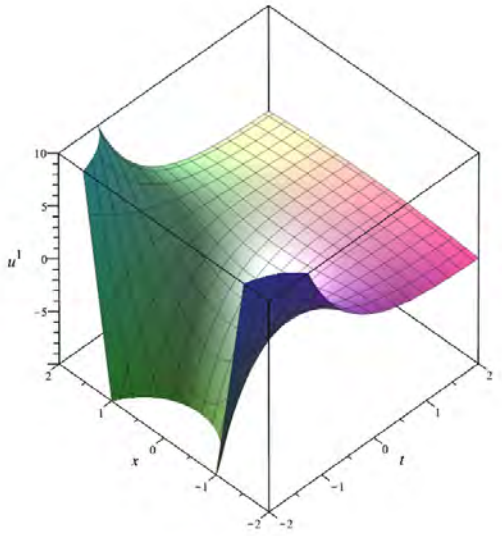


Рис. 2.3: Графік функції u^1 розв'язку (2.229) при $t \in [-2, 2], x \in [-2, 2]$

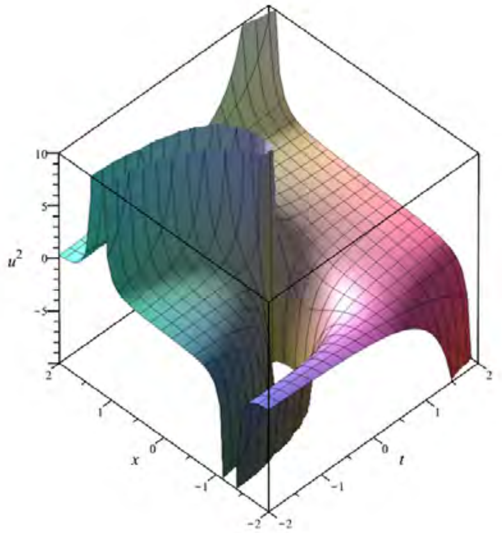


Рис. 2.4: Графік функції u^2 розв'язку (2.229) при $t \in [-2, 2], x \in [-2, 2]$

2.8. Система рівнянь хемотаксису з реактивним та конвективним доданками

У [55] розглянуто систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x \right] + \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \qquad (2.230)$$

де $u^1 = u^1(t,x)$, $u^2 = u^2(t,x)$, $g^1 = g^1(u^1,u^2)$, $g^2(u^1,u^2)$, $f = f(u^1)$ – довільні гладкі функції. Система (2.230) є узагальненням системи (2.180) на випадок довільного реактивного доданка

$$H(U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix}.$$

У праці [55] проведено повну симетрійну класифікацію системи (2.230) за всіх можливих гладких функцій $f(u^1)$ та $h^a = h^a(u^1,u^2)$, $(a = 1,2)$.

У [196] розглянуто всі можливі системи реакції–конвекції–дифузії вигляду

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + G(U)U_x + H(U), \qquad (2.231)$$

які є узагальненням системи (2.230) на випадок довільної матриці дифузії

$$F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$$

та конвекції

$$G(U) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix},$$

де $f^{ab} = f^{ab}(u^1,u^2), g^{ab} = g^{ab}(u^1,u^2)$ – довільні гладкі функції.

У праці [196] встановлено вигляд нелінійностей F, G, H, за яких система (2.231) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея.

Зокрема в [196] встановлено, що у випадку коефіцієнта дифузії

$$F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{2.232}$$

система (2.231) є інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея, якщо вона має вигляд

$$\begin{gathered} U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\frac{u^2}{u^1} & \lambda \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} m_1 u^1 & 0 \\ m_2 u^2 & 0 \end{pmatrix} U_x + \\ + \begin{pmatrix} n_1 u^1 \\ n_2 u^2 \end{pmatrix} (u^2)^2, \end{gathered} \tag{2.233}$$

де $\lambda, m_1, m_2, n_1, n_2$ – довільні сталі.

У підрозділі 2.2 та 2.3 реалізовано метод, запропонований в підрозділі 2.1 для 2-х систем конвекції–дифузії, а саме системи рівнянь ван дер Ваальса (2.14) та системи рівнянь хемотаксису з дерівативною нелінійністю вигляду (2.175). Важливою умовою для застосування такого методу була відсутність у цих системах реактивних доданків.

Перетворення P_1 та P_2 будуть перетвореннями еквівалентності системи (2.231) лише при відсутності реактивного доданка ($H(U) = 0$) та за умов (2.3). Але, якщо знайти перетворення, додаткові до P_1 чи P_2, які зведуть систему (2.231) при ($H(U) \neq 0$) до системи (2.4), то цей метод можливо застосувати і до системи (2.231) при ($H(U) \neq 0$).

У цьому підрозділі проілюструємо метод, запропонований у підрозділ 2.1, на прикладі системи рівнянь хемотаксису за наявності як конвективного, так і реактивного доданків.

Якщо в системі (2.233) вибрати $m_1 = n_2 = 0, \lambda = 1$, $n_1 = -\mu_1 \neq 0$, $m_2 = -4\mu_2$, де μ_1, μ_2 – довільні сталі, то одержимо систему рівнянь хемотаксису з реактивною та конвективною нелінійністю:

$$\begin{aligned} u_t^1 &= u_{xx}^1 - \mu_1 u^1 \left(u^2\right)^2, \\ u_t^2 &= 2\partial_x \left(\frac{u^2}{u^1} u_x^1\right) + u_{xx}^2 - 4\mu_2 u^2 u_x^2. \end{aligned} \tag{2.234}$$

Заміною Коула-Хопфа

$$t = t, \quad x = x, \quad \frac{u_x^1}{u^1} = -\frac{1}{2} v^1, \quad u^2 = -\frac{1}{2} v^2, \tag{2.235}$$

де $v^1 = v^1(t,x), v^2 = v^2(t,x)$ – нові невідомі функції, система (2.234) зводиться до такої системи:

$$\begin{aligned} v_t^1 &= v_{xx}^1 - v^1 v_x^1 + \mu_1 v^2 v_x^2, \\ v_t^2 &= v_{xx}^2 - \partial_x (v^1 v^2) + 2\mu_2 v^2 v_x^2. \end{aligned} \tag{2.236}$$

Як зазначалося у підрозділі 2.2, ця система є системою рівнянь ван дер Ваальса. Система (2.236) широко використовується в молекулярно-кінетичній теорії газів і рідин. Ця система дещо відрізняється від системи рівнянь (2.14), але вона входить до складу систем конвекції–дифузії (2.2), її коефіцієнти задовольняють умови (2.3), тому вона за допомогою перетворень P_1 і P_2 може бути зведена до вигляду (2.4).

Перший образ системи (2.236) відносно перетворень P_1 має бідну ліївську симетрію, тому його інваріантні ліївські анзаци не приводять до нелокальних анзаців системи (2.234).

Другий образ системи (2.236), отриманий внаслідок перетворень P_2, набуває вигляду

$$Z_0 = \partial_1 \left[\left(z^2\right)^{-2} Z_1 + \frac{1}{2} \left(z^2\right)^{-2} \begin{pmatrix} \left(z^1\right)^2 - 2\mu_2 z^1 + \mu_1 \\ 2\left(z^1 - \mu_2\right) z^2 \end{pmatrix} \right]. \tag{2.237}$$

Зробивши заміну:

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad z_1 \to z_1 + \mu_2, \quad z^2 = z^2, \tag{2.238}$$

одержимо

$$Z_0 = \partial_1 \left[(z^2)^{-2} Z_1 + \tfrac{1}{2} (z^2)^{-2} \begin{pmatrix} (z^1)^2 + \nu \\ 2z^1 z^2 \end{pmatrix} \right], \qquad (2.239)$$

де $\nu = \mu_1 - \mu_2^2$.

Дослідимо ліївську інваріантність системи (2.239). Зауважимо, що перетвореннями:

$$x_0 \to \theta^{-2} x_0, \quad x_1 \to \theta^{-1} x_1, \quad z^1 \to \theta z^1, \quad z^2 \to z^2, \qquad (2.240)$$

систему (2.239) можна звести до того самого вигляду, але при $\nu = 0, \pm 1$.

Після застосування стандартного методу Лі (див., наприклад, [140, 159, 181, 184]), отримаємо такий результат.

Теорема 2.8. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності системи рівнянь (2.239) є алгебра, базисні генератори якої мають вигляд*

1. $\nu = 0:$

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}, \quad Q = z^2\partial_{z^1}, \\ D_2 = x_1\partial_1 - I, \quad K = x_1^2\partial_1 - 2x_1 I + 2\partial_{z^1}, \end{array} \qquad (2.241)$$

де $I = z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}$;

2. $\nu = -1:$

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1, \quad Q, \quad Q_1 = e^{x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} - I), \\ Q_2 = e^{-x_1}(\partial_1 + \partial_{z^1} + I); \end{array} \qquad (2.242)$$

3. $\nu = 1:$

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1, \quad Q, \quad Y_1 = \cos x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) + \sin x_1 I, \\ Y_2 = \sin x_1(\partial_1 - \partial_{z^1}) - \cos x_1 I. \end{array} \qquad (2.243)$$

Використаємо ліївські симетрії системи рівнянь (2.239) для побудови її інваріантних (локальних) анзаців. Розглянемо кожен випадок значення параметра ν окремо.

I. $\nu = 0$. Застосувавши методику побудови інваріантних анзаців, запропоновану в [140], знаходимо нееквівалентні анзаци системи рівнянь (2.239) вигляду (будемо наводити тільки ті анзаци, які приводять до нелокальних анзаців системи (2.234)):

$$
\begin{aligned}
&1)\ z^1 = x_1^{-2}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right),\ z^2 = x_1^{-2}\phi^2(\omega), \omega = rx_0 + \frac{1}{x_1};\\
&2)\ z^1 = \left(x_1^2+1\right)^{-1}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right),\ z^2 = \left(x_1^2+1\right)^{-1}\phi^2(\omega),\\
&\qquad\qquad \omega = rx_0 + \arctan x_1;\\
&3)\ z^1 = \left(x_1^2-1\right)^{-1}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right),\ z^2 = \left(x_1^2-1\right)^{-1}\phi^2(\omega),\\
&\qquad\qquad \omega = rx_0 + \arctan x_1;\\
&4)\ z^1 = x_1^{-2}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} x_1^{-2}\phi^2(\omega),\\
&\qquad\qquad \omega = p\ln x_0 + \frac{1}{x_1};\\
&5)\ z^1 = \left(x_1^2+1\right)^{-1}\left(\phi^1(\omega)+2x_1\right), z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\left(x_1^2+1\right)^{-1}\phi^2(\omega),\\
&\qquad\qquad \omega = p\ln x_0 + \arctan x_1;\\
&6)\ z^1 = \left(x_1^2-1\right)^{-1}\left(\phi^1(\omega)+2x_1\right), z^2 = x_0^{\frac{1}{2}}\left(x_1^2-1\right)^{-1}\phi^2(\omega),\\
&\qquad\qquad \omega = p\ln x_0 + \arctan x_1.
\end{aligned}
\tag{2.244}
$$

У формулах (2.244) $\phi^1 = \phi^1(\omega), \phi^2 = \phi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, p – довільна стала, $r = \pm 1$.

Зауважимо, що анзаци (2.244) породжуються відповідно такими операторами алгебри (2.241):

$$
\begin{gathered}
X_1 = r\partial_0 + K, \quad X_2 = r\partial_0 + \partial_1 + K,\\
X_3 = r\partial_0 - \partial_1 + K, \quad X_4 = \frac{1}{2p}D_1 + K,\\
X_5 = \frac{1}{2p}D_1 + \partial_1 + K, \quad X_6 = \frac{1}{2p}D_1 - \partial_1 + K.
\end{gathered}
\tag{2.245}
$$

II. $\nu = -1$. Нееквівалентні інваріантні анзаци, які породжуються операторами алгебри (2.242), мають вигляд (як і в попередньому випадку, наводимо лише ті анзаци, з яких отримуються нелокальні анзаци системи (2.234)):

$$
\begin{gathered}
7)\ z^1 = e^{x_1}\phi^1(\omega) - 1,\ z^2 = e^{x_1}\phi^2(\omega),\ \omega = rx_0 + e^{x_1};\\
8)\ z^1 = e^{rx_0+x_1}\phi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = e^{rx_0+x_1}\phi^2(\omega),\\
\omega = rx_0 + \ln\left(e^{x^1} + q\right);\\
9)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2}{\left(e^{x_1}+q\right)^2}, \quad z^2 = \frac{e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2},\\
\omega = rx_0 + \frac{1}{e^{x_1}+q};\\
10)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2 - 1}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 + 1}, \quad z^2 = \frac{e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 + 1},\\
\omega = rx_0 + \arctan(e^{x_1}+q);\\
11)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2 + 1}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 - 1}, \quad z^2 = \frac{e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 - 1},\\
\omega = rx_0 + \arctan(e^{x_1}+q);\\
12)\ z^1 = e^{x_1}\phi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\phi^2(\omega), \qquad (2.246)\\
\omega = p\ln x_0 + e^{x_1};\\
13)\ z^1 = x_0^p e^{x_1}\phi^1(\omega) - 1, \quad z^2 = x_0^{p+\frac{1}{2}} e^{x_1}\phi^2(\omega),\\
\omega = x_0^p\left(e^{x_1}+q\right);\\
14)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2}{\left(e^{x_1}+q\right)^2}, \quad z^2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2},\\
\omega = p\ln x_0 + \frac{1}{e^{x_1}+q};\\
15)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2 - 1}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 + 1}, \quad z^2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 + 1},\\
\omega = p\ln x_0 + \arctan(e^{x_1}+q);\\
16)\ z^1 = \frac{e^{x_1}\phi^1(\omega) + e^{2x_1} - q^2 + 1}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 - 1}, \quad z^2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\phi^2(\omega)}{\left(e^{x_1}+q\right)^2 - 1},\\
\omega = p\ln x_0 + \arctan(e^{x_1}+q).
\end{gathered}
$$

У формулах (2.246) q – довільна стала.

Наведемо відповідні оператори алгебри (2.242), які породжують анзаци (2.246):

$$
\begin{aligned}
X_7 &= r\partial_0 + Q_2,\\
X_8 &= r\partial_0 + \partial_1 + Q_2,\\
X_9 &= r\partial_0 + 2q\partial_1 + Q_1 + q^2 Q_2,\\
X_{10} &= r\partial_0 + 2q\partial_1 + Q_1 + \left(q^2+1\right) Q_2,\\
X_{11} &= r\partial_0 + 2q\partial_1 + Q_1 + \left(q^2-1\right) Q_2,\\
X_{12} &= -\frac{1}{2p}D_1 + Q_2,\\
X_{13} &= -\frac{1}{2p}D_1 + \partial_1 + qQ_2,\\
X_{14} &= \frac{1}{2p}D_1 + 2q\partial_1 + Q_1 + q^2 Q_2,\\
X_{15} &= -\frac{1}{2p}D_1 + 2q\partial_1 + Q_1 + \left(q^2+1\right) Q_2,\\
X_{16} &= \frac{1}{2p}D_1 + 2q\partial_1 + Q_1 + \left(q^2-1\right) Q_2.
\end{aligned}
\tag{2.247}
$$

III. $\nu = 1$. Як і в попередніх двох випадках, наведемо тільки ті нееквівалентні анзаци, породжені операторами алгебри (2.243), які приводять до нелокальних анзаців системи (2.234).

$$17)\ z^1 = (y^2+1)\phi^1(\omega) - y,\ z^2(y^2+1)\phi^2(\omega),\ \omega = rx_0 + y;$$

$$18) z^1 = \frac{\left(y^2+1\right)\phi^1(\omega) - qy + 1}{y+q},\ z^2 = \frac{\left(y^2+1\right)\phi^2(\omega)}{y+q},$$
$$\omega = rx_0 + \ln(y+q);$$

$$19)\ z^1 = \frac{\left(y^2+1\right)\phi^1(\omega) + (1-q^2)y + 2q}{(y+q)^2},$$
$$z^2 = \frac{\left(y^2+1\right)\phi^2(\omega)}{(y+q)^2},\ \omega = rx_0 + \frac{1}{y+q};$$

$$19)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1(\omega)+(1-q^2)y+2q}{(y+q)^2},$$
$$z^2=\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2},\ \omega=rx_0+\frac{1}{y+q};$$

$$20)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1(\omega)+(1-q^2-n^2)\,y+2q}{(y+q)^2+n^2},$$
$$z^2=\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2+n^2},\ \omega=rx_0+\frac{1}{n}\arctan\frac{y+q}{n};$$

$$21)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1(\omega)+(1-q^2+m^2)\,y+2q}{(y+q)^2-m^2},$$
$$z^2=\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2-m^2},\ \omega=rx_0+\frac{1}{m}\arctan\frac{y+q}{m};$$

$$22)\ z^1=\left(y^2+1\right)\phi^1(\omega)-y,\ z^2=x_0^{\frac{1}{2}}\left(y^2+1\right)\phi^2(\omega),$$
$$\omega=p\ln x_0+y;$$

$$23)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1(\omega)-qy+1}{y+q},\ z^2=x_0^{\frac{1}{2}}\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{y+q},\tag{2.248}$$
$$\omega=x_0^p(y+q);$$

$$24)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1(\omega)+(1-q^2)\,y+2q}{(y+q)^2},$$
$$z^2=x_0^{\frac{1}{2}}\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2},\ \omega=p\ln x_0+\frac{1}{y+q};$$

$$25)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1+(1-q^2-n^2)\,y+2q}{(y+q)^2+n^2},$$
$$z^2=x_0^{\frac{1}{2}}\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2+n^2},\ \omega=p\ln x_0+\frac{1}{n}\arctan\frac{y+q}{n};$$

$$26)\ z^1=\frac{(y^2+1)\,\phi^1+(1-q^2+m^2)\,y+2q}{(y+q)^2-m^2},$$
$$z^2=x_0^{\frac{1}{2}}\frac{(y^2+1)\,\phi^2(\omega)}{(y+q)^2-m^2},\ \omega=p\ln x_0+\frac{1}{m}\arctan\frac{y+q}{m}.$$

У формулах (2.248) $y=\tan\frac{x}{2}, n, m$ – довільні сталі.

Відповідні оператори алгебри (2.243), які породжують анзаци (2.248), мають вигляд

$$
\begin{gathered}
X_{17} = r\partial_0 + \partial_1 + Y_1, \\
X_{18} = r\partial_0 + q\left(\partial_1 + Y_1\right) + Y_2, \\
X_{19} = r\partial_0 + \left(q^2+1\right)\partial_1 + \left(q^2-1\right)Y_1 + 2qY_2, \\
X_{20} = r\partial_0 + \left(q^2+n^2+1\right)\partial_1 + \left(q^2+n^2-1\right)Y_1 + 2qY_2, \\
X_{21} = r\partial_0 + \left(q^2-m^2+1\right)\partial_1 + \left(q^2-m^2-1\right)Y_1 + 2qY_2, \\
X_{22} = -\frac{1}{2p}D_1 + \partial_1 + Y_1, \\
X_{23} = -\frac{1}{2p}D_1 + q\left(\partial_1 + Y_1\right) + Y_2, \\
X_{24} = \frac{1}{2p}D_1 + \left(q^2+1\right)\partial_1 r\left(q^2-1\right)Y_1 + 2qY_2, \\
X_{25} = -\frac{1}{2p}D_1 + \left(q^2+n^2+1\right)\partial_1 + \left(q^2+n^2-1\right)Y_1 + 2qY_2, \\
X_{26} = \frac{1}{2p}D_1 + \left(q^2-m^2+1\right)\partial_1 + \left(q^2-m^2-1\right)Y_1 + 2qY_2.
\end{gathered}
\tag{2.249}
$$

Використаємо лiївськi анзаци, отриманi для (2.237), з метою побудови нелокальних анзацiв системи рiвнянь хемотаксису (2.234). Для цього потрiбно застосувати перертворення, оберненi до (2.235), (2.5), (2.12), (2.7) та (2.238). Цi перетворення мають вигляд

$$
\begin{gathered}
x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad z^1 \to z^1 - \mu_2, \quad z = z^2; \\
x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad z^a = y_1^a; \\
x_0 = t, \quad x_1 = w^2, \quad y^1 = w^1, \quad y^2 = x; \\
t = t, \quad x = x, \quad w_x^a = v^a; \\
t = t, \quad x = x, \quad v^1 = -2\frac{u_x^1}{u^1}, \quad v^2 = -2u^2,
\end{gathered}
\tag{2.250}
$$

де $a = 1, 2$.

Процес перетворення ліївських інваріантних анзаців системи (2.239) на нелокальні анзаци системи (2.234) за допомогою перетворень, обернених до (2.250), наведемо на прикладі 1-го анзацу (2.244).

Для зручності запишемо його ще раз:

$$\begin{gathered} z^1 = x_1^{-2}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right), \quad z^2 = x_1^{-2}\phi^2(\omega), \\ \omega = rx_0 + x_1^{-1}. \end{gathered} \tag{2.251}$$

Перше перетворення (2.250) зводить анзац (2.251) до вигляду

$$\begin{gathered} z^1 = x_1^{-2}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right) + \mu_2, \quad z^2 = x_1^{-2}\phi^2(\omega), \\ \omega = rx_0 + x_1^{-1}. \end{gathered} \tag{2.252}$$

Друге перетворення (2.250) зводить анзац (2.252) до вигляду

$$\begin{gathered} y_1^1 = x_1^{-2}\left(\phi^1(\omega) + 2x_1\right) + \mu_2, \quad y_1^2 = x_1^{-2}\phi^2(\omega), \\ \omega = rx_0 + x_1^{-1}. \end{gathered} \tag{2.253}$$

Проінтегрувавши перші дві формули (2.253) за змінною x_1, знаходимо

$$\begin{gathered} y^1 = -\Phi^1(\omega) + 2\ln x_1 + \mu_2 x_1, \quad y^2 = -\Phi^2(\omega), \\ \omega = rx_0 + x_1^{-1}, \end{gathered} \tag{2.254}$$

де $\Phi^1(\omega)$ та $\Phi^2(\omega)$ – первісні для функцій $\phi^1(\omega)$ та $\phi^2(\omega)$.

Третє перетворення (2.250) зводить анзац (2.254) до вигляду

$$\begin{gathered} w^1 = -\Phi^1(\omega) + 2\ln w^2 + \mu_2 w^2, \\ x = -\Phi^2(\omega), \quad \omega = rt + \frac{1}{w^2}. \end{gathered} \tag{2.255}$$

Помінявши місцями інваріантні змінні $\Phi^2(\omega)$ та ω:

$$\Phi^2 \to \omega, \quad \omega \to \psi^2(\omega),$$

отримаємо

$$w^1 = -\Phi^1(\omega) - 2\ln A + \frac{\mu_2}{A}, \quad w^2 = \frac{1}{A}, \quad \omega = x, \tag{2.256}$$

де $A = \psi^2(\omega) - rt$.

Якщо перші дві формули анзацу (2.256) продиференціювати за змінною x, то одержимо

$$\begin{aligned} w^1_x &= -\varphi^1(\omega) - 2\frac{\dot\psi^2(\omega)}{A} - \frac{\mu_2\dot\psi^2(\omega)}{A^2}, \\ w^2_x &= -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{A^2}, \quad \omega = x, \end{aligned} \tag{2.257}$$

де $\dot\psi^2 = \frac{d\psi^2}{d\omega}$.

Четверте перетворення (2.250) зводить анзац (2.257) до вигляду

$$\begin{aligned} v^1 &= -\varphi^1(\omega) - 2\frac{\dot\psi^2(\omega)}{A} - \frac{\mu_2\dot\psi^2(\omega)}{A^2}, \\ v^2 &= -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{A^2}, \quad \omega = x. \end{aligned} \tag{2.258}$$

Застосуємо до (2.258) п'яте перетворення (2.250):

$$\begin{aligned} \frac{u^1_x}{u^1} &= \frac{1}{2}\varphi^1(\omega) + \frac{\dot\psi^2(\omega)}{A} + \frac{1}{2}\mu_2\frac{\dot\psi^2(\omega)}{A^2}, \\ u^2 &= \frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A^2}, \quad \omega = x. \end{aligned} \tag{2.259}$$

Проінтегрувавши першу формулу (2.259) за змінною x та ввівши позначення

$$\frac{1}{2}\Phi^1(\omega) = \ln\psi^1(\omega),$$

остаточно знаходимо нелокальний анзац системи (2.234):

$$u^1 = \psi^1(\omega)Ae^W, \quad u^2 = \frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A^2}, \quad \omega = x,$$

де $A = \psi^2(\omega) - rt$, $W = -\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{A}$, $\psi^1 = \psi^1(\omega)$, $\psi^2 = \psi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції.

Неважко переконатися, що провівши аналогічну процедуру з іншими анзацами (2.244), (2.246) та (2.248), знаходимо такі нелокальні анзаци системи (2.234):

I. $\nu = 0, \quad \mu_1 = \mu_2^2 :$

$$\begin{gathered}
u^1 = \psi^1(\omega) A e^W, \quad u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2A^2}, \quad \omega = x, \\
A = \psi^2(\omega) - rt, \quad W = -\frac{\mu_2}{2A}; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega) \cos A e^W, \quad u^2 = -\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2\cos^2 A}, \omega = x, \\
A = \psi^2(\omega) - rt, \quad W = -\frac{\mu_2}{2} \tan A; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega) \cosh A e^W, \; u^2 = -\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2\cosh^2 A}, \omega = x, \\
A = \psi^2(\omega) - rt, \quad W = -\frac{\mu_2}{2} \tanh A; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega) A e^W, \; u^2 = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2A^2}, \; \omega = t^{-\frac{1}{2}} x, \\
A = \psi^2(\omega) - p \ln t, \quad W = -\frac{\mu_2}{2A}; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega) \cos A e^W, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2\cos^2 A}, \\
\omega = t^{-\frac{1}{2}} x, \; A = \psi^2(\omega) - p \ln t, \; W = -\frac{\mu_2}{2} \tan A; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega) \cosh A e^W, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{2\cosh^2 A}, \\
\omega = t^{-\frac{1}{2}} x, \; A = \psi^2(\omega) - p \ln t, \; W = -\frac{\mu_2}{2} \tanh A.
\end{gathered} \tag{2.260}$$

II. $\nu = -1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 - 1 :$

$$u^1 = \psi^1(\omega)A^k,\ u^2 = -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A},\ \omega = x,\ A = \psi^2(\omega) - rt;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)A^k,\ u^2 = -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A},\ \omega = x,\ A = \psi^2(\omega) - qe^{rt};$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)AB^k,\ u^2 = \frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A^2B},$$
$$\omega = x,\ A = \psi^2(\omega) - rt, B = \frac{1}{A} - q;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)B^k\cos A,\ u^2 = -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2B\cos^2 A},$$
$$\omega = x,\ A = \psi^2(\omega) - rt,\ B = \tan A - q;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)B^k\cosh A,\ u^2 = -\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2B\cosh^2 A},$$
$$\omega = x,\ A = \psi^2(\omega) - rt,\ B = \tanh A - q;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)A^k,\ u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A}, \tag{2.261}$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2(\omega) - p\ln t;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)A^k, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2(\omega) - qt^p;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)AB^k,\ u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A^2B},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2(\omega) - p\ln t,\ B = \frac{1}{A} - q;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)B^k\cos A, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2B\cos^2 A},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2(\omega) - p\ln t,\ B = \tan A - q;$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)B^k\cosh A, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot\psi^2(\omega)}{2B\cosh^2 A},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2(\omega) - p\ln t,\ B = \tanh A - q.$$

У формулах (2.261) $k = \dfrac{1-\mu_2}{2}$.

III. $\nu = 1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 + 1:$

$$
\begin{gathered}
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+A^2}e^W, \quad u^2 = -\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{1+A^2}, \\
\omega = x, \quad A = \psi^2(\omega) - rt, \quad W = -\mu_2 \arctan A; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}e^W, \ u^2 = -e^{-rt}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{1+B^2}, \\
\omega = x, \ B = \psi^2(\omega)e^{-rt} - q, \quad W = -\mu_2 \arctan B; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)A\sqrt{1+B^2}e^W, \ u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{A^2(1+B^2)}, \quad \omega = x, \\
A = \psi^2 - rt, \ B = \frac{1}{A} - q, \quad W = qA - \mu_2 \arctan B; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}\cos(nA)e^W, \ u^2 = \frac{-n^2\dot{\psi}^2(\omega)}{(1+B^2)\cos^2(nA)}, \\
\omega = x, \ A = \psi^2 - rt, \ B = n\tan(nA) - q, \\
W = -qA - \mu_2 \arctan B; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}\cosh(mA)e^W, \\
u^2 = \frac{-m^2\dot{\psi}^2(\omega)}{(1+B^2)\cosh^2(mA)}, \\
\omega = x, \ A = \psi^2 - rt, \ B = m\tanh(mA) - q, \\
W = qA - \mu_2 \arctan B; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+A^2}e^W, \quad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{1+A^2}, \\
\omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \quad A = \psi^2(\omega) - p\ln t, \ W = -\mu_2 \arctan A; \\[2ex]
u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}e^W, \ u^2 = -t^{-p-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{1+B^2}, \\
\omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \ B = \psi^2(\omega)t^{-p} - q, \ W = -\mu_2 \arctan B;
\end{gathered}
\tag{2.262}
$$

$$u^1 = \psi^1(\omega)A\sqrt{1+B^2}e^W,\ u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{A^2(1+B^2)},\ \omega = -t^{-\frac{1}{2}}x,$$
$$A = \psi^2 - p\ln t,\ B = \frac{1}{A} - q,\ W = qA - \mu_2 \arctan B;$$
$$u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}\cos(nA)e^W,\ u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{n^2\dot{\psi}^2(\omega)}{(1+B^2)\cos^2(nA)},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2 - p\ln t,\ B = n\tan(nA) - q,$$
$$W = -qA - \mu_2 \arctan B;$$
$$u^1 = \psi^1(\omega)\sqrt{1+B^2}\cosh(mA)e^W, u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{m^2\dot{\psi}^2(\omega)}{(1+B^2)\cosh^2(mA)},$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ A = \psi^2 - p\ln t,\ B = m\tanh(mA) - q,$$
$$W = qA - \mu_2 \arctan B.$$

Оператори (2.245), (2.247), (2.249), які породжують ліївські анзаци системи (2.239), під дією перетворень (2.250) переходять в нелокальні оператори інваріантності системи (2.234). Цей процес проілюструємо на прикладі оператора X_1 із формул (2.245). Цей оператор набуває вигляду

$$X_1 = r\partial_0 + x_1^2\partial_1 - 2x_1 I + 2\partial_{z^1}. \tag{2.263}$$

Подіявши оператором (2.263) на многовид розв'язків системи рівнянь (2.239), одержимо

$$rz_0^1 + x_1^2 z_1^1 + 2x_1 z^1 - 2 = 0, \quad rz_0^2 + x_1^2 z_1^2 + 2x_1 z^2 = 0. \tag{2.264}$$

Подіявши першим перетворенням (2.250) на рівняння системи (2.264), отримаємо

$$rz_0^1 + x_1^2 z_1^1 + 2x_1 z^1 - 2\mu_2 x_1 - 2 = 0,\ rz_0^2 + x_1^2 z_1^2 + 2x_1 z^2 = 0. \tag{2.265}$$

Застосувавши друге перетворення (2.250), будемо мати

$$\begin{gathered} ry_{10}^1 + x_1^2 y_{11}^1 + 2x_1 y_1^1 - 2\mu_2 x_1 - 2 = 0, \\ ry_{10}^2 + x_1^2 y_{11}^2 + 2x_1 y_1^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.266}$$

Після інтегрування рівнянь (2.266) за змінною x_1 одержимо:

$$ry_0^1 + x_1^2 y_1^1 - \mu_2 x_1^2 - 2x_1 = 0, \quad ry_0^2 + x_1^2 y_1^2 = 0. \tag{2.267}$$

Якщо застосувати третє перетворення (2.250) до системи рівнянь (2.267), врахувавши при цьому, що

$$y_0^1 = w_t^1 - \frac{w_x^1}{w_x^2} w_t^2, \quad y_1^1 = \frac{w_x^1}{w_x^2}, \quad y_0^2 = -\frac{w_t^2}{w_x^2}, \quad y_1^2 = \frac{1}{w_x^2}, \tag{2.268}$$

то отримаємо

$$rw_t^1 - \mu_2 (w^2)^2 - 2w^2 = 0, \quad rw_t^2 - (w^2)^2 = 0. \tag{2.269}$$

Після диференціювання за змінною x система (2.269) матиме вигляд

$$rw_{xt}^1 - 2(\mu_2 w^2 + 1) w_x^2 = 0, \quad rw_{xt}^2 - 2w^2 w_x^2 = 0. \tag{2.270}$$

Четверте перетворення (2.250) зводить систему (2.270) до форми

$$rv_t^1 - 2(\mu_2 w^2 + 1) v^2 = 0, \quad rv_t^2 - 2w^2 v^2 = 0, \tag{2.271}$$

де $w^2 = \int v^2 dx$. Застосувавши п'яте перетворення (2.250) до системи рівнянь (2.271), одержимо

$$r\partial_x \left(\frac{u_t^1}{u^1} \right) - 2(-2\mu_2 \sigma + 1)\sigma_x = 0, \quad ru_t^2 + 4\sigma u^2 = 0, \tag{2.272}$$

де

$$\sigma = \int u^2 dx. \tag{2.273}$$

Якщо перше рівняння (2.272) проінтегрувати за змінною x, то перейдемо до такої системи:

$$ru_t^1 + 2(\mu_2 \sigma^2 - \sigma) u^1 = 0, \quad ru_t^2 + 4\sigma u^2 = 0. \tag{2.274}$$

Оператор, який відповідає системі рівнянь (2.274), запишемо у вигляді

$$Q = r\partial_t - 2(\mu_2 \sigma^2 - \sigma) u^1 \partial_{u^1} - 4\sigma u^2 \partial_{u^2}. \tag{2.275}$$

Формула (2.275) задає нелокальний оператор інваріантності системи рівнянь хемотаксису (2.234).

Подіявши перетворенням (2.250) на ліївські оператори інваріантності (2.245), (2.247), (2.249) системи (2.239), отримаємо такі нелокальні оператори інваріантності системи рівнянь хемотаксису (2.234):

I. $\nu = 0, \quad \mu_1 = \mu_2^2:$

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = Q_2 = Q_3 = r\partial_t - 2(\mu_2\sigma^2 - \sigma)u^1\partial_{u^1} - 4\sigma u^2\partial_{u^2},\\
&Q_4 = Q_5 = Q_6 = \frac{1}{p}D + 4(\mu_2\sigma^2 - \sigma)^1\partial_{u^1} + 8\sigma u^2\partial_{u^2},
\end{aligned}
\tag{2.276}
$$

де

$$
D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^2\partial_{u^2}. \tag{2.277}
$$

II. $\nu = -1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 - 1.$

$$
\begin{aligned}
Q_7 = Q_8 &= r\partial_t + e^{2\sigma}(ku^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}),\\
Q_9 &= r\partial_t + \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} + (e^{-2\sigma} - e^{2\sigma})u^2\partial_{u^2},\\
Q_{10} &= r\partial_t + \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)(q^2+1)e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left[e^{-2\sigma} - (q^2+1)e^{2\sigma}\right]u^2\partial_{u^2},\\
Q_{11} &= r\partial_t + \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)(q^2-1)e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left[e^{-2\sigma} - (q^2-1)e^{2\sigma}\right]u^2\partial_{u^2},\\
Q_{12} = Q_{13} &= \frac{1}{2p}D + e^{2\sigma}\left(-ku^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}\right),\\
Q_{14} &= \frac{1}{2p}D - \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)q^2e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left[e^{-2\sigma} - q^2e^{2\sigma}\right]u^2\partial_{u^2},\\
Q_{15} &= \frac{1}{2p}D - \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)(q^2+1)e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left[e^{-2\sigma} - (q^2+1)e^{2\sigma}\right]u^2\partial_{u^2},\\
Q_{16} &= \frac{1}{2p}D - \left[ke^{-2\sigma} + (k-1)(q^2-1)e^{2\sigma}\right]u^1\partial_{u^1} +\\
&\quad + \left[e^{-2\sigma} - (q^2-1)e^{2\sigma}\right]u^2\partial_{u^2}.
\end{aligned}
\tag{2.278}
$$

III. $\nu = 1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 + 1:$

$$Q_{17}=r\partial_t-\frac{1}{2}\left(\sin(2\sigma)+\mu_2\cos(2\sigma)\right)u^1\partial_{u^1}+\sin(2\sigma)u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{18}=r\partial_t-\frac{1}{2}((q-\mu_2)\sin(2\sigma)+$$
$$+(1+q\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+(q\sin(2\sigma)+\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{19}=r\partial_t+\frac{1}{2}((-q^2+2q\mu_2+1)\sin(2\sigma)+$$
$$+(2q+(q^2-1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+$$
$$+((q^2-1)\sin(2\sigma)+2q\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{20}=r\partial_t+\frac{1}{2}((-q^2-n^2+2q\mu_2+1)\sin(2\sigma)-$$
$$-(2q+(q^2+n^2-1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+$$
$$+((q^2+n^2-1)\sin(2\sigma)+2q\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{21}=r\partial_t+\frac{1}{2}((-q^2+m^2+2q\mu_2+1)\sin(2\sigma)-$$
$$-(2q+(q^2-m^2-1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+ \qquad (2.279)$$
$$+((q^2-m^2-1)\sin(2\sigma)+2q\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{22}=\frac{1}{p}D-(\sin(2\sigma)+\mu_2\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+2\sin(2\sigma)u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{23}=\frac{1}{p}D+((q-\mu_2)\sin(2\sigma)+$$
$$+(1+q\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+2(q\sin(2\sigma)+\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{24}=\frac{1}{p}D+((1-q^2+\mu_2)\sin(2\sigma)+$$
$$+(1+(q^2-1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}+$$
$$+2(\sin(2\sigma)+(1-q^2)\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$Q_{25}=\frac{1}{p}D+((q^2+n^2-2q\mu_2-1)\sin(2\sigma)+$$
$$+(2q+(q^2+n^2-1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1}-$$
$$-2((q^2+n^2-1)\sin(2\sigma)+2q\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2},$$

$$
\begin{gathered}
Q_{26} = \frac{1}{p}D + ((q^2 - m^2 - 2q\mu_2 - 1)\sin(2\sigma) + \\
+ (2q + (q^2 - m^2 - 1)\mu_2)\cos(2\sigma))u^1\partial_{u^1} - \\
-2((q^2 - m^2 - 1)\sin(2\sigma) + 2q\cos(2\sigma))u^2\partial_{u^2}.
\end{gathered}
$$

Із вигляду операторів (2.277)–(2.279) можна зробити висновок, що вони є операторами потенційних симетрій системи (2.234).

Якщо одержані нелокальні анзаци підставити в систему рівнянь хемотаксису (2.234), то вони зредукують її до систем звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій ψ^1 та ψ^2 змінної ω. Процес редукції проілюструємо на прикладі першого анзацу для випадку $\nu = 0$. Цей анзац набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \psi^1(\omega)Ae^w, \quad u^2 = \frac{\dot\psi^2(\omega)}{2A^2}, \quad \omega = x, \\
&A = \psi^2(\omega) - rt, \quad w = -\frac{\mu_2}{2A}, \quad r = \pm 1.
\end{aligned} \tag{2.280}
$$

Якщо визначити похідні функцій (2.280) та підставити в рівняння системи (2.234), то після деяких спрощень одержимо

$$
\begin{aligned}
&A\ddot\psi^1 + \left(\frac{\mu_2\psi^1}{2A} + \psi^1\right)\left(\ddot\psi^2 + 2\frac{\dot\psi^1}{\psi^1}\dot\psi^2 + r\right) = 0, \\
&\left(-\frac{\dot\psi^2}{A^3} + \frac{1}{2A^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\left(\ddot\psi^2 + 2\frac{\dot\psi^1}{\psi^1}\dot\psi^2 + r\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.281}
$$

Із (2.281) отримуємо систему редукованих рівнянь відносно функцій $\psi^1(\omega)$, $\psi^2(\omega)$:

$$
\begin{gathered}
\ddot\psi^1 = 0, \\
\ddot\psi^2 + 2\frac{\dot\psi^1}{\psi^1}\dot\psi^2 + r = 0.
\end{gathered} \tag{2.282}
$$

Аналогічно, підставивши всі інші анзаци в систему рівнянь хемотаксису (2.234), одержимо редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь:

I. $\nu = 0, \quad \mu_1 = \mu_2^2$. Перші три анзаци (2.260) редукують (2.234) до системи

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}^1 = l\psi^1 \left(\dot{\psi}^2\right)^2, \\ &\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + r = 0, \end{aligned} \tag{2.283}$$

де $l = 0; 1; -1$ відповідно. Останні три анзаци (2.260) редукують (2.234) до такої системи

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}^1 + \frac{\omega}{2}\dot{\psi}^1 = l\psi^1 \left(\dot{\psi}^2\right)^2, \\ &\ddot{\psi}^2 + \left(2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1} + \frac{\omega}{2}\right)\dot{\psi}^2 + p = 0. \end{aligned} \tag{2.284}$$

II. $\nu = -1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 - 1$. Результатом редукції системи (2.234) першим анзацам (2.261) є системи (2.282), а другим – система вигляду

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}^1 = rk\psi^1, \\ &\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + r\psi^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.285}$$

Третій, четвертий та п'ятий анзаци (2.261) редукують систему (2.234) до системи (2.283). Шостий анзац (2.261) редукує систему (2.234) до системи (2.284) при $l = 0$, а сьомий анзаци (2.261) – до такої системи

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}^1 + \frac{\omega}{2}\dot{\psi}^1 = pk\psi^1, \\ &\ddot{\psi}^2 + \left(2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1} + \frac{\omega}{2}\right)\dot{\psi}^2 + p\psi^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.286}$$

Восьмий, дев'ятий та десятий анзаци (2.261) редукують систему (2.234) до системи (2.284).

III. $\nu = 1, \quad \mu_1 = \mu_2^2 + 1$. Перший та другий анзаци (2.262) редукують систему (2.234) до системи (2.283).

Такі три анзаци (3-й, 4-й, 5-й) (2.262) редукують систему (2.234) до систем

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - q^2\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + r = 0;\end{gathered} \tag{2.287}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - (q^2+n^2)\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 - 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + r = 0;\end{gathered} \tag{2.288}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - (q^2-m^2)\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + r = 0.\end{gathered} \tag{2.289}$$

Шостий та сьомий анзаци (2.262) редукують систему рівнянь (2.234) до системи (2.284) при $l = 0$. Останні три анзаци (2.262) редукують систему (2.234) до таких систем:

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{\omega}{2}\dot{\psi}^1 - q^2\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + \left(2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1} + \frac{\omega}{2}\right)\dot{\psi}^2 + 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{2.290}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{\omega}{2}\dot{\psi}^1 - (q^2+n^2)\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + \left(2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1} + \frac{\omega}{2}\right)\dot{\psi}^2 - 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{2.291}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{\omega}{2}\dot{\psi}^1 - (q^2-m^2)\psi^1\left(\dot{\psi}^2\right)^2 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + \left(2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1} + \frac{\omega}{2}\right)\dot{\psi}^2 + 2q\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + p = 0.\end{gathered} \tag{2.292}$$

Якщо у випадках I, III ввести заміну:

$$\alpha = \frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}, \quad \beta = \dot{\psi}^2, \tag{2.293}$$

а у випадку II – заміну

$$\alpha = \frac{\dot\psi^1}{\psi^1}, \quad \beta = \frac{\dot\psi^2}{\psi^2}, \tag{2.294}$$

то редуковані системи зведуться до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

I. $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 = l\beta^2, \\ &\dot\beta + 2\alpha\beta + r = 0; \end{aligned} \tag{2.283$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 + \frac{\omega}{2}\alpha = l\beta^2, \\ &\dot\beta + \left(2\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\beta + p = 0. \end{aligned} \tag{2.284$'$}$$

II. $\nu = -1$:

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 = rk, \\ &\dot\beta + 2\alpha\beta + r = 0; \end{aligned} \tag{2.285$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 + \frac{\omega}{2}\alpha = pk, \\ &\dot\beta + \left(2\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\beta + p = 0. \end{aligned} \tag{2.286$'$}$$

III. $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 - q^2\beta^2 = 0, \\ &\dot\beta + 2\alpha\beta + 2q\beta^2 + r = 0; \end{aligned} \tag{2.287$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 - (q^2 + n^2)\beta^2 = 0, \\ &\dot\beta + 2\alpha\beta - 2q\beta^2 + r = 0; \end{aligned} \tag{2.288$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 - (q^2 - m^2)\beta^2 = 0, \\ &\dot\beta + 2\alpha\beta + 2q\beta^2 + r = 0; \end{aligned} \tag{2.289$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot\alpha + \alpha^2 + \frac{\omega}{2}\alpha - q^2\beta^2 = 0, \\ &\dot\beta + \left(2\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\beta + 2q\beta^2 + p = 0; \end{aligned} \tag{2.290$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} + \alpha^2 + \frac{\omega}{2}\alpha - (q^2 + n^2)\beta^2 = 0, \\ &\dot{\beta} + \left(2\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\beta - 2q\beta^2 + p = 0; \end{aligned} \tag{2.291$'$}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} + \alpha^2 + \frac{\omega}{2}\alpha - (q^2 - m^2)\beta^2 = 0, \\ &\dot{\beta} + \left(2\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\beta + 2q\beta^2 + p = 0. \end{aligned} \tag{2.292$'$}$$

Зауважимо, що номери формул зі штрихами відповідають таким же номерам формул без штрихів.

Якщо знайти розв'язки редукованих систем, то, використовуючи заміну (2.293) або (2.294) та відповідний анзац, можна знайти розв'язки системи рівнянь хемотаксису (2.234). Наведемо деякі з них.

У випадку, коли $\mu_1 = \mu_2^2 - 1$, то

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{x}{\sqrt{t}}\left(-\frac{\sqrt{t}}{x}\dot{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) - p\ln t\right)^k, \\ u^2 &= \frac{1}{2x}\frac{\sqrt{t}\dot{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)}{\sqrt{t}\dot{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) + p\ln t}, \end{aligned} \tag{2.295}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau$ – функція Лапласа.

Для випадку $\mu_1 = \mu_2^2 + 1$

$$\begin{aligned} u^1 &= t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}F(z), \\ u^2 &= -\frac{c_1}{2ptG(z)}, \end{aligned} \tag{2.296}$$

де

$$z = c_1\frac{x}{t},\ F(z) = \sqrt{G(z)}e^{\mu_2 \arctan\left(\frac{1}{2p}\frac{z+2}{z-1}\right)},$$
$$G(z) = (z+1)^2 + \frac{(z+2)^2}{4p^2},$$

та

$$\begin{aligned} u^1 &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)\sqrt{(N+1)^2 + 1}e^{\mu_2 \arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)}, \\ u^2 &= -\frac{1}{x}\frac{\sqrt{t}N^2 + (\frac{x^2}{2t} - 1)N}{(N+1)^2 + 1}, \end{aligned} \tag{2.297}$$

де $N = N(t,x) = \dfrac{x}{t}\dfrac{\dot{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)}{\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)}$.

Можна переконатися, що розв'язки (2.295)–(2.297) системи (2.234) неможливо отримати в рамках класичного методу Лі.

Зазначимо, що розв'язки (2.296) та (2.297) мають такі асимптотичні властивості:

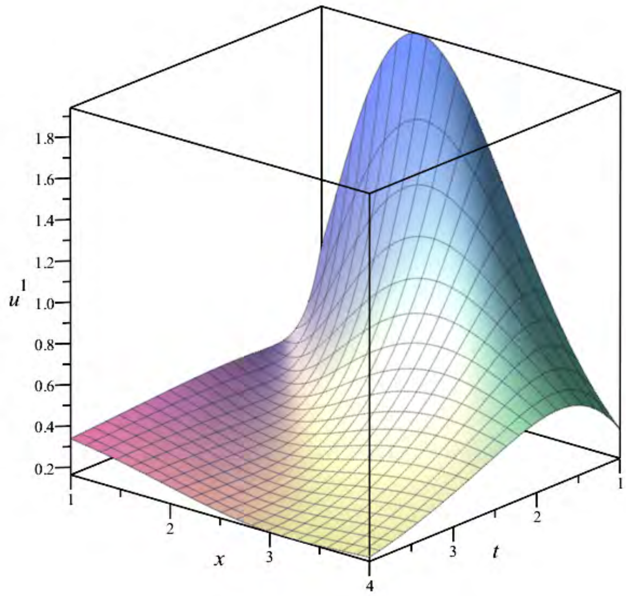
$$\lim_{t\to\infty} u^1 = \lim_{t\to\infty} u^2 = \lim_{x\to\infty} u^1 = \lim_{x\to\infty} u^2 = 0,$$

для розв'язку (2.296) та

$$\lim_{t\to\infty} u^1 = \lim_{t\to\infty} u^2 = \lim_{x\to\infty} u^2 = 0, \lim_{x\to\infty} u^1 = \frac{\sqrt{2}e^{-\mu_2\frac{\pi}{2}}}{2},$$

для розв'язку (2.297).

Це дає можливість використовувати ці розв'язки для розв'язування конкретних практичних задач. Графіки розв'язків (2.296) та (2.297), за певних обмежень на змінні t, x та параметри p, μ_2, c_1 наведено на рис. 2.5 та 2.6.



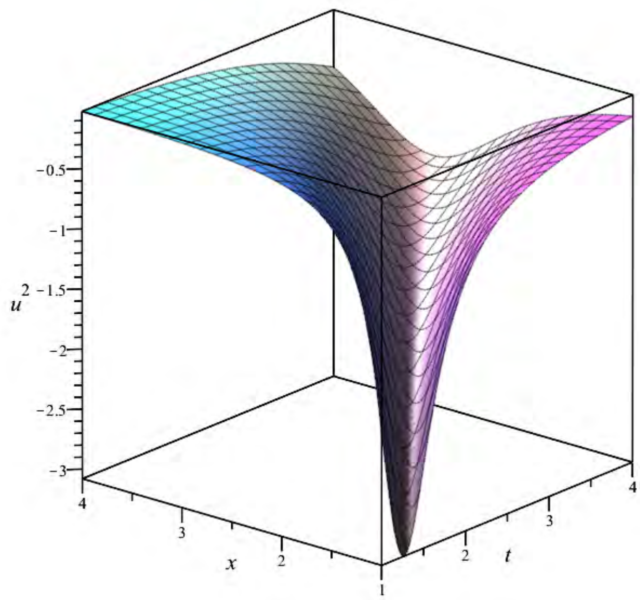
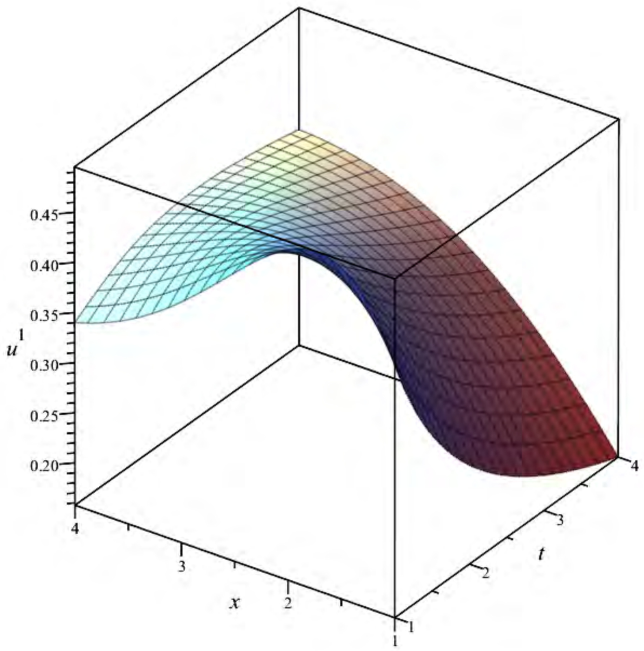


Рис. 2.5: Графік функції u^1 та u^2 розв'язку (2.296) при $c_1 = -2,\ \mu_2 = -1,\ p = -\frac{1}{2},\ t \in [1, 4],\ x \in [1, 4]$



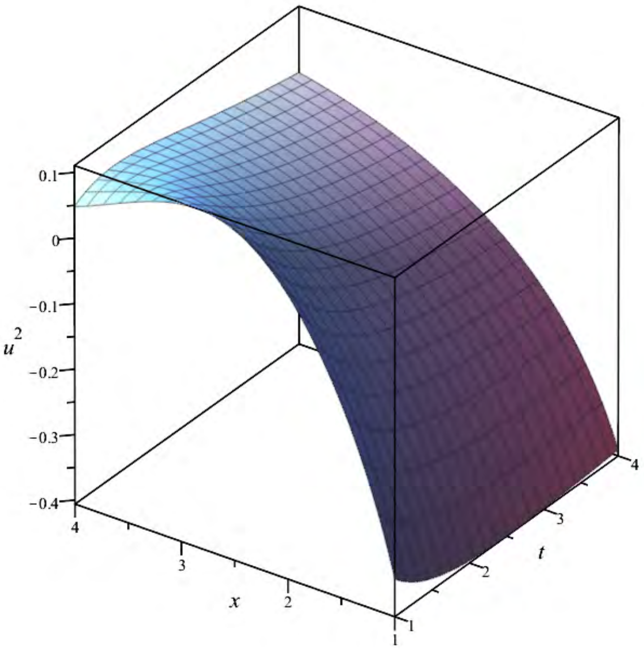


Рис. 2.6: Графік функції u^1 та u^2 розв'язку (2.297) при $\mu_2 = -1,\ t \in [1,4],\ x \in [1,4]$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований. *Дифференциальные уравнения.* 2002. Т. 38, № 4. С. 482–489.

[2] Аль Фарах Х., Портенко М. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів. Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. 24 с. (Препр. 2007.6).

[3] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации. *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 293. С. 1033–1035.

[4] Баранник А.Ф., Юрик І.І. Про точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії. *Український математичний журнал* 2005. Т. 57, № 8. С. 1011–1019.

[5] Белоколос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Эпольский В.З. Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных

уравнений. *Успехи математических наук.* 1986. Т. 41, № 2. С. 3–42.

[6] Белоколос Е.Д., Эпольский В.З. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравненининий в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния. *Успехи математических наук.* 1982. Т. 37, № 4. С. 89–120.

[7] Березанский Ю.М., Калюжный А.А. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. Київ : Наукова думка, 1992. 352 с.

[8] Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Киев : Наукова думка, 1988. 680 с.

[9] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наукова думка, 1965. 798 с.

[10] Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространстве бесконечного числа переменных. Киев : Наукова думка, 1978. 360 с.

[11] Биркгоф Г. Гидродинамика. М. : Иностранная литература, 1963. 400 с.

[12] Бойко В.М., Попович Р.О. Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня. *Доп. НАН України.* 2013. № 9. С. 7–15.

[13] Вільгельмссон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв‘язку температури та густини у термоядерних плазмах. *Український математичний журнал.* 1993. Т. 38, № 1. С. 44–53.

[14] Власенко Л.А., Перестюк Н.А. О разрешимости дифференциально–алгебраических уравнений с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал.* 2005. Т. 57, N 4. С. 458–468.

[15] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях. *Дифференциальные уравнения.* 1983. Т. 19. С. 1215–1223.

[16] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником. *Журнал вычеслительной математики и математической физики.* 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.

[17] Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б, Цыганов М.А. От беспорядка к упорядоченности – на примере движения микроорганизмов. *Успехи физических наук.* 1991.Т. 161, № 4. С. 13–71.

[18] Камке Э. Справочник по обыкновенним дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 704 с.

[19] Карпалюк Т.О. Симетрійна класифікація нелінійних рівнянь конвекції–дифузії відносно алгебр Галілея: дис. на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Полтава : ПолтНТУ, 2016. 154 с.

[20] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа. *Журнал прикладной механики и теоретической физики.* 1965. Т. 6. С. 105–106.

[21] Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М. : Наука, 1975. 228 с.

[22] Костенко В. Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Л. : Львів. держ. ун-т, 1959. 22 с.

[23] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований. *Дифференциальные уравнения.* 2002. Т. 38, № 3. С. 365–372.

[24] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. Праці Інституту математики НАН України: Мат-ка та її застосування. Київ, 2002. Т. 45. 359 с.

[25] Лазарь Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М. : Высшая школа, 1987. 296 с.

[26] Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.

[27] Луковский И.А. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. Киев : Наукова думка, 1977. 240 с.

[28] Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости. Киев : Наукова думка, 1984. 232 с.

[29] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью. *Прикладная механика.* 2004. Т. 40, № 10. С. 37–77.

[30] Луковський І.О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках. *Доповіді Національної академії наук України* 2002. № 5. С. 53–58.

[31] Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач математической физики. Киев : Вища школа, 1977. 408 с.

[32] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка., 1977. 331 с.

[33] Мартынюк Д.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. Киев : Наукова думка, 1984. 213 с.

[34] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Асимптотическое исследование слабонелинейных колебательных систем. Киев : Наукова думка, 1976. 54 с.

[35] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Математические проблемы нелинейной механики. Киев : Вища школа, 1987. 69 с.

[36] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев : Наукова думка, 1973. 182 с.

[37] Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно-двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи. *Функциональный анализ.* 1982. Т. 16, вып. 1. С. 80–82.

[38] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с. English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. Ovsiannikov L.V. New York: Academic Press, 1982. 400 p.

[39] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. *Докл. АН СССР.* Т.125, 1959. С. 492–495.

[40] Овсянников Л. В., Чаплыгина С.А. Групповые свойства уравнений. *Журнал прикладной механики и технической физики.* 1960. № 3. С. 126–145.

[41] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М. : Мир, 1989. 639 с.

[42] Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. *Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер.: Математика и её применение.* Киев, 2007. Т. 67. 427 с.

[43] Перестюк Н.А., Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием. *Украинский математический журнал.* 2001. Т.53, № 8. С. 1061–1079.

[44] Портенко М.І. Ймовірнісне зображення розв'язку однієї задачі математичної фізики. *Український математичний журнал.* 2000. Т 52, № 9. С. 1272–1282.

[45] Портенко М.І. Про рівняння відновлення, які виникають в деяких задачах теорії узагальнених дифузійних процесів. *Український математичний журнал.* 2005. Т. 57, № 9. С. 1302–1312.

[46] Приставка Ю.В. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Матеріали XV міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014

р. Київ: Т.1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування.* Київ : НТУУ «КПІ», 2014. С. 256–257.

[47] Приставка Ю.В. Точні розв'язки нелінійного (1+2)-вимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії. *Системи управління, навігації та зв'язку*, 2018. Вип. 3(49). С. 78-82.

[48] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М. : Наука, 1987. 301 с.

[49] Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. Об инвариантных множествах дифференциальных уравнений с малыми случайными возмущениями. *Дифференциальные уравнения.* 1998. Т.34, №1. С. 54–58.

[50] Самойленко А.М., Станжицький А.Н. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале. *Дифференциальные уравнения.* 2006. Вып. 42, №4. С. 476–482.

[51] Самойленко А.М., Станжицкий А. Н., Новак І.Г. Про асимтотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь. *Український математичний журнал.* 2011. Т. 63, № 8. С. 1103–1127.

[52] Сєрова М.М., Омелян О.М., Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини ван дер Ваальса. *Праці Інституту математики НАН України. Серія: Математика та її застосування.* 2000. Т. 36. С. 254–261.

[53] Сєров М.І., Блажко Л.М. Симетрійні властивості та точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу. Кременчук : ТОВ "Кременчуцька міська друкарня 2010. 122 с.

[54] Сєров М.І., Карпалюк Т.О. Принцип відносності Галілея для еволюційних рівнянь. Київ : Наукова думка, 2020. 275 с.

[55] Сєров М.І., Омелян О.М., Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису. Полтава : ПолтНТУ, 2012. 238 с.

[56] Сєров М.І., Омелян О.М., Черніга Р.М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень. *Доп. НАН України.* 2004. Вип. 10. С. 39–45.

[57] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2016. Вип. 14. С. 132–139.

[58] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції–дифузії. Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" , 21–22 квітня 2016 р. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 204–205.

[59] Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Про розширення основних симетрій двовимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія. Математика. Механіка.* 2015. Вип. 1(33). С. 38–44.

[60] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння

реакції–конвекції–дифузії. *Прикарпатський вісник НТШ.* 2017. Вип. 1(37). С. 42–52.

[61] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки нелінійного двовимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії. Матеріали Другої Всеукраїнської наукової конференції "Прикладні задачі математики" , присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, 13-15 жовтня 2016 р. Івано-Франківськ: Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, 2016. С. 92–94.

[62] Сєров М.І., Приставка Ю.В. Точні розв'язки двовимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії. Матеріали XVI міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р. Київ: Т.1. Диференціальні інтегральні рівняння, їх застосування. Київ : НТУУ "КПІ" , 2015. С. 207–208.

[63] Сєров М.І., Рассоха І.В. Симетрійні властивості рівнянь реакції–конвекції–дифузії: монографія. Полтава : ПолтНТУ, 2013. 168 с.

[64] Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Приставка Ю.В. Застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи рівнянь конвекції–дифузії до знаходження її точних розв'язків. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.* 2017. Вип. 83. С. 123–138.

[65] Сєров М.І., Сєрова М.М., Приставка Ю.В. Класифікація симетрійних властивостей (1+2)-вимірного рівняння реакції–конвекції–дифузії. Нелінійні коливання. 2019. Т. 22, № 1. С. 98–117.

[66] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом. *Український математичний журнал.* 1997. Т. 49, № 9. С. 1262–1270.

[67] Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійна класифікація одновимірного рівняння Фоккера-Планка з довільними коефіцієнтами знесення і дифузії. *Нелінійні коливання.* 1999. Т. 2, № 3. С. 401–413.

[68] Станжицький О. М. Дослідження стійкості інваріантних множин стохастичних систем за допомогою локальних координат. *Нелінійні коливання.* 2000. Т. 3, № 2. С. 266–270.

[69] Станжицький О. М., Цуканова А. О. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції–дифузії нейтрального типу. *Нелінійні коливання.* 2016. Т. 19, № 3. С. 408–430.

[70] Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t{=}h(u)u_{xx}$. *Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики.* Киев, 1988. № 8. С. 72–77.

[71] Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре P(1,4). *Український математичний журнал.* 1979. Т. 31, № 6. С. 717–722.

[72] Фущич В.І., Федорчук В.М., Федорчук І.М. Підгрупова структура узагальненої групи Пуанкаре і точні ррозв'язки деяких нелінійних хвильових рівнянь. Київ, АН УРСР Ін-т математики / препринт, 1986. №27, 36 с.

[73] Федорчук В.М. Симетрійна редукція і деякі точні розв'язки нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння. *Український математичний журнал.* 1996. 48, N 4. С. 574–577.

[74] Фущич В. И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М. : Наука, 1990. 400 с.

[75] Фущич В. И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев : Наук. думка, 1983. 199 с.

[76] Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. Киев : Ин-т математики, 1987. С. 4–16.

[77] Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики. Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. Киев : Ин–т математики, 1981. С. 6–28.

[78] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики. *Український математичний журнал.* 1991. Т. 43, № 11. С. 1456–1470.

[79] Фущич В. И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравненя теплопроводности. *Докл. АН Украины.* 1992. Т.1. С. 26–30.

[80] Фущич В.И., Сєров Н.И., Амеров Т.К. О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности. Киев : Наукова думка, 1989. 339 с.

[81] Фущич В. И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности. *Докл. АН УССР.* 1990. № 11. С. 15–18.

[82] Фущич В. И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукція нелинейніх уравнений, Киев : Наукова думка, 1991. 304 с.

[83] Фущич В. И., Миронюк П.И. Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики. *Scientific Works.* 2002. Vol. 4. C. 250–257.

[84] Фущич В. И., Серов Н.И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений. *Докл. АН СССР.* 1991. № 9. С. 45–49.

[85] Фущич В. И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности. *Докл. АН УССР.* 1988. Сер. А, № 9. С. 17–20.

[86] Фущич В. И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности. *Докл. АН УССР.* 1990. Сер. А, № 7. С. 24–27.

[87] Фущич В. І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь. *Український математичний журнал.* 1993. Т. 45, № 10. С. 1433–1443.

[88] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. Киев : Наукова думка, 1989. 339 с.

[89] Цифра І., Бойко В. Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля. *Доп. НАН України.* 1995. № 5. С. 35–36.

[90] Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными. *Математический сборник.* 1976. Т. 99. С. 261–281.

[91] Юрик І.І., Баранник Т.А. Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії. *Збірник праць Інституту математики НАН України.* 2006. Т. 3, № 2. С. 331–336.

[92] Яненко Н. Н. Теория совместимости и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. IV Всесоюзный математический сьезд (Ленинград, 1961). 1964. Т. 2. Р. 247–252.

[93] Adler J. Chemotaxis bacteria. *Sciense.* 1996. Vol. 153, P. 708–716.

[94] Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Nonlocal symmetries. Heuristic approach. *Journal of Soviet Mathematics* Vol. 55 (1991). P. 1401–1450.

[95] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol I. New York-London: Academic Press, 1965. 511 p.

[96] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol II. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 18-II. New York-London: Academic Press, 1972. 322 p.

[97] Anderson R.L., Ibragimov N.H. Lie-Backlund transformations in applications. Philadelphia. SIAM, 1979. 377 p.

[98] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: the theory of the steady state. Oxford: Clarendon Press, 1975. 460 p.

[99] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: Vol. 2: Questions of uniqueness stability, and transient behavior. Oxford: Clarendon Press, 1975. 232 p.

[100] Bäcklund A.V. Om ytor med konstant negativ krökning. *Lund Universitets Arsskrift.* – 1883. – № 19. – P. 24–38.

[101] Basarab–Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae* 2001. Vol. 69, N 1. P. 43–94.

[102] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1909. Vol. 8. P. 223–264.

[103] Berezansky Yu.M., Kondratiev Yu.G. Spectral methods in infinite-dimensional analysis, *Mathematical Physics and Applied Mathematics*, 1995, 12, vol. 1, 2, *Kluwer Academic Publishers.*, Dordrecht, 576 p., 432 p.

[104] Blazhko L.M. Nonlocal multiplication formulas for solutions of the sine-Gordon equation. Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics (Dedicated to the 70-th Anniversary of Professor W.I. Fushchych), Vol. 3 No. 2 (2006) P. 31–38.

[105] Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. Applications of symmetry methods to partial differential equations. A*pplied Mathematical Sciences.* Springer: New York, 2010. Vol. 168. 398 p.

[106] Bluman G. W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *Applied mathematics.* 1968/69. Vol. 18. P. 1025–1042.

[107] Bluman G.W., Doran-Wu P. The use of factors to discover potential systems of linearizations, *Applied mathematics.* 41 1995. P. 21-43.

[108] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. Springer: New York, 1989. 142 p.

[109] Bluman G. , Kumei S. Symmetry-based algorithms to relate partial differ- ential equations. I. Local symmetries. *EJAM.* 1990. Vol. 1. P. 189–216.

[110] Bluman G. , Kumei S. Symmetry-based algorithms to relate partial differ- ential equations. II. Linearization by nonlocal symmetries. *EJAM.* 1990. Vol. 1. P. 1217–223.

[111] Bluman G.W., Shtelen V.M. New classes of Schrodinger equations equivalent to the free particle equation through nonlocal transformations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 1996. P. 4473–4480.

[112] Bluman G.W., Reid G.J. New classes of symmetries for ordinary differential equations. *Institute of Mathematics and its Applications. Journal of Applied Mathematics.* 1988. Vol. 40. P. 87–94.

[113] Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics.* 1988. Vol. 29, N 4. P. 806–811.

[114] Bluman G.W., Yan Z. Nonclassical potential solutions of partial differential equations. *European Journal of Applied Mathematics.* 2005. Vol. 16. P. 239–261.

[115] Bluman G.W., Cheviakov A.F. Framework for potential systems and nonlocal symmetries: Algorithmic approach, *Journal of Mathematical Physics.* 2005. Vol. 46, P. 123506 https://doi.org/10.1063/1.2142834

[116] Boyko V. Symmetry Classification of the One-Dimensional Second Order Equation of a Hydrodynamic Type. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 1995. Vol. 2, N3-4. P. 418–424.

[117] Boyko V.M., Popovych V. O. Group classification of Galilei-invariant higher-orders equations. *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.* 2001. Vol. 3. P. 45–50.

[118] Boyko V.M., Popovych V. O., Shapoval N.M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2013. Vol. 397, N1. P. 434–440.

[119] Britton N.F. Essential mathematical biology. London: Springer, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003. 335 p.

[120] Caudrey P.J., Eibeck J.C., Gibbon J.D. The sine-Gordon equationasa model field theory. *Nuovo Cimento.* 1975. Vol. 25. P. 497–512.

[121] Cherniha R.M., King J.R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems. I. *Journal of Physics A.* 2000. Vol. 3. P. 267–282.

[122] Cherniha R.M., King J.R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction- diffusion systems. I. Addendum, *Journal of Physics A.* 2000 Vol. 33. P. 7839–7841.

[123] Cherniha R.M., King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II. *Journal of Physics A.* 2003. Vol. 36. P. 405–425.

[124] Cherniha R.M., King J.R. Nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansatze and exact solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2005. Vol. 308. P. 11–35.

[125] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry,

Exact Solutions and Their Applications. Chapman Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2018. 240 p.

[126] Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmeties and form-preserving transformation of reaction–diffusion–convection equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. Vol. 342, N2. P. 1363–1379.

[127] Cherniha R. Conditional symmetries for boundary value problems: new definition and its application for nonlinear problems. *Miskolc Mathematical Notes.* 2013. Vol. 14. P. 637–646.

[128] Cherniha R. New Q-conditional symmetries end exact solutions reaction-diffusion-convection eduations arising in mathematical biology. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2007. V. 326. P. 783–799.

[129] Cherniha R., Serov M. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms. *European Journal of Applied Mathematics.* 1998. Vol. 9. P. 527–542.

[130] Cheviakov A.F. Symbolic computation of equivalence transformations and parameter reduction for nonlinear physical models. *Computer Physics Communications.* 2017. Vol. 220. P. 56–73.

[131] Gardner C. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura. *Physical Review Letters.* 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.

[132] Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology, volume 46 of Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. 586 p.

[133] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations. *Physics Letters A.* 1994. Vol. 190. P. 149–154.

[134] Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I. Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation. Lviv : Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2018. 176 p.

[135] Fedorchuk V. Symmetry Reduction and Exact Solutions of the Euler-Lagrange-Born-Infeld, Multidimensional Monge-Ampere and Eikonal Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* 1995. Vol. 2, N 3–4. P. 329–333.

[136] Fedorchuk V.M., Fedorchuk I.M. On exact solutions of some five–dimensional nonlinear waveequations. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoj SSR, Ser.A.* 1989, N 12, 17—19.

Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations. *Physics Letters A.* 1994. Vol. 190. P. 149–154.

[137] Fife P. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, volume 28 of Lecture notes in biomathematics. Berlin--Heidelberg-New York: Springer, 1975. 185 p.

[138] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics.* 1937. Vol. 7. P. 353–369.

[139] Fushchych W.I., Serov N.I., Tychynin V.A., Amerov T.K. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Ukraine.* 1992. N11. P. 27–33.

[140] Fushchych W.I., Shtelen W. M., Serov M. I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical

physics. *Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group,* Dordrecht, 1993. Vol. 246. 435 p.

[141] Fushchych W.I., Tsifra I. M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry. *Journal of Physics A.* 1987. Vol. 20, N2. P. L45–L48. http://stacks.iop.org/0305-4470/20/L45.

[142] Fushchych W.I., Tychynin V.A. Hodograph transformations and generating of solutions for nonlinear differential equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Ukraine.* 1993. N10. P. 52–58.

[143] Fushchich W.I., Serov M.I. Conditional invariance and exact solutions of a nonlinear acoustics equation,Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Ser. A, 1988, no.1, P. 28–32.

[144] Fushchych W.I., Serov M.I., Amerov T.K., On nonlocal anz*mboxa*tze of one nonlinear one-dimensional heat conduction equation. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoj SSR.* 1992. Vol. 1 P. 26–30.

[145] Fushchych W.I., Tychynin V.A., Serov M.I. Formula of generating solutions for the Korteweg-de Vries equation. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* 1992. Vol. 44, N 5. P. 716–719.

[146] Hashemi M. S., Nucci M. C. Nonclassical symmetries for a class of reaction–diffusion equations: the method of heir-equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* 2013. Vol. 20, N 1. P. 44–60.

[147] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters.* 1971. Vol. 27. P. 1192–1194.

[148] Hirota R. Bilinearization of Soliton Equations. *Journal of the Physical Society of Japan.* 1982, Vol. 51, N 1, P. 323–331.

[149] Huang Q., Qu C., Zhdanov R., Group-theoretical framework for potential symmetries of evolution equations. *Journal of Mathematical Physics.* 2011. Vol. (2): 023514. P. 0022–2488. https://doi.org/10.1063/1.3554692.

[150] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.-Y. The global attractor of dissipative nonlinear evolution system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1999. Vol. 238. P. 124–142.

[151] Johnpillai A.G., Kara A.H., Nonclassical Potential Symmetry Generators of Differential Equations. *Nonlinear Dynamics.* 2002. Vol. 30. P. 167–177. https://doi.org/10.1023/-A:1020498600432.

[152] Katkov V.L. The group classification of solutions of the Hopf equations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 1965. Vol. 6. P. 105 – 106.

[153] Keller E.F., Segel L.A. Model for chemotaxis. *Journal of Theoretical Biology.* Vol. 30. 1971. P. 225–234.

[154] King J. R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1990. Vol. 23. P. 5441–5464.

[155] Kuang Y., Nagy J.D., Eikenberry S.E. Introduction to mathematical oncology. Chapman Hall/CRC Mathematical and Computational Biology Series. Boca Raton, Florida : CRC Press, 2016. 480 p.

[156] Lapidus R., Schiller R., A model for travelling bands of chemotactic bacteria. *Journal of Theoretical Biology.* 1978. Vol. 22. P. 1–13.

[157] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$. *Archiv for Mathematik.* 1881. Vol. 8, N 1. P. 112–125.

[158] Lie S. Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. *I, II, Mathematische Annalen.* 1888. Vol. 32. P. 213–281.

[159] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung. *Archiv for Mathematik.* 1881. Vol. 6, N 3. P. 328–368.

[160] Lie S. Uber Differentialinvarianten. *Mathematische Annalen.* 1884. Vol. 24, N 1. P. 52–89.

[161] Lie S., Engel F.Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 1–3. 1888, 1890, 1893. 623 s., 554 s., 830 s.

[162] Lie S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen. Leipzig: Teubnner, 1893. 805 p.

[163] Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations. PhD Thesis University of British Columbia. 1992. (www.ise.canberra.edu.ua/mathstat/StaffPages/Lia-le-Dissertation.pdf).

[164] Murray J.D. Mathematical biology. I. *Interdisciplinary Applied Mathematics, third edition. An introduction.* New York : Springer, 2002. Vol. 17. 551 p.

[165] Murray J.D. Mathematical biology. II. *Interdisciplinary Applied Mathematics, third edition. Spatial models and biomedical applications.* New York : Springer, 2003. Vol. 18. 881 p.

[166] Murray J.D. Nonlinear partial differential equations models in biology. Oxford: Clarendon Press, 1977. 370 p.

[167] Murray J. D. Mathematical Biology. Berlin : Springer, 1989. 767 p.

[168] Murray J. D. Mathematical Biology. II. Berlin : Springer, 2003. 801 p.

[169] Nanjundiah V. Chemotaxis, signal relaying and aggregation morphology. *Journal of Theoretical Biology.* Vol. 42, N 1. 1973. P. 63–105.

[170] Nikitin A.G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. *Ukrainian Marhematical Bulletin.* 2005. Vol. 2, N 2. P. 153–204.

[171] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA).* 2007. Vol. 332, N 1. P. 666–690.

[172] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2007. Vol. 59, N 3. P. 395–411.

[173] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginzburg-Landau equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA).* 2006. Vol. 324. P. 615–628.

[174] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, in: A.M. Samoilenko (Ed.), Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics, Proc, of the Third Int. Conf., Kiev, July 12–18, 1999, Inst, of Math, of Nat. Acad. Sci. of Ukraine, 2000. P. 47–59.

[175] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties. *Journal of Mathematical Physics.* 2001. Vol. 42. P. 1666–1688.

[176] Nizhnik L.P., Inverse Scattering Problem for Hyperbolic Equations. Kiev : Naukova Dumka, 1991. 232 p.

[177] Nizhnik L.P., Tarasov V.G. A multidimensional inverse scattering problem for a system of first-order partial differential equations. Boundary value problems for differential equations. Akad. Nauk Ukrainy, Inst. Mat., Kiev, 1992. P. 84–93.

[178] Noether E. Invariante variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen: Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918. P. 235–257.

[179] Okubo A., Levin S.A. Diffusion and ecological problems: modern perspectives. *Interdisciplinary Applied Mathematics, second edition.* New York : Springer, 2001. Vol. 14. 468 p.

[180] Oliveira-Pinto F., Conolly B.W. Applicable Mathematics of Non-Physical Phenomena. New York : Halsted Press, 1982. 269 p.

[181] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. *Graduate Texts in Mathematics. Springer.* 1986. Vol. 107. 510 p.

[182] Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1987. Vol. 47. P. 263–278.

[183] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heart and wave equations. *Physics Letters A.* 1986. Vol. 118, N 4. P. 172–176.

[184] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. New York :Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publihers], 1982. 432 p.

[185] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, 2nd Edition. Chapman Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, Boca Raton, Florida: CRC Press, 2003. 802 p.

[186] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2004. Vol. 37. P. 7547–7565.

[187] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2005. Vol. 38. P. 3145–3155.

[188] Popovych R.O., Vaneeva O. O., Ivanova N.M. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation. *Physics Letters A.* 2007. Vol. 362, N 2-3. P. 166–173.

[189] Qu C. Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a gen- eralized conditional symmetry method. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 1999. Vol. 62, N 3. P. 283–302.

[190] Qu C. Group classification and generalized conditional symmetry reduction of the nonlinear diffusion-convection equation with a nonlinear source. *Studies in Applied Mathematics.* 1997. Vol. 99, N 2. P. 107–136.

[191] Reyes E.G. Nonlocal symmetries and Kaup-Kupershmidt equation. *Physics Letters A.* 2005. Vol. 46. 073507. 19 p.

[192] Rosen G. Nonlinear heat conduction in solid h2. *Physical Review B.* 1979. Vol. 19. P. 2398–2399.

[193] Saccomandi G., Potential symmetries and direct reduction methods of order two. Journal of Physics A-mathematical and General. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1997. Vol. 30. P. 2211–2217. 10.1088/0305-4470/30/6/039.

[194] Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. Singapore: World Scientific, 2011. 322 p.

[195] Serov M.I., Blazhko L.M. Solutions and the Conditional Symmetry of the Sine-Gordon Equation. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* Kiev : Institute of Mathematics of NAN of Ukraine, 2009. Vol. 6, N 4. P. 527–548.

[196] Serov M.I., Karpaliuk T.O., Pliukhin O.G., Rassokha I.V. Systems of reaction-convection-diffusion equations invariant under Galilean Algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2015. Vol. 422. P. 185–211. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.018.

[197] Serov M., Prystavka Yu. Nonlocal ansätze, reduction and some exact solutions for the system of the van der Waals equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2020. Vol. 481,N 1. P. 98–117. doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123442.

[198] Serov M., Serova M., Omelyan O., Prystavka Yu. Application of non-local conversions of equivalence of the system of convection-diffusion equations to the finding of exact solutions. International conference of differential equations dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky: book of abstracts, 20–24 September 2016. Lviv : Ivan Franko National University of Lviv, 2016. P. 105-107.

[199] Serov M.I., Podoshvelev Y.G. On Nonlocal Symmetries of a System of Chemotaxis Equations With Derivative Nonlinearity. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* 2022, Vol. 74, N 3. P. 373–88, doi:10.37863/umzh.v74i3.6997.

[200] Shonkwiler R., Herod J. Mathematical Biology: An Introduction with Maple and MATLAB. Undergraduate Text in Mathematics. New York : Springer, 2009. 551 p.

[201] Spichak S.V., Stognii V.I.Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion. *Journal of Physics A*. 1999. Vol. 32, N 47. P. 8341–8353.

[202] Tychynin V. New nonlocal symmetries of diffusion-convection equations and their connection with generalized hodograph transformation. *Symmetry.* 2015. Vol. 7, N 4. P. 1751–1767.

[203] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1994. Vol. 27. P. 4549–4556.

[204] Tychynin V.A., Petrova O.V. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2011. N 382. P. 20–33.

[205] Tychynin V.A., Petrova O.V., Tertyshnyk O.M. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications(SIGMA).* 2007. Vol. 3, N 19. 14 p.

[206] Tychynin V.A., Rasin O.G. Nonlocal symmetry and generation of solutions for reaction-diffusion equations. *Reports on Mathematical Physics.* 2005. Vol. 55, N 2. P. 297–302.

[207] Waniewski J. Theoretical foundations for modeling of mebrane transport in medicine and biomedical engineering. Institute of Computer Science PAS: Warsaw, 2015. 133 p.

[208] Wilhelmsson H. Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects. *Physica Scripta.* 1992. Vol. 46. P. 177–181.

[209] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non–linear diffusion–convection equation $u_t=(D(u)u_x)_x-K'(u)u_x$. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 1994. Vol. 29, N 3. P. 273–278.

[210] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1999. Vol. 32. P. 7405–7418.

[211] Zhdanov R.Z. Conditional Lie–Backlund symmetry and reduction of evolution equations. *Journal of Physics A.* 1995. Vol. 28, N 13. P. 3841–3850.

[212] Zhdanov R.Z. On relation between potential and contact symmetries of evolution equations. *Journal of Mathematical Physics (JMP).* 2009. Vol. 50. Issue 5, pp. 053522–053522–9. https://doi.org/10.1063/1.3138147.

Наукове видання

Міністерство освіти і науки
Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка

Сєров Микола Іванович
Подошвелев Юрій Георгійович
Приставка Юлія Володимирівна

Симетрійні властивості та точні розв'язки рівнянь реакції–конвекції–дифузії

Київ, Науково-виробниче підприємство «Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2023

Підп. до друку ... Формат ... Папір ...
Гарн. ... Ум. друк. арк. ...
Обл.вид. арк. ... Тираж ... прим. Зам. ...