МАТЕМАТИКА: ПРАКТИКУМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Г. КОРОЛЕНКА

Н. Гібалова, Н. Карапузова, Н. Ржеко

МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник для здобувачів спеціальності 013 Початкова освіта

Полтава 2023

УДК 51(076.5)(075.8)
Г 46

Рекомендовано Вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка як навчальний посібник для студентів спеціальності 013 Початкова освіта (Протокол № 1 від 26 січня 2023 року)

Рецензенти:
Сулаєва Наталія Вікторівна — доктор педагогічних наук, професор, декан психолого-педагогічного факультету Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка;
Садова Ірина Ігорівна – доктор педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри, педагогіки та методики початкової освіти Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Гібалова Н.В., Карапузова Н.Д., Ржеко В.А. **Математика: Практикум :** навчальний посібник для студентів спеціальності 013 Початкова освіта. / за ред. Н.В.Гібалової. Полтава: ПНПУ імені В.Г. Короленка, 2023. 202с.

У посібнику викладено короткий зміст теоретичних положень математичної науки, що є базовими для для курсу математики початкової школи. У систематизованому вигляді подано завдання для аудиторної, самостійної та індивідуальної роботи, містить зразки виконання завдань з розділів «Множини. Відповідності. Відношення», «Елементи математичної логіки», «Цілі невід'ємні числа», «Розширення поняття про число», «Рівняння.Нерівності.Функції», «Елементи геометрії. Величини». Посібник може бути використано як для традиційної так і для дистанційної форм навчання.

Призначений для викладачів, студентів спеціальності 013 Початкова освіта.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Цей посібник з курсу математики для студентів напряму підготовки «Початкова освіта» побудований з урахуванням системи математичних понять, які становлять теоретичні основи початкового курсу математики. Його створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Мета посібника – допомогти майбутнім учителям початкової школи здобути ґрунтовну математичну освіту, що відповідає найвищим запитам сучасності. У першому розділі «Множини. Відповідності. Відношення» розглядаються поняття теорії множин, які є основою для побудови числових систем з теоретико-множинної точки зору.

Другий розділ «Елементи математичної логіки» містить матеріал, необхідний для усвідомлення структури дедуктивної теорії (поняття, означення, теореми), формування вміння аналізувати поняття з диз'юнктивною або кон'юнктивною структурою ознак та будувати класифікації понять.

У третьому розділі множина цілих невід'ємних чисел розглядається з теоретико-множинної та аксіоматичної точок зору.

Четвертий розділ «Системи числення. Подільність цілих невід'ємних чисел» присвячений десятковій та не десятковій системам числення; застосуванню ознак подільності та теорем про подільність суми, різниці, добутку для розв'язування задач.

Розширення поняття про число подано у п'ятому розділі у логіко-алгебраїчній послідовності: цілі числа, раціональні числа, дійсні числа. Обґрунтована проблема необхідності розширення поняття числа, узагальнено властивості числових множин, алгоритми обчислень, у тому числі й наближених.

Шостий розділ «Рівняння. Нерівності. Функції» містить теоретичні основи алгебраїчного матеріалу початкового курсу математики, способи застосування рівнянь та їх систем до розв'язування алгебраїчних задач, а також елементи аналітичної геометрії (рівняння лінії, кола, прямої). Розгляд лінійної, квадратичної функції, оберненої пропорційності дає можливість побачити функціональну залежність у багатьох реальних процесах.

Зміст сьомого розділу «Елементи геометрії. Величини» сприяє формуванню поняття про аксіоматичний метод побудови геометрії, основні геометричні фігури, їх властивості та ознаки, вмінь розв'язувати задачі на обчислення геометричних величин, побудову геометричних фігур, доведення тверджень. Основні формули геометрії та зображення геометричних фігур подано у додатках.

Особливістю посібника є структурованість його розділів, які включають стислий виклад теоретичного матеріалу, завдання для самоконтролю, аудиторної та самостійної роботи.

Посібник допоможе студентам систематизувати основні математичні поняття за допомогою завдань для самоконтролю, оволодіти основними ідеями, фактами і процедурами, що лежать в основі розв’язання типових задач із вказаних розділів, сприятиме формуванню предметних математичних компетенцій (обчислювальних, інформаційно-графічних, логічних, геометричних, алгебраїчних); вмінню аналізувати матеріал з математики, що вивчається в початковій школі.

Посібник може бути використаний як довідник, задачник для практичних занять, індивідуальної та самостійної роботи.

РОЗДІЛ І. МНОЖИНИ. ВІДПОВІДНОСТІ. ВІДНОШЕННЯ

1.1. МНОЖИНИ

1. Поняття «***множина»*** є неозначуваним поняттям. ***Множину*** можна уявити як сукупність (групу) елементів, що мають деяку загальну властивість (природу, семантику). Об'єкти будь-якої природи (числа, геометричні фігури, літери, дерева тощо), з яких складається ***множина***, називаються її ***елементами***.

Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A; запис $a \notin A$, означає, що a не належить A.

Множини, елементами яких є числа, називають ***числовими***.

Загальноприйняті *позначення числових множин*:

$\boldsymbol{N}$ – множина натуральних чисел;

$\boldsymbol{N_0}$ – множина цілих невід'ємних чисел;

$\boldsymbol{Z}$ – множина цілих чисел;

$\boldsymbol{Q}$ – множина раціональних чисел;

$\boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел.

2. ***Множину*** можна задати такими способами:

1) *Переліком елементів:* $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ – множина A містить елементи 2, 4, 6, 8, 10. Порядок елементів у записі множини неістотний: записи $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ і $\{4, 2, 10, 6, 8\}$ задають одну і ту саму множину.

2) *За допомогою характеристичної властивості*:

Нехай маємо запис „x – має властивість P". Тоді множину A, всі елементи якої мають властивість P, записують так $A = \{x \mid P(x)\}$.

Наприклад, множину $A = \{2, 4, 6, 8\}$ можна записати

$A = \{x|x \in N, x<10, x \vdots 2\}$ або $A = \{x|x$ – натуральне парне число менше10$\}$.

3) *Числовим проміжком* (для підмножин множини дійсних чисел $\boldsymbol{R}$).

Нехай $\boldsymbol{a,b \in R, a<b}$. Будемо використовувати такі позначення:

$\boldsymbol{[a;b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}}$ – відрізок,

$\boldsymbol{(a;b) = \{x \in R \mid a < x < b\}}$ – інтервал,

$\boldsymbol{[a;b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}}$ – півінтервал,

$\boldsymbol{(a;b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}}$ – півінтервал.

Розрізняють ***скінченні*** (кількість елементів обмежена) й ***нескінченні*** (кількість елементів необмежена) множини. Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається символом $\varnothing$.

Приклад

$B = \{x|x \in \mathrm{N}; x<0\} = \varnothing$.

3. *Означення.* Множина A називається ***підмножиною*** множини B($A \subset B$), якщо кожний елемент множини A належить множині B.

Із означення випливає, що $A \subset A$. Вважають, що $\varnothing \subset A$.

Підмножина B множини A називається ***невласною*** підмножиною, якщо $B = A$ або $B = \varnothing$.

Отже, A і $\varnothing$ – невласні підмножини множини A.

Усі підмножини множини A, крім $\varnothing$ і самої множини A, називаються ***власними*** підмножинами множини A або її ***правильними частинами***.

Приклад

Запишемо всі підмножини множини $A = \{2, 4, 6\}$: ***невласні підмножини*** – A, $\varnothing$; ***власні підмножини*** – $\{2\}$,$\{4\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$.

4. *Означення.* Множини A і B називаються ***рівними***, якщо кожний елемент множини A належить множині B і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A ($A \subset B$ і $B \subset A$).

Рівні множини мають однакові елементи.

Приклад

Якщо $A = \{a, b, c, d, e\}$, $D = \{d, b, e, c, a\}$, то $A = D$.

5. Для зображення відношень між множинами використовують геометричні схеми, що називаються діаграмами *Ейлера-Венна.*

Означення. ***Універсальна множина*** U – множина, якій належать елементи всіх множин, що складаються з елементів однієї природи.

Універсальна множина зображується *прямокутником*, а її *підмножини* – кругами, розміщеними всередині прямокутника.

Приклад

На рисунку 1 зображено відношеннявключення множини B у множину A($B \subset A$), що належать універсальній множині U.

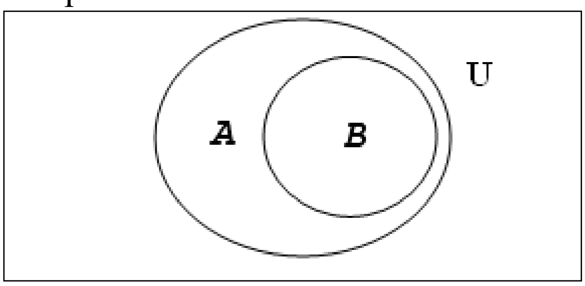


Рис.1

6. Основними операціями над множинамиє ***об'єднання***, ***переріз*** і ***віднімання***.

Означення. ***Об'єднанням двох множин A*** і ***B*** називається нова множина $A \cup B$ (рис. 2), яка містить усі ті й тільки ті елементи, які належать *хоча б одній* із множин, або A або B ($A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$).

Об'єднання множин A і B включає усі елементи множини A й ті елементи множини B, що не належать множиніA.

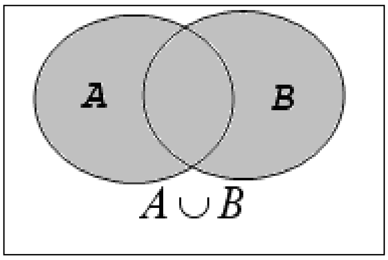


Рис.2

Означення об'єднання множин $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \{x | x \in A_1$ або $x \in A_2$, або $x \in A_3, \ldots$ або $x \in A_n\}$.

Приклади

1. $B = \{1,2, 3, 4\}$, $A = \{1,2, 3, 7, 8\}$;

$A \cup B = \{1,2,3,4,7,8\}$.

2. $C = \{x | x \in R;\ x < 6\}$, $D = \{x | x \in R;\ x > -4\}$;

$C \cup D = \{x | x \in R\} = (-\infty; +\infty)$ (рис. 3).

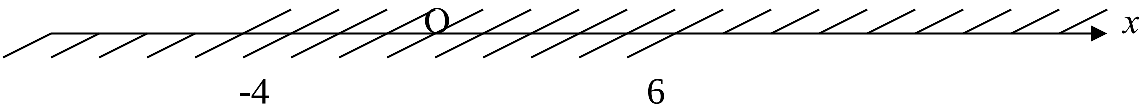


Рис.3

3. L – множина піаністів, T – множина бандуристів.

$L \cup T$ – музиканти, які грають хоча б на одному інструменті (або на фортепіано, або на бандурі).

4. $A_1 = \{1,2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1,2, 3, 7, 8\}$, $A_3 = \{a, b, 1,2\}$, $A_4 = \{1,2,6,7\}$;

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{a, b, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$.

Властивості об'єднання

1) $A \cup A = A$;

2) $A \cup \varnothing = A$.

7. *Означення.* ***Перерізом множин A*** і ***B*** називається нова множина $A \cap B$ (рис.4), що містить усі ті й тільки ті елементи, які належать і множині A і множині B одночасно ($A \cap B = \{x | x \in A$ і $x \in B\}$).

Переріз множин складається зі спільних елементів усіх множин.

Означення перерізу множин $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \{x | x \in A_1, x \in A_2, x \in A_3 \ldots x \in A_n\}$.

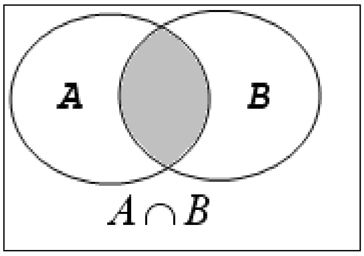


Рис.4

Приклади

1. $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1,2, 3, 7, 8\}$;
$A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

2. $C = \{x | x \in R;\ x < 6\}$, $D = \{x | x \in R;\ x > -4\}$;
$C \cap D = \{x | x \in R; -4 < x < 6\} = (4; 6)$ (рис. 5).

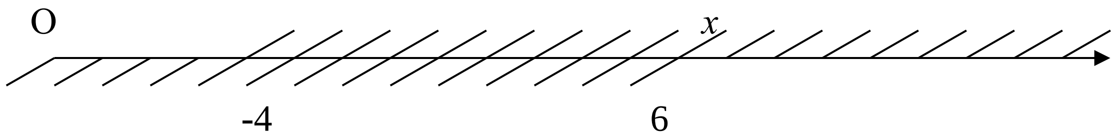


Рис.5

3. L – множина піаністів, T – множина бандуристів;
$L \cap T$ –музиканти, які грають на бандурі й на фортепіано.

Властивості перерізу

Нехай A, B, C – множини, а $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ – відповідно кількість елементів у цих множинах.

1) $A \cap A = A$;

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

3) Якщо $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$;

4) Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;

5) Якщо $A \cap B \cap C \neq \varnothing$, то

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Приклад

Відомо, що із 600 студентів педагогічного факультету мають оцінки «відмінно» – 380 студентів, «добре» – 420, «задовільно» – 520; «відмінно» і «добре» – 180, «відмінно» і «задовільно» – 260, «добре» і «задовільно» – 410. Скільки студентів мають оцінки і «відмінно», і «добре», і «задовільно»?

Розв'язання

Позначимо через A – множину студентів, що мають оцінку «відмінно», через B – «добре»; через C – «задовільно». Множина всіх студентів педагогічного факультету $A \cup B \cup C$. Згідно з умовою задачі, $n(A) = 380$, $n(B) = 420$, $n(C) = 520$, $n(A \cap B) = 180$, $n(A \cap C) = 260$, $n(B \cap C) = 410$. Потрібно знайти $n(A \cap B \cap C)$.

За властивістю 5 маємо:

$n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) +$
$+ n(B \cap C) = 600 - 380 - 420 - 520 + 180 + 260 + 410 = 130$ (ст.) – мають оцінки «5», «4», «3».

Відповідь: 130 студентів.

8. *Означення.* ***Різницею множин*** A і B називається нова множина $A\backslash B$ (рис.6), що містить усі ті й тільки ті елементи, які належать множині A і не належать множині B ($A \backslash B = \{x|x \in A; x \notin B\}$).Операція знаходження різниці множин називається ***відніманням***.

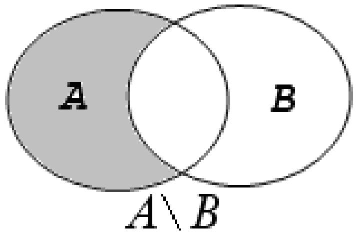


Рис.6

Приклади

1. $B = \{1,2, 3, 4\}$, $A = \{1,2, 3, 7, 8\}$;
$A \backslash B = \{7,8\}$, $B\backslash A = \{4\}$.

2.$C = \{x|x \in R;\ x<6\}$, $D = \{x|x \in R;\ x> -4\}$;
$C\backslash D = \{x|x \in R;\ x\leq -4\}$, $D\backslash C = \{x|x \in R;\ x\geq 6\}$.

4. L – множина піаністів, T – множина бандуристів;
$T \backslash L$ – музики, які грають лише на бандурі.

9. *Означення.* ***Доповненням множини B до множини A***називають множину $\boldsymbol{B'_A}$, яка є різницею множин A і B, якщо $B \subset A$(рис.7).

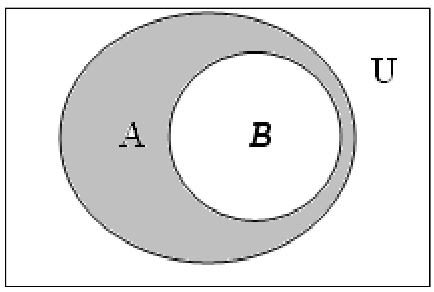


Рис.7

Означення. ***Доповненням множини B*** до універсальної називають таку множину$\boldsymbol{B'}$, що складається з елементів, які належать універсальній множині й не належать множині B (рис.8).

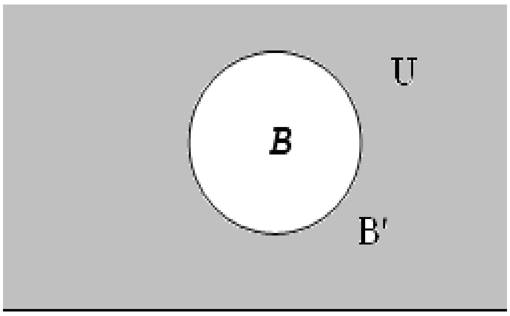


Рис.8

Властивості різниці і доповнення:

1) $A \setminus B \neq B \setminus A$, *якщо* $A \neq B$;

2) $A \cup A' = U$;

3) $A \cap A' = \varnothing$;

4) $U' = \varnothing$;

5) $\varnothing' = U$.

Наслідок з властивостей 2, 3*:* для кожного елемента $x \in U$ і підмножини A ($A \subset U$)маємо $x \in A$ або $x \in A'$.

Приклад

Нехай U – множина студентів педагогічного університету; A – множина студентів психолого-педагогічного факультету; B – множина студентів жіночої статі психолого-педагогічного факультету; C – множина студентів університету, які мають спортивний розряд.

Тоді:

1) A'– множина студентів університету, окрім студентів психолого-педагогічного факультету;

2) $B' \cap C$ – множина студентів-чоловіків, що навчаються на психолого-педагогічному факультеті й мають спортивний розряд;

3) $A \cup C'$ – множина студентів психолого-педагогічного факультету або студентів університету, які не мають спортивного розряду.

10. *Властивості операцій об'єднання, перерізу і доповнення*:

1) комутативний закон перерізу й об'єднання:

$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$

2) асоціативний закон перерізу й об'єднання:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

3) дистрибутивний (розподільний) закон перерізу множин відносно об'єднання і об'єднання відносно перерізу:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4) закони де Моргана:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$; б)$(A \cap B)' = A' \cup B'$;

5) закон подвійного доповнення:$(A')' = A'' = A$.

11. Нехай A і B – множини. Запис виду (a, b), де $a \in A$ і $b \in B$, називається ***упорядкованою парою***. Елементи упорядкованої пари називаються її ***компонентами*** або ***координатами.*** Рівність виду $(a,b) = (c,d)$ означає, що $a = c$ і $b = d$.

Запис виду $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, де $a_1 \in A_1,\ldots, a_n \in A_n$ називається ***впорядкованою n-кою.*** Впорядковані ***n-ки*** інакше називають ***набори*** або ***кортежі довжини n***.

Приклади: 1) *слово* – кортеж, складений із букв; 2) *запис числа* – кортеж цифр; 3) *речення* – кортеж слів; 4) *весільний кортеж, кортеж машин.*

12. *Означення.* ***Декартовим добутком двох множин A*** і ***B*** називається множина $A\times B$ всіх пар (a, b), де $a \in A$, $b\in B$ ($A\times B=\{(a,b)|\ a \in A,\ b\in B\}$).

Означення. ***Декартовим (прямим) добутком множин*** A_1, A_2, ... A_n називається множина всіх упорядкованих *n-ок* (кортежів):

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n= \{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ a_i \in A_i\}, i =1,\ldots,n.$$

Якщо A і B – числові множини, то декартовий добуток $A \times B$ можна графічно подати на координатній площині.

Приклади

1. Нехай $A = \{a, b, c\}$ *і* $B =\{p, z\}$. Тоді: $A\times B = \{(a, p), (a, z), (b, p), (b,z), (c, p), (c, z)\}$.

2. $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y= \{3, 4, 5\}$. Скласти множину $X\times Y$ і зобразити у вигляді точок площини (рис.9).

Розв'язання. $X \times Y =\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$.

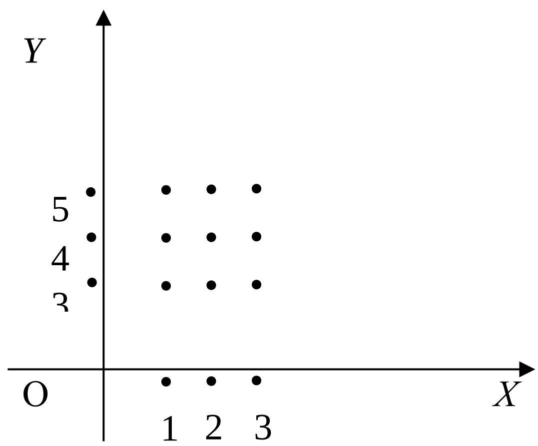


Рис. 9

3. Нехай $X = \{x\ |2< x< 5,\ x \in R\}$ і $Y = \{y\ |y^2 - y < 0,\ y\in R\}$.Знайдемо декартовий добуток D множин X і Y та зобразимо його на координатній площині.

Множина складається з точок, абсциси яких задовольняють нерівності $2 < x < 5$, а ординати – нерівність $y^2- y < 0$ ($x \in R$, $y \in R$). Значення ординат знайдемо з розв'язку нерівності методом інтервалів (рис.10):

$y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y - 1)<0;\ Y = \{y\ |0< y<1, y\in R\}$.

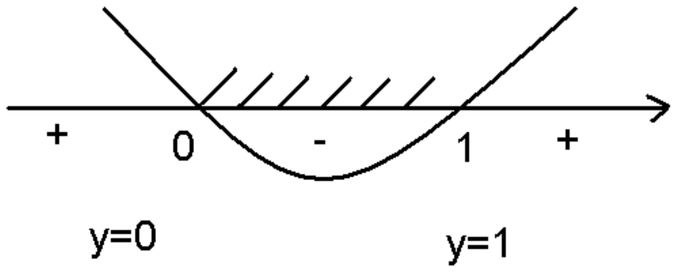


Рис. 10

Отримуємо множину внутрішніх точок прямокутника *KMPQ* (рис.11).

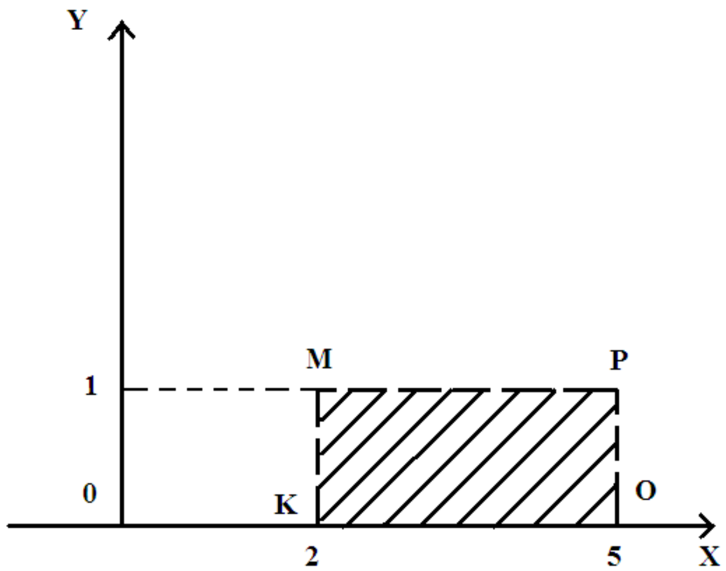


Рис.11

$D = X\times Y = \{(x,y)|x\in X,\ y\in Y\} = \{(x,y)|2<x<5;\ 0<y<1\}$.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* підмножини; власної підмножини; об'єднання, перерізу та різниці множин; декартового добутку двох, трьох множин.
2. Як можна задати множину?
3. Як наочно зображується множина?
4. Які множини вважаються рівними?
5. Як можна зобразити декартовий добуток числових множин?
6. Як можна задати множини N, Z, Q, R?

Завдання для аудиторної роботи

1. Визначити, чи рівні множини A і B, A і D, якщо $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 4\}$, $D = \{x|x \in N, x < 5\}$.

2. Нехай L – множина білявок, T – множина дівчат з блакитними очима. Чи включаються в множину $L \cup T$: а) кароокі білявки; б) кароокі брюнетки; в) брюнетки з блакитними очима?

3. Дано числа: 15; 0; 2; –3; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{3}$. Які з цих чисел належать множині: а) натуральних чисел; б) цілих чисел; в) раціональних чисел; д) дійсних чисел?

4. Зобразити множини на координатній прямій:

а) $A = \{x \mid x \in R, 1 < x < 3\}$;

б) $B = (5; 7)$;

в) $C = [3; 5)$;

г) $D = \{x \mid x \in N,\ x = 2n,\ 4 < x < 12\}$.

5. Виписати всі можливі підмножини множини $A = \{2, 3, 5\}$, вказати які з них власні, які невласні.

6. Серед множин $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{7, 4, 3\}$, $C = \{4, 3, 7\}$, $D = \{7, 3, 4\}$ вказати рівні множини.

7. Які з множин *A, B, C, D, E* рівні між собою:

A – множина квадратів;

B – множина прямокутників;

C – множина ромбів з прямими кутами;

D – множина прямокутників з рівними сторонами;

E – множина паралелограмів з прямими кутами.

8. Визначити, в якому відношенні знаходяться множини *A* і *B*, якщо $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$.

9. Дано множину $A = \{2, 3, 5, 8\}$. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин *A* і *B*, якщо: а) $B = \{3, 5\}$; б) $B = \{1, 3, 8, 9\}$; в) $B = \{1,9\}$. Результати показати на діаграмі Ейлера-Венна.

10. Нехай *A* – множина двоцифрових чисел, *B* – парних натуральних чисел. Знайти переріз та різницю множин *A* і *B*. Зайти доповнення кожної з множин до множини *N*.

11. У множині *N* задано підмножини: *A* – парних чисел, *B* – чисел кратних 3, *C* – чисел кратних 12. Побудувати круги Ейлера для даних множин, штриховкою позначити такі множини: а) $(A \cup B \backslash C)'$; б) $(A \backslash B \cup C)'$.

12. Побудувати круги Ейлера для множин *A, B, C* та вказати характеристичну властивість елементів множини $A \cap B \cap C$, якщо:

а) *A* – множина правильних многокутників, *B* – множина трикутників, *C* – множина чотирикутників;

б) *A* – множина паралелограмів, *B* – множина прямокутників, *C* – множина чотирикутників;

в) *A* – множина прямокутних трикутників, *B* – множина рівнобедрених трикутників, *C* – множина рівносторонніх трикутників;

г) *A* – множина прямокутних трикутників, *B* – множина рівнобедрених трикутників, *C* – множина трикутників.

13. Зобразити множини *A* і *B* на координатній прямій та знайти їх об'єднання, переріз та різницю: а) $A = (3;5)$, $B = [-1; \infty)$; б) $A = (-2; 0]$, $B = [4; 5)$; в) $A = (-12; 3)$, $B = [0; 1]$.

14. Знайти декартовий добуток множин X та Y, результат зобразити на координатній площині: а) $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{7,9\}$; б) $X = R$; $Y = \{3, 4\}$; в) $X = [2; 4)$, $Y = (3, 5)$.

15. Фігури, зображені на рисунку 12, є графічною ілюстрацією декартового добутку множин X та Y. Записати ці множини.

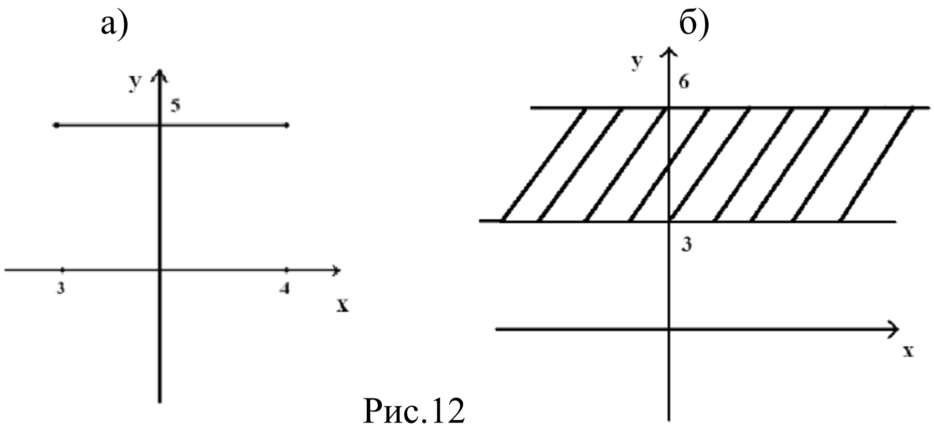


Рис.12

Завдання для самостійної роботи

16. Дано числа: $7; -13; \frac{2}{3}; \sqrt{6}; \frac{3}{9}; 5$. Які з них належать множині: а) натуральних чисел; б) цілих чисел; в) раціональних чисел; д) дійсних чисел?

17. Зобразити множини на координатній прямій: а) $A = [2; 4]$; б) $B = \{x \mid x \in N, 5 < x < 10\}$; $C = \{x \mid x \in R, 3 < x < 7\}$.

18. Множини, задано переліком елементів, записати за допомогою характеристичної властивості: а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; б) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

19. Виписати всі можливі підмножини множини $A = \{2, 5, 8\}$, вказати які з них власні, які невласні?

20. Дано множину $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B, якщо: а) $B = \{3, 5, 7, 8\}$; б) $B = \{1, 3\}$; в) $B = \{-1, 9\}$. Результати подати графічно на діаграмах Ейлера-Венна.

21. C – множина трапецій, D – множина паралелограмів, E – множина чотирикутників з прямим кутом. Побудувати для даних множин круги Ейлера та заштрихувати множини $C \cup D \cap E$ і $C \cap D \cup E$, записати їхні характеристичні властивості.

22. Зобразити множини A і Bна координатній прямій та знайти їх об'єднання, переріз та різницю: а) $A = (4; 8)$, $B = [-2; \infty)$, б) $A = (-1; 0]$, $B=[4;6)$; в) $A=(-11; 3)$, $B=[0; 4]$.

23. Записати декартовий добуток множин X та Y та зобразити множину $X \times Y$ на координатній площині: а) $X= \{5,6\}$,$Y= \{2,3,5\}$; б) $X=R$; $Y=\{y \mid y \in R; y \in [2, 5]\}$; в) $X = [1, 3]$; $Y = [0, 2]$.

24. На рисунку 13 (а, б) зображено декартовий добуток множин X та Y. Записати характеристичні властивості цих множин.

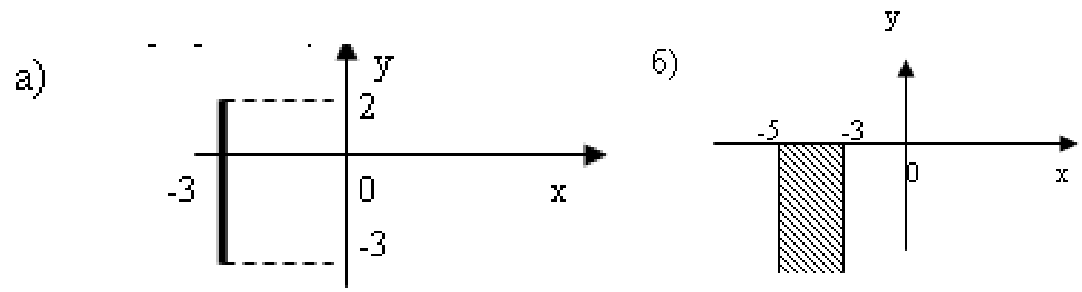


Рис. 13.

Завдання підвищеної складності

25. Нехай A – множина всіх розв’язків рівняння $3x+y=15$; B– множина всіхрозв’язків рівняння $2x + y = 11$. Записати характеристичні властивості множин: $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \cap B$.

26. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо $A=\{x|(x^2-5)^2 + (x^2-4)^2 = 0\}$, $B=\{x|\ (x^2-25)\ (x^2-4)=0\}$.

27. Знайти переріз і різницю множин, заданих аналітично:

а) $y \le 4 - x^2$ і $y \ge x^2$; б) $x + y \le 25$ і $y > 1 - x$.

28. Знайти переріз та об’єднання множин A і B якщо:

а) $A = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$, $B = \{x \mid x = 5k, k \in N\}$;

б) $A = \{x \mid x = 3k + 2, k \in N\}$, $B = \{x \mid x = 4k + 1, k \in N\}$;

в) $A = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 1, k \in N\}$.

Для множин $A \cup B$, $A \cap B$ побудувати діаграми Ейлера-Венна.

29. Обгрунтувати, використовуючи діаграми Ейлера-Венна, що для будь-яких множин A, B і C справедливі рівності:

а) $(A \setminus B)' = A' \cup (A \cap B)$;

б) $A \cap B \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

1.2. ВІДПОВІДНОСТІ. ВІДНОШЕННЯ

1. *Означення.* ***Бінарною відповідністю* α,** визначеною у множинах A і B, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$ ($\alpha \subset A \times B$), де A і B – базові множини відповідності **α**; A – множина відправлення, B – множина прибуття відповідності **α**.

Запис $\boldsymbol{(a, b) \in \alpha}$ або $\boldsymbol{a\ \alpha\ b}$, або $\boldsymbol{\alpha(a) = b}$ читається: „між елементами a, b пари (a, b) існує відповідність α”.

З означення випливає, що будь-яка підмножина декартового добутку $A \times B$ є бінарною відповідністю між елементами множин A і B.

Приклад

Базовими множинами бінарної відповідності **α** є множини $A=\{2,3,4\}$ і $B = \{4, 9, 16, 25\}$. Записати відповідність **α**: „b квадрат a”, де $b \in B$, $a \in A$.

Розв’язання

Запишемо упорядковані пари (a, b), які задовольняють умову „b квадрат a": (2;4); (3;9); (4; 16). Множина цих пар $\boldsymbol{\alpha}$={(2; 4); (3; 9); (4; 16)} і є шуканою відповідністю.

2. ***Граф бінарної відповідності*** – це система точок (*вершин*) та дуг (*орієнтованих ребер*), які з'єднують ці точки. ***Повним*** називають граф, в якому кожна пара вершин з'єднана ребром.

Приклад

Побудувати граф відповідності $\boldsymbol{\alpha} \subset A \times B$ = {(2; 4); (3; 9); (4; 16)}.

Розв'язання

Запишемо множину A переліком елементів, а під нею множину B. З'єднуємо елементи, що перебувають у відповідності α, стрілками. Наприклад, парі (2, 4) відповідатиме стрілка від 2 до 4; парі (3; 9) – від 3 до 9; парі (4; 16) – від 4 до 16. Граф відповідності зображено на рисунку 14.

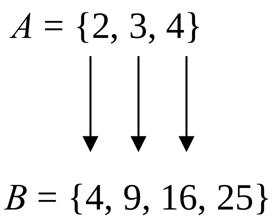


Рис.14

3. ***Типи відповідностей:*** *повна, порожня, всюди визначена у множині відправлення, сюр'єктивна, ін'єктивна, функціональна, відображення, бієктивна.* Розглянемо *функціональну, відображення* та *бієктивну* відповідності.

а) ***Функціональна відповідність або функція*** – це відповідність, при якій кожному елементу з множини A відповідає не більше одного елемента з множини B (один або жодного). На графі такої відповідності від елементів множини A відходить не більше однієї стрілочки (одна або жодної) (рис.15).

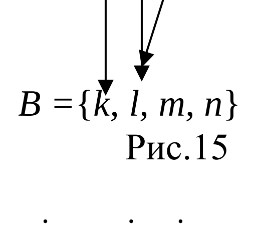


Рис.15

б) ***Відображення*** – це відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає один і тільки один елемент множини B. На графі такої відповідності від кожного елемента множини A відходить одна і тільки одна стрілочка (рис.16).

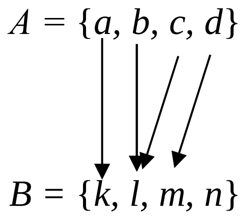


Рис. 16

в) ***Бієктивна*** **(*взаємно однозначна відповідність*)** – це така відповідність, при якій кожному елементу множини *A* відповідає один і тільки один елемент множини *B,* і кожний елемент множини *B* є відповідним єдиному елементу множини *A* (рис. 17).

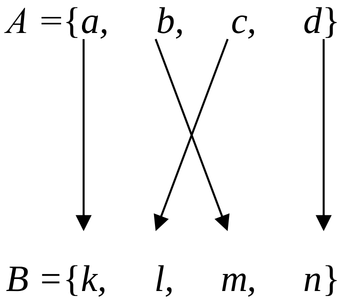


Рис.17

4. *Означення.* Множини *A* і *B* називаються ***рівнопотужними*** (еквівалентними), якщо між елементами цих множин можна встановити хоча б одну взаємно однозначну (бієктивну) відповідність (рис.18). Рівнопотужні множини позначаються так: $A \sim B$ –„множина *A* рівнопотужна множині *B*".

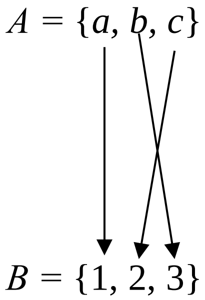


Рис.18

Властивості відношення рівнопотужності множин:

1) рефлексивність: $A \sim A$;

2) симетричність: якщо $A \sim B$, *то* $B \sim A$;

3) транзитивність: якщо $A \sim B$ *і* $B \sim C$, то $A \sim C$.

5. Користуючись поняттям рівнопотужності множин, можна уточнити поняття ***скінченної*** й ***нескінченної*** множини.

Означення. Множина *A* називається ***скінченною***, якщо не існує жодної власної підмножини (правильної частини) множини *A,* рівнопотужної усій множині A. Іншими словами, якщо не існує взаємно однозначної відповідності між цією множиною та деякою її підмножиною A_1 ($A_1 \neq A$).

Означення. Якщо у множині A можна виділити рівнопотужну їй власну підмножину B, то тоді A називається ***нескінченною*** множиною, тобто якщо $B \sim A$, де $B \subset A$ і $B \neq A$.

Приклад

A – множина додатних парних чисел, B – множина чисел кратних 4, $B \subset A$ і $B \neq A$, проте між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність ($2 \to 4$, $4 \to 8$, $6 \to 12$, $8 \to 16$...), отже, *A – нескінченна множина*.

6. *Означення.* Множина називається ***зчисленною***, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел.

Приклади

1. Множина усіх натуральних чисел, кратних 6, – зчислена, оскільки існує взаємно однозначна відповідність між цією множиною і множиною натуральних чисел (рис.19).

$$\begin{array}{lccccc} A=\{ & 6, & 12, & 18, & \ldots 6n, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ N=\{ & 1, & 2, & 3, & \ldots, n, & \ldots\} \end{array}$$

Рис. 19

3. Множина цілих чисел – зчисленна; множина раціональних чисел – зчисленна.

4. Множина дійсних чисел незчисленна. Можна показати, що множина дійсних чисел проміжка (0, 1) рівнопотужна множині дійсних чисел R. Г. Кантор довів, що множина всіх дійсних чисел проміжка [0;1) не рівнопотужна множині натуральних чисел N і має потужність більшу, ніж потужність N. Отже, множини R і N не є рівнопотужними, а тому R – множина незчисленна.

7. *Означення.* ***Бінарним відношенням***, визначеним у множині M, називають кожну підмножину декартового добутку $M \times M$ (декартового квадрата M^2), $(\alpha \subset M)^2$.

Приклади

1. На множині прямих площини можна задати такі відношення: «a паралельна b», «a перпендикулярна b»; на множині натуральних чисел N відношення: «a ділитьсяна b», «a взаємнопросте з b» тощо.

2. Кожне рівняння (нерівність) з двома змінними, а також їхні системиу фіксованій числовій множині M є прикладами відношень у множині M.

8. ***Способи задання відношень*:**

1) Для скінченних множин: *переліком пар, графом, таблицею.*

2) Для нескінчених множин: *описом характеристичної властивості* („$x<y$”), у випадку числових множин – *графіком на координатній площині*.

Приклади

1. Нехай множина M є множиною юнаків та дівчат {Вова, Петрик, Марійка, Олена}, причому відомі такі факти:

1) Вова любить Вову (егоїст);
2) Петрик любить Марійку (взаємно);
3) Марійка любить Петрика (взаємно);
4) Марійка любить Марійку (себе не забуває);
5) Олена любить Петрика (нещаслива любов).

Інформацію про взаємостосунки даних молодих людей можна описати бінарним відношенням “любити”, заданому на множині M. Це відношення можна описати декількома способами.

Спосіб 1. Перелік фактів у вигляді довільного тексту (як це зроблено вище).

Спосіб 2. У вигляді графа взаємостосунків (рис.20):

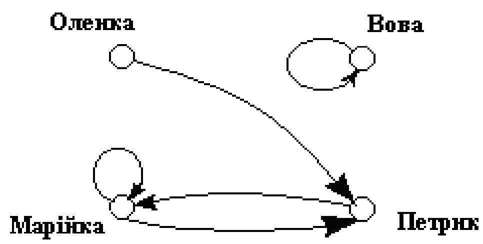


Рис.20

Відмінною рисою графів відношень є петлі (наприклад, для відношення рівності, подібності на множині фігур стрілки від a до a), випадок, коли елемент множини перебуває у відношенні сам до себе і подвійні стрілки (наприклад, для відношення паралельності, разом зі стрілкою від a до bіснуєтакож стрілка від bдо a).

2. Відношення “менше” на множині дійсних чисел можна зобразити графічно на координатній площині (рис.21).

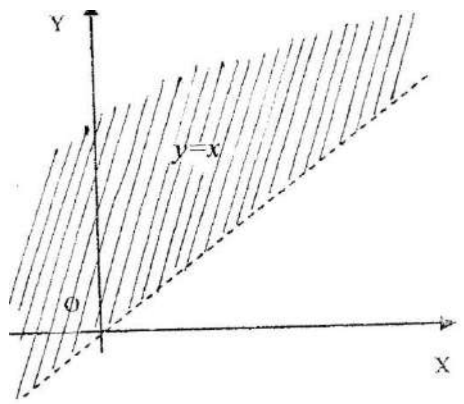


Рис.21

9. *Властивості відношень*

Рефлексивність – ($(x;\ x) \in \alpha$)(кожний елемент множини M перебуває у відношенні α сам до себе).

На графі рефлексивного відношення кожна вершина має петлю (рис. 22).

Рис.22

Приклади

1. Відношення α: «x ділиться на y» *рефлексивне* на множині натуральних чисел, тому що кожне число поділяється само на себе.

2. Відношення α: «x подібна y» *рефлексивне* на множині фігур площини, тому, що будь-яка фігура подібна сама собі.

Симетричність – ($(x;\ y) \in \alpha \Rightarrow (y;\ x) \in \alpha$) (для будь-яких елементів множини M, якщо x перебуває у відношенні α до y, то й y перебуває у відношенні α до x).

На графі будь-які дві вершини або не сполучені стрілками, або сполучені двосторонньою стрілкою (рис.23).

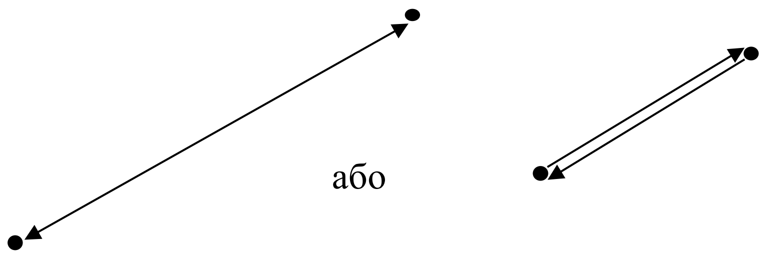


Рис. 23

Приклади

1. Відношення α: «пряма x паралельна прямій y» *симетричне*, оскільки якщо пряма x паралельна y, то й пряма y також паралельна x.

2. Відношення α: «пряма x перпендикулярна до прямої y» – *симетричне*.

Транзитивність – ($(x;y) \in \alpha$ і $(y;\ z) \in \alpha \Rightarrow (x\ ;z) \in \alpha$) (для будь-яких елементів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ множини M виконується умова: якщо $\boldsymbol{x}$ перебуває у відношенні $\boldsymbol{\alpha}$ до $\boldsymbol{y}$, а $\boldsymbol{y}$ у відношенні $\boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{z}$, то $\boldsymbol{x}$ перебуває у відношенні $\boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{z}$).

Приклади

1. Відношення α: «x менше y» *транзитивне* на множині дійсних чисел, оскільки для будь-яких трьох чисел, якщо число x менше y, а y менше z, то x менше z.

2. Відношення α: «x ділиться на y» *транзитивне*.

3. Відношення α:«бути другом» *транзитивне*, оскільки «друг мого друга мій друг».

10. ***Типи відношень***

Серед відношень виділяють відношення *еквівалентності*, відношення *порядку* (*строгого*, *нестрогого*).

Означення. Відношення α на множині $\boldsymbol{M}$ називається ***відношенням еквівалентності***, якщо воно має такі властивості: *рефлексивність, симетричність, транзитивність*.

Приклади відношень еквівалентності

1. Відношення рівності чисел на множині дійсних чисел R: «$x = y$».
2. Відношення подібності на множині A усіх трикутників на площині.
3. Відношення «мати однакове прізвище» на певній множині A людей.

Означення. Відношення α, визначене на множині M, називають ***відношенням порядку,*** якщо воно транзитивне і не симетричне. Якщо умова симетричності виконується лише для елементів $a = b$, то відношення називається відношенням ***нестрогого порядку;*** якщо умова симетричності не виконується для жодної пари елементів, то маємо відношення ***строгого порядку.***

Приклади

1. Найпоширенішими відношеннями строгого порядку в математиці є: «більше», «менше» (для чисел), «довший», «коротший» (для відрізків). Відношення «швидший», «важчий», «темніший», «густіший», «старший», «молодший» також є відношеннями строгого порядку.

2. Відношеннями нестрогого порядку у множині чисел є «більше або дорівнює», «менше або дорівнює». Відношення подільності («$a \vdots b$») у множині N натуральних чисел є також відношенням нестрогого порядку.

Множина X з визначеним на ньому відношенням порядку називається ***впорядкованою множиною.***

Наприклад, впорядкованими множинами є: 1) множина натуральних чисел з визначеним на ній відношенням «менше» (N, <); 2) множина натуральних чисел з визначеним на ній відношенням «подільності» (N, $\vdots$); 3) множина раціональних чисел з визначеним на ній відношенням «менше або рівне» (Q, $\leq$); 4) множина дійсних чисел з визначеним на ній відношенням «більше або рівне» (R, $\geq$).

11. ***Розбиття множини на класи еквівалентності***

Якщо на множині A задано відношення еквівалентності, то множина A розбивається на підмножини, що взаємно не перетинаються (***класи еквівалентності***).

Приклади

1. Якщо α – відношення подібності на множині геометричних фігур площини, то множина фігур розбивається на класи еквівалентності. У кожний клас входять подібні між собою фігури.

2. Нехай A – множина учнів школи, α – відношення «бути в одному класі», тоді класи еквівалентності – це класи цієї школи.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* декартового добутку; бінарної відповідності; функціональної відповідності; відображення; бієктивної відповідності; рівнопотужних множин; скінченної множини; нескінченної множини; зчисленної множини; бінарного відношення; відношення еквівалентності, відношення порядку.

2. Яка відповідність є функціональною?
3. Яка особливість графа функціональної відповідності?
4. Яка відповідність є функціональною (рис. 24)?

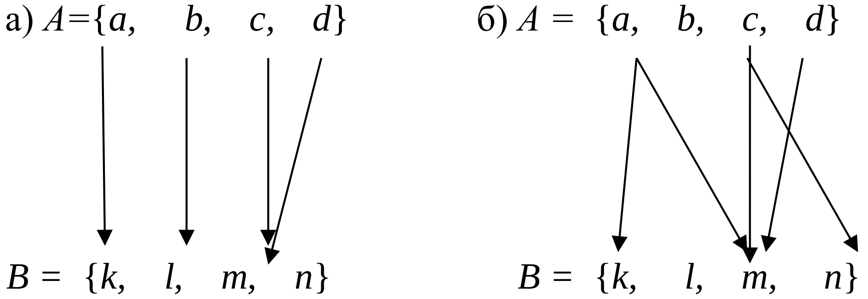


Рис.24

5. Чи бієктивні відповідності зображені на рисунку 25?

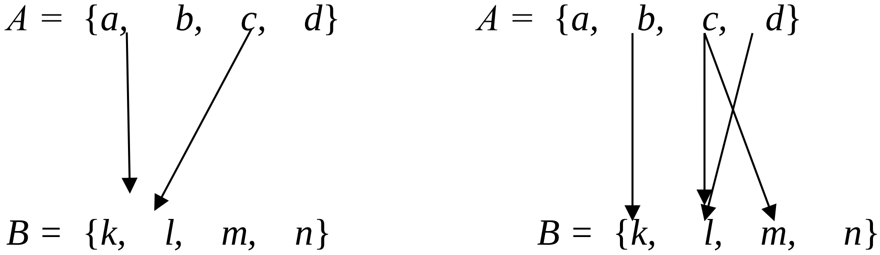


Рис.25

6. Навести власний приклад функціональної відповідності.
7. Довести, що множина N нескінченна.
8. Довести, що множина Z зчисленна.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти декартовий добуток множин A і B, результати ілюструвати графічно: а) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 4\}$, б) $A=\{-1, 1\}$, $B=\{-2, -3, -4\}$.

2. Множина $X = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ є множиною відправлення, а множина $Y = \{3,5\}$ – множиною прибуття відповідності: «число x менше числа y», $x \in X$, $y \in Y$. Записати відповідність між елементами та побудувати граф відповідності.

3. Відповідність $\boldsymbol{\alpha}$: «число $\boldsymbol{a}$ більше $\boldsymbol{b}$ на 3» задано між множинами $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ($\boldsymbol{a} \in A$, $\boldsymbol{b} \in B$). Побудувати граф цієї відповідності. Визначити її тип.

4. Дано дві множини: $M = \{-2, 2, 3, -3, 4, -4, -9\}$ і N – множина всіх натуральних чисел. Кожному елементу множини M поставлено у відповідність

його квадрат із множини N. Записати відповідність, побудувати граф, визначити її тип.

5. Довести, що множина непарних натуральних чисел зчисленна.

6. Довести, що множина $A = \{x \mid x=7n, n \in N\}$ є нескінченною.

7. Дано множину $M = \{-1, 0, 2, 6\}$. Побудувати на множині M графи відношень: а) «бути більше», б) «бути менше або дорівнювати». Визначити їх властивості.

8. Побудувати граф відношення: «x ділиться на y», де x, y – елементи множини $X = \{-6, -4, -2, 0, 4\}$. Визначити його властивості.

9. Чи є наведені нижче відношення рефлексивними? симетричними? транзитивними?

а) «пряма a перетинає пряму b» на множині прямих площини;

б) «A і B проживають в одному будинку» на множині людей.

10. Чи є віношення $\{(1,1), (1,4), (4,5), (4,4), (5,5), (5,7), (7,5), (7,7)\}$ у множині $\{1, 4, 5, 7\}$ відношенням еквівалентності?

11. Довести, що «рівнопотужність» у будь-якій системі множин є відношенням еквівалентності.

12. У початковому курсі математики на множині N розглядаються такі відношення: а) слідує за; б) число x ділиться на число y без остачі; в) менше на. Вказати серед цих відношень відношення порядку.

13. Спостерігаємо за вертольотом, орлом, дирижаблем і літаком. Орел знаходиться вище вертольота, вертоліт – нижче літака, але вище дирижабля, а орел – нижче літака. Побудувати граф відношення «вище». У якому порядку розташовані по висоті гвинтокрил, орел, дирижабль і літак?

Завдання для самостійної роботи

14. Знайти декартовий добуток множин $A = \{-1, 2, 3\}$ і $B = \{2, -1, 4\}$ та зобразитийого на координатній площині.

15. Між множинами $A = \{3, 4, 5\}$ і $B = \{7, 8\}$ задано відповідність: «$(b - a)$ ділиться на 2», де $a \in A$, $b \in B$. Записати відповідність, побудувати граф, визначити її тип.

16. Дано множини $A = \{2, 3\}$, $B = \{3, 4, 6\}$. Записати відповідність «b ділиться на a», де $a \in A$, $b \in B$. Побудувати граф, визначити тип відповідності.Довести нескінченність та зчисленність: а) множини кубів натуральних чисел; б) $C = \{x \mid x = 5^n, n \in N\}$.

17. У множині $A = \{-3, -1, 2\}$ задано відношення: 1) «≥», 2)«<». Побудувати графи відношень, визначити їх властивості. З'ясувати, яке з цих відношень є відношенням строгого порядку, нестрогого порядку?

18. Навести приклади відношень між предметами: а) за розміром; б) за довжиною; в) за висотою.

19. Довести, що рівність трикутників є відношенням еквівалентності на множині всіх трикутників. Що є класами еквівалентності?

20. На множині N розглядаються відношення: а) більше; б) більше на; в) більше в; г) дорівнює; д) безпосередньо слідує за. Вказати серед цих відношень відношення порядку.

21. Клас висунув на змагання з плавання команду хлопчиків. До її складу входили: Семен, Микола, Андрій, Сашко. Микола проплив дистанцію швидше за Андрія, але повільніше від Сашка, Андрій витратив на ту ж дистанцію часу більше, ніж Семен, який проплив її повільніше від Миколи. Як розподілилися між ними місця на змаганні?

Завдання підвищеної складності

22. Знайти декартові добутки множин і зобразити їх елементи на координатній площині:

а) $A = \{x \mid x \in R, x > 0\}$, $B = \{y \mid y \in \mathrm{R}, y < 0\}$;

б) $A = \{x \mid x \in R, x \geq 5\}$, $B = \{y \mid y \in R, -3 \leq y \leq 7\}$;

в) $A = N$, $B = \{y \mid y = 2k\}$.

23. Дано множину $\{1, 2, 3, 4\}$. Утворити усі трицифрові числа, у записі яких цифри не повторюються, і розташувати їх у порядку зростання.

24. Довести зчисленність множини раціональних чисел.

25. Побудувати множину всіх підмножин множини $\{1, 2, 3, 4\}$ і розбити її на класи рівнопотужних множин.

26. Чи є рівнопотужними множини:

а) $A = \{x \mid x \in Z, -2 \leq x \leq 15\}$, $B = \{x \mid x \in N, x < 18\}$;

б) $A = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in N\}$, $B = N$?

1.3. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика вивчає скінченні множини, їх підмножини, кортежі; розглядає задачі на визначення числа способів упорядкування елементів скінченних множин та кількості підмножин. Термін «комбінаторика» був введений у математику німецьким вченим Лейбніцем (1646 – 1716).

Комбінаторика – теорія сполук (від латинського: з'єднувати, поєднувати).

Розв'язування багатьох задач ґрунтується на ***правилах суми та добутку.***

1. Правила суми. Нехай X, Y – множини, $n(X)$, $n(Y)$ – кількість елементів множин X, Y.

Правило 1. Якщо множини X, Y не мають спільних елементів, об'єкт $x \in X$ можна вибрати n способами, а об'єкт $y \in Y$ – m способами, причому способи вибору незалежні, то вибір «x або у» можна здійснити $n + m$ способами.

Правило можна записати у вигляді:

Якщо $X \cap Y = \varnothing$, ***то*** $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$.

Правило узагальнюється на n множин.

Задача

Є 6 яблук та 5 груш. Скількома способами можна вибрати яблуко або грушу?

Розв'язання

Нехай X – множина яблук, Y – множина груш; $n(X) = 6$, $n(Y) = 5$.

$n(X \cup Y)$ – кількість способів вибору яблука або груші. За правилом 1 маємо:

$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) = 6 + 5 = 11$ (способів).

Правило 2. Якщо $X \cap Y \neq \varnothing$, то $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$.

Задача

У класі 22 учня вивчають англійську мову, 16 – французьку, 5 – дві ці мови. Скільки учнів вивчають хоча б одну мову?

Розв'язання

X – множина учнів, що вивчають англійську мову, Y – французьку. Тоді $n(X) = 22$, $n(Y) = 16$, $n(X \cap Y) = 5$, $n(X \cup Y)$–множина учнів, що вивчають хоч би одну мову. За правилом 2 маємо: $n(X \cup Y) = 22 + 16 - 5 = 33$ (учня).

Правило 3. Якщо $X \cap Y \cap Z \neq \varnothing$, то $n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + +n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$.

Задача

50 студентів грають у волейбол. 48 – у баскетбол. 36 – у теніс, 21 – у волейбол і баскетбол, 15 – у волейбол і теніс, 18 – у баскетбол і теніс, 5 – у волейбол, баскетбол та теніс. Скільки студентів грають хоч би в одну з цих ігор?

Розв'язання

Позначимо: X – множина студентів, що грають у волейбол, Y – у баскетбол, Z – у теніс, $n(X) = 50$, $n(Y) = 48$, $n(Z) = 36$, $n(X \cap Y) = 21$, $n(X \cap Z) = 15$, $n(Y \cap Z) = 18$, $n(X \cap Y \cap Z) = 5$. За правилом 3 знайдемо множину студентів, що грають хоча б в одну з цих ігор:

$n(X \cup Y \cup Z) = 50 + 48 + 36 - 21 - 15 - 18 + 5 = 85$ (студентів).

2. Правило добутку

Якщо елемент a_1 з множини A_1 можна вибрати $n(A_1)$ способами, елемент a_2 з множини A_2 – $n(A_2)$ способами і т. д., елемент a_n з множини A_n – $n(A_n)$ способами, то кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можна вибрати $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_n)$ способами.

Правило має вигляд: $\boldsymbol{n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_n)}$.

Задача

Скільки всього 4 – значних чисел у десятковій системі числення?

Розв'язання

Будь-яке чотиризначне число – це кортеж довжини чотири (a_1, a_2, a_3, a_4), де $a_1 \in A_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $a_3 \in A_2, a_4 \in A_2$. Кількість чисел – це кількість таких кортежів. За правилом добутку: $n(A_1 \times A_2 \times A_2 \times A_2) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (чисел).

У початковій школі цю задачу можна розв'язати безпосереднім підрахунком: 9999 – 999 = 9000.

3. Розміщення з повтореннями та без повторень

Означення. Упорядкована множина k елементів, які можуть повторюватися, взятих з множини n елементів, називається ***розміщеннями з повтореннями.***

Позначення. $\overline{A_n^k}$ (Читаємо: A з n по k з повтореннями)

Формула для обчислення числа розміщень з повтореннями:

$$\overline{A_n^k} = \underbrace{n \cdot n \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

Задача

Скількома способами 5 пасажирів можуть розташуватися у 3 вагони, якщо для кожного пасажира істотним є тільки номер вагона, а не місце у вагоні?

Розв'язання

Існує множина 3 вагонів (№1, №2, №3), потрібно з цієї множини вибрати вагони для 5 пасажирів. Для відповіді на запитання задачі потрібно утворити упорядковану множину (вагонів), елементи в якій будуть повторюватися. Це означає, що потрібно побудувати розміщення з повтореннями з 3 елементів по 5. Прикладом такого розміщення буде упорядкована множина номерів вагона (№2, №2, №1, №3, №3), тобто перші два пасажири сядуть в другий вагон, третій в перший, а інші два – в третій. Число всіх можливих розташувань обчислюється за формулою числа розміщень з повтореннями:

$$\overline{A_n^k} = \overline{A_3^5} = 3^5 = 243$$

Приклади задач, що приводять до необхідності підрахунку числа розміщень з повтореннями:

1) Скільки тризначних чисел можна утворити з множини цифр {1, 2, 3, 4}?

2) Скільки чотиризначних чисел можна утворити із цифр {0,1}?

Означення. Упорядкована множина k елементів без повторень, взятих з множини n елементів, називається ***розміщенням без повторень*** $(k \le n)$.

Позначення A_n^k (Читаємо: «A з n по k без повторень»)

Формула для обчислення числа розміщень без повторень:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

Задача

Скільки існує різних варіантів вибору чотирьох кандидатур із дев'яти спеціалістів для поїздки в 4 різні країни?

Розв'язання

Існує множина 9 елементів (спеціалістів), потрібно з елементів цієї множини утворити підмножину 4 елементів (кандидатів на поїздку). Ця множина упорядкована (має значення куди поїде кожний з кандидатів), елементи повторюватися не можуть (один спеціаліст не може одночасно поїхати в дві країни), тому маємо задачу на розміщення без повторень. Їх число обчислюємо за формулою $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$, маємо

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

Приклади задач, що приводять до необхідності підрахунку числа розміщень без повторень

1) Скількома способами можна вибрати з 15 чоловік 5 кандидатів і призначити їх на 5 різних посад?

2) Скількома способами можна із 20 книг відібрати 12 і розставити їх у ряд?

4. *Перестановки без повторень та з повтореннями*

Означення. ***Перестановкою без повторень*** з n елементів називається упорядкована множина n елементів. *Позначення*: P_n – число перестановок (Читаємо «P із n»).

Формула для обчислення числа перестановок: $P_n = n!$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, тобто число, що дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n, і називається «n – факторіалом». Вважається, що $1! = 1$, $0! = 1$.

Приклади перестановок:

1) Розташування n різних посад серед n людей;

2) Розташування n різних предметів в одному ряду.

Задача. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, якщо цифри числа не повторюються?

Розв'язання. Цифри чотиризначного числа утворюють упорядковану множину з 4 елементів {1, 2, 3, 4}. Кількість чотиризначних чисел – це кількість перестановок з 4-х елементів.

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (числа).

Означення. ***Перестановкою з повторенням*** називається будь-який кортеж над множиною $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в якому елемент a_1 повторюється m_1 раз, a_2 – m_2 раза, … , a_n – m_n разів.

Число перестановок з повторенням обчислюється за формулою:

$$P_{m_1,m_2m_3...m_n} = \frac{(m_1+m_2+m_3+...+m_n)!}{m_1!m_2!m_3!...m_n!}$$

Приклади перестановок з повтореннями:

1) Утворення нових слів із слова, в якому букви повторюються;

2) Утворення нових чисел із числа, в якому цифри повторюються.

Задача

Скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова «колобок»?

Розв'язання

У слові «колобок» буква «к» повторюється 2 рази, «о» – 3 рази, «л» – 1 раз, «б» – 1 раз. Кількість нових слів – це кількість перестановок з повтореннями:

$$P_{2,3,1,1} = \frac{(2+3+1+1)!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2} = 420 \text{ (слів).}$$

Відповідь: 420 слів.

5. *Комбінації*

Означенння. ***Комбінаціями*** з n елементів по k називаються підмножини з k елементів множини, що містять n елементів .

Комбінації позначаються C_n^k (читається "C із n по k")і відрізняються тільки складом елементів.

Формула для обчислення числа комбінацій: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Властивості числа комбінацій: $C_n^0 = 1; C_n^1 = n; C_n^n = 1; C_n^k = C_n^{n-k}$

Задача. Скількома способами можна вибрати 12 книг із 20?

Розв'язання. Маємо множину книг $n = 20$ елементів, потрібно вибрати 12 книг ($k = 12$). Послідовність вибору книг не суттєва, тому утворюємо неупорядковану підмножину 12 елементів з множини 20 елементів, тобто утворюємо комбінації з 20 по 12. Число комбінацій обчислюємо за формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-(k-1))}{k!}$$

Використаємо властивість комбінацій: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$$C_{20}^{12} = C_{20}^{20-12} = C_{20}^{8} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 125970 \text{ (способів).}$$

Приклади задач, що приводять до необхідності підрахунку числа комбінацій

1) Скільки існує варіантів вибору 6 осіб із 15 кандидатів на роботу на однакові посади?(5005 способів).

2) Для участі у лотереї потрібно закреслити 5 чисел з 36. Скількома способами це можна зробити? (376992 варіантів).

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* розміщень з повтореннями та без повторень; перестановок з повтореннями та без повторень; комбінацій.

2. За якими формулами обчислюється число розміщень без повторень, з повтореннями?

3. За якою формулою обчислюється число перестановок з повтореннями (без повторень)?

4. За якою формулою обчислюється число комбінацій?

5. Обчислити: $\overline{A}_5^2$, A_{10}^3, P_6, C_5^2.

6. Обчислити: A_{10}^1, A_{10}^{10}, C_5^5. C_5^1.

7. Записати значення таких виразів: A_n^1, A_n^n, C_n^n. C_n^1.

8. $A_n^k = 25{\cdot}24{\cdot}23{\cdot}22{\cdot}21$. Визначити n і k.

Завдання для аудиторної роботи

1. Із 40 учнів класу 32 працюють у математичному гуртку, 21 – у драматичному, а 15 – в обох гуртках. Скільки учнів не працюють у цих гуртках?

2. У класі 30 осіб, які відвідують факультативні заняття з фізики та математики. Поглиблено вивчають два предмета 10 осіб, математику – 25. Скільки учнів відвідують факультатив лише з фізики?

3. Із 100 студентів англійську мову вивчають 28, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5. Усі три мови вивчають 3 студента. Скільки студентів вивчають лише одну мову? Скільки студентів не вивчають цих мов?

4. У бібліотеці є 11 різних книг Пушкіна, 7 різних книг Гоголя, 6 різних книг Лермонтова. Скількома способами можна вибрати три книжки різних авторів?

5. У другому класі вивчається 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому усі різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

6. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 3, 5, 7, 9, якщо: а) цифри можуть повторюватися; б) не повторюються?

7. Скількома способами із 25 студентів групи можна вибрати актив у складі: староста, профорг, культорг?

8. Два листоноші повинні рознести 10 листів за 10 адресами. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

9. Скількома способами можуть бути розподілені місця між 6 учасниками турніру?

10. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо: а) цифри не повторюються; б) цифри можуть повторюватися?

11.Скількома способами із 7 осіб можна вибрати комісію у складі 3 осіб?

12. У взводі 5 сержантів і 50 солдатів. Скількома способами можна скласти наряд із одного сержанта і трьох солдатів?

13. Збори із 100 осіб вибирають голову, секретаря та трьох членів лічильної комісії. Скількома способами це можна зробити?

14. Скільки чисел можна утворити, переставляючи цифри чисел: 88655544, 2337877?

15. Скільки всього трицифрових чисел у десятковій системі числення? Як цю задачу розв'язують учні початкової школи?

Завдання для самостійної роботи

16. Із 100 учнів, які вивчають англійську та німецьку мови, 85 вивчають англійську, 45 – німецьку. Скільки учнів вивчають ці дві мови?

17. Скільки чисел у множині, якщо відомо, що серед них 100 чисел діляться на 2, 115 – на 3, 120 – на 5, 45 – на 6, 38 – на 10, 50 – на 15, 20 – на 30?

18. На змагання необхідно вибрати 2 учасника чоловічої та жіночої статі. Є по 7 кандидатур. Скількома способами це можна зробити?

19. Скількома способами можна посадити чотирьох учнів на 25 місць?

20. Скільки двозначних чисел можна утворити з цифр 2, 4, 5, 6, 7, якщо: а) цифри не повторюються; б) можуть повторюватися?

21. Скільки шестицифрових чисел, не кратних 5, можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не повторюються?

22. Множина складається із 7 елементів. Скільки перестановок без повторень можна утворити із цих елементів?

23. Обчислити число комбінацій: із 8 по 3, із 7 по 4, із 6 по 1.

24. Скількома способами можна вибрати 4 книжки із 6?

25. Скільки нових слів можна утворити із букв слів: «молоко», «баобаб»?

26. Скількома способами можна скласти групу із 3 офіцерів і 7 солдатів, якщо всього 10 офіцерів і 30 солдатів?

27. У вокальному гуртку працює 15 осіб, у музичному – 12, у фотогуртку – 20. Скількома способами можна скласти бригаду із 4 вокалістів, 3 музикантів та 1 фотографа?

Завдання підвищеної складності

28. Скільки чотиризначних чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб в кожному числі була 1 і цифри не повторювалися?

29. Скількома різними способами можна розподілити 12 різних предметів між особами *A, B, C* так, щоб кожний одержав по 4 предмета?

30. Потрібно помістити у 8 клітинах, що стоять на одній прямій, 4 голосні букви та 4 приголосні так, щоб поряд не стояли 2 голосні або 2 приголосні. Скількома способами це можна зробити?

31. Визначити, скільки дільників має число $288 = 2^5 \cdot 3^2$, якщо в число дільників входить 1 і саме число.

32. Скільки можна зробити із n елементів перестановок, якщо в них елементи a і b не стоять поряд?

33. Яким числом способів можна розділити колоду із 36 карт навпіл так, щоб укожній пачці було по 2 туза?

34. На площині дано n точок, із яких жодні 3 не лежать на одній прямій. Знайти число прямих, які можна одержати, сполучаючи точки попарно.

РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

2.1. ВИСЛОВЛЕННЯ

Математична логіка – це наука, яка вивчає закони правильних міркувань за допомогою математичного апарату.

Одним із основних понять математичної логіки є висловлення.

1. ***Висловленням*** називають речення, про яке можна сказати або дізнатися, істинне воно чи хибне. Висловлення позначаються великими буквами латинського алфавіту: *A, B, C, ...,* або малими: *a, b, c, …*

Окличні, запитальні речення не є висловленнями: „Котра година?”, „Слава Україні!” – не є висловленнями

Приклади

1. $A \asymp$ ”Архімед – давньогрецький математик”– істинне висловлення.

2. $a \asymp$ „Числа 5 і 7 взаємно прості”– істинне висловлення.

3. $B \asymp$„– 2 >0” – хибне висловлення;

3. $c \asymp$„Сонце обертається навколо Землі” – хибне висловлення;

4. $d \asymp$„Завтра буде субота” – висловлення, про істинність якого можна дізнатися виходячи з того, у який день тижня воно сказане.

Існують ***прості (елементарні)*** висловлення ***і складені*** (містять декілька елементарних). Висловлення ***елементарне***, якщо ніяка частина висловлення не є окремим висловленням.

Над висловленнями можна виконувати логічні операції (із простих висловлень утворювати складені за допомогою слів: „і”, „або”, „не”, „якщо,...то...”, „тоді і тільки тоді”).

Приклади

1. $A \asymp$„$\sqrt{9} = -3$”, $B \asymp$„$\sqrt{9} = 3$”,

A і $B \asymp$„$\sqrt{9} = -3$ і $\sqrt{9} = 3$” – хибне висловлення.

2. $A \asymp$ „$24 \vdots 3$”, $B \asymp$ „$6 > 4$”,

A або B $\asymp$ „$24 \vdots 3$ або $6 > 4$” – істинне висловлення

2. *Означення.* ***Запереченням*** висловлення A називається висловлення $\bar{A}$(*„не A”),* яке істинне тоді і тільки тоді, коли A хибне.

Таблиця істинності заперечення (істинність висловлення позначається одиницею, хибність – нулем).

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Приклади

1. $A \asymp$”У вересні 28 днів”=0, тоді $\bar{A} \asymp$”У вересні не 28 днів”=1.

2. $B \asymp$”5<10”=1, тоді $\overline{B} \asymp$”$5 \geq 10$”=0.

3. *Означення.* ***Кон'юнкцією*** (логічним добутком) висловлень A, B називається складене висловлення $A \wedge B$ („*A і B*"), яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва дані висловлення.

Таблиця істинності кон'юнкції

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Приклади

1. $A \asymp$ „ 10 – парне число" =1.

$B \asymp$ „ 10 – основа системи числення "=1.

Тоді $A \wedge B \asymp$ „ 10 – парне число і 10 – основа системи числення"=1.

2. $A \asymp$„ 2:0 = 2" = 0, B$\asymp$„ 2·0 = 0" = 1.

$C = A \wedge B \asymp$ "2:0=2"$\wedge$ „2·0 = 0" = 0.

4. *Означення.* ***Диз'юнкцією*** (логічною сумою) висловлень A і B називається складене висловлення $A \vee B$(„*A або B*"), яке істинне тоді і лише тоді, коли хоча б одне із висловлень істинне.

Таблиця істинності диз'юнкції

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Приклади

1. $A \asymp$„10$\vdots$2"=1, $B \asymp$„ $\sqrt{9} = -3$" = 0.

$A \vee B \asymp$„10$\vdots$2" або „ $\sqrt{9} = -3$" = 1.

2. $A \asymp$ „Земля має форму кулі" = 1.

$B \asymp$„У січні 31 день" = 1.

$A \vee B \asymp$„Земля має форму кулі або у січні 31 день" = 1.

5. *Означення.* ***Імплікацією*** двох висловлень A і B називається висловлення $A \Rightarrow B$ („*якщоA, то B*", „*A імплікує B*" або „*з A слідує B*"), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A істинне, а B – хибне.

Таблиця істинності імплікації

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Приклади

1. У побуті, якщо будуємо речення „Якщо *A*, то *B*”, то обов’язково вважаємо, що *B* випливає з *A*, є його наслідком. У логіці це не вимагається.

$A \asymp$ „2 · 2 = 5” = 0, $B \asymp$ „Вода у річці солона” =0.

$A \Rightarrow B \asymp$”Якщо 2·2=5, то вода в річці солона”=1.

2.$A \asymp$„Слово „дім” – дієслово” = 0,

$B \asymp$ „Варшава – столиця Польщі” =1.

$A \Rightarrow B \asymp$ „Якщо слово „дім”–дієслово, то Варшава–столиця Польщі”=1.

3. $A \asymp$ „2 · 2 = 4” = 1, $B \asymp$ „Москва – столиця України” =0.

$A \Rightarrow B \asymp$ ”Якщо 2·2=4, то Москва – столиця України”=0.

6. *Означення.* ***Еквіваленцією*** двох висловлень *A, B* називається висловлення $A \Leftrightarrow B$ *(„A еквівалентне B”„A тоді і тільки тоді, коли B”),* яке істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення *A* і *B* мають однакові значення істинності.

Таблиця істинності еквіваленції

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Приклади

1. $A \asymp$”Число 129⋮3” = 1. $B \asymp$”Сума цифр числа 129 ділиться на 3” = 1.

$A \Leftrightarrow B \asymp$ ”Число 129⋮3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа 129 ділиться на 3”=1.

2. $A \asymp$”Число 195⋮3”=1. $B \asymp$”Сума цифр числа 195 ділиться на 4” = 0.

$A \Leftrightarrow B \asymp$ ”Число 195⋮3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа 195 ділиться на 4” = 0.

3. $A \asymp$ ”3 > 11” = 0. $B \asymp$”5 – складене число” = 0.

$A \Leftrightarrow B \asymp$ ”3 > 11 тоді і тільки тоді, коли 5 – складене число” = 1.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. *Дати означення*: висловлення; логічних операцій над висловленнями (кон’юнкції, диз’юнкції, імплікації, еквіваленції).

2. Чи є запитальні речення висловленнями?

3. Чи є окличні речення висловленнями?

4. Побудувати таблиці істинності для: заперечення; кон’юнкції; диз’юнкції; імплікації; еквіваленції.

5. З’ясувати, в яких випадках можна встановити значення істинності висловлення B:

1) $A \wedge B=1$;
2) $A \wedge B=0$;
3) $A \vee B=1$;
4) $A \vee B=0$;
5) $A \Rightarrow B=1$;
6) $A \Rightarrow B=0$;
7) $A \Leftrightarrow B=1$;
8) $A \Leftrightarrow B=0$.

6. Знайти значення істинності висловлень:

1) «15 < 3 і 12 > 3»
2) «$\sqrt{25}=5$ або $\sqrt{25}=-5$»
3) «$5 \geq 3$»
4) «Якщо 17 – непарне число, то $2 \cdot 2 = 5$»
5) «$-2 < 3 < 1$»
6) «13 < 20 тоді і тільки тоді, коли 2 + 3 = 6»

2.2. ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ

1. *Означення.* ***Формулою алгебри висловлень*** називається логічний вираз, який містить висловлення, що позначаються буквами, знаки логічних операцій ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) та дужки.

Приклад

Записати формулу складеного висловлення $F \asymp$ „Якщо трикутник містить прямий кут, то він прямокутний; трикутник не містить прямого кута, отже, трикутник не прямокутний”.

Розв’язання

Нехай $A \asymp$ ”Трикутник містить прямий кут”, $B \asymp$”Трикутник прямокутний”.

Побудуємо заперечення цих висловлень:

$\bar{A} \asymp$”Трикутник не містить прямого кута”,

$\overline{B} \asymp$”Трикутник не прямокутний ”.

Тоді задане складене висловлення можна записати у вигляді формули:

$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{A} \Rightarrow \overline{B}$.

2. ***Послідовність виконання операцій у формулах.*** Спочатку виконуються операції в дужках, роль дужок відіграє знак заперечення (риска), потім – кон’юнкція ($\wedge$), диз’юнкція($\vee$),імплікація ($\Rightarrow$), еквіваленція ($\Leftrightarrow$). Звичайно, якщо відсутня кон’юнкція, то починають з диз’юнкції, якщо вона є.

Наприклад: а) у формулі $\overline{A \vee B} \Rightarrow C \wedge B$ спочатку треба здійснити операції під знаком заперечення,потім – заперечення, кон’юнкцію, імплікацію; б) у формулі $A \vee B \Rightarrow C$ першою виконуєтьсяоперація диз’юнкція($\vee$), а потім імплікація ($\Rightarrow$).

3. ***Таблиці істинності для формул.*** Для формули складають таблиці істинності. Кожна складова формули може набувати значення 1 або 0, а отже, і формула при певних наборах значень істинності компонентів може набувати значення 1 або 0.

Приклад

Побудувати таблицю істиності для формули $F \asymp \overline{A \vee \overline{B}} \vee \bar{A} \wedge C$.

Розв’язання

Маємо три висловлення *A, B, C,* які можуть набувати значення 1, 0. Тому набори значень істинності утворюють розміщення з повтореннями із двох елементів по 3. $\bar{A}_2^3=2^3=8$, отже, в таблиці розглянемо 8 наборів значень істинності висловлень *A, B, C.*

Елементарні висловлення			Проміжні логічні формули					Шукана формула
A	B	C	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$\overline{A \vee \bar{B}}$	$\bar{A}$	$\bar{A} \wedge C$	$\overline{A \vee \bar{B}} \vee \bar{A} \wedge C$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Із таблиці можна дізнатися, на яких наборах значень істинності формула є істинною, на яких – хибною.

4. *Означення*. Дві формули F і H називаються ***рівносильними***, якщо вони на однакових наборах значень компонентів набувають однакових значень істинності ($F = H$).

Приклад

Довести, що формули $F=A \Rightarrow B$ та $H=\bar{A} \vee B$ рівносильні.

Розв’язання

Побудуємо таблицю істинності для формули Fта H.

A	B	$F=A\Rightarrow B$	$\bar{A}$	$H=\bar{A}\vee B$.
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Із таблиці видно, що дві формули на одних і тих же наборах значень істинності компонентів мають однакові значення істинності.

Отже, $F=H$ або $A\Rightarrow B=\bar{A}\vee B$.

5. *Властивості логічних операцій (основні рівносильності):*

1. $\bar{\bar{A}}=A$ – закон подвійного заперечення.

Приклад

$A\asymp$"Сьогодні ясно".

$\bar{\bar{A}}\asymp$"Неправильно, що сьогодні не ясно".

$$\left.\right\} \bar{\bar{A}}=A$$

2. $A\vee B=B\vee A$, $A\wedge B=B\wedge A$ $\Big\}$ – переставна (комутативна) властивість

3. $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$, $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$. $\Big\}$ – сполучна (асоціативна)властивість

4. $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$– перша розподільна властивість
5. $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$– друга розподільна властивість.

Приклад

$A\asymp$"$2\cdot 2=5$", $B\asymp$"$25\,\vdots\,5$", $C\asymp$"7 – просте число".
$A\vee(B\wedge C)=$"$2\cdot2=5$" або "$25\,\vdots\,5$ і 7 – просте число" = 1.
$(A\vee B)\wedge(A\vee C)=$"($2\cdot2=5$ або $25\,\vdots\,5$) і ($2\cdot2=5$ або 7 – просте число)"=1.

6. $\overline{A\vee B}=\bar{A}\wedge\bar{B}$, $\overline{A\wedge B}=\bar{A}\vee\bar{B}$ $\Big\}$ – закони де Моргана.

Приклад

$\overline{A\wedge B}\asymp$ „Неправильно, що $24\,\vdots\,5$ і $24\,\vdots\,7$"=1.

$\bar{A}\vee\bar{B}\asymp$"$\overline{24\,\vdots\,5}$ або $\overline{24\,\vdots\,7}$"=1.

7. $A\vee\bar{A}=1$ – закон виключення третього.

Приклад

$A\vee\bar{A}\asymp$"Мені 30 років або не 30 років"=1.

8. $A\vee 0=A$.

Значення істинності формули залежить від значення істинності A.

9. $A\wedge 0=0$.

10. $A \vee A = A$ $\Big\}$ – закони ідемпотентності
11. $A \wedge A = A$

12. $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$

13. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Сукупність усіх висловлень разом із визначеними на ній логічними операціями і основними властивостями цих операцій утворюють ***алгебру висловлень.***

Користуючись основними властивостями, можна доводити інші рівносильності.

Приклад

Довести закон контрапозицій: $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Доведення

Розглянемо імплікацію $A \Rightarrow B$, застосуємо властивості *12, 1, 2, 12*, отримаємо: $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B = \bar{A} \vee \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}} \vee \bar{A} = \overline{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Приклад розв'язування задачі. З трьох учнів *A, B* і *C* треба виділити одного або двох для чергування. Відомо, що:

1) *A* може чергувати з *B*, або *C* без *A*.
2) *B* чергуватиме без *A*, або не будуть чергувати ні *B*, ні *C*.

Хто чергуватиме?

Розв'язання.

Позначимо $A \asymp$"Чергуватиме учень *A*",

$B \asymp$"Чергуватиме учень *B*",

$C \asymp$"Чергуватиме учень *C*".

Виходячи з умови (1), маємо $A \wedge B \vee C \wedge \bar{A} = 1$.

Умова (2) дає $B \wedge \bar{A} \vee \overline{B} \wedge \overline{C} = 1$. Оскільки кожне складене висловлення є істинним, то і їх кон'юнкція теж істинна:

$(A \wedge B \vee C \wedge \bar{A}) \wedge (B \wedge \bar{A} \vee \overline{B} \wedge \overline{C}) = 1$.

Використаємо розподільний закон. Одержимо:

$A \wedge B \wedge B \wedge \bar{A} \vee C \wedge \bar{A} \wedge B \wedge \bar{A} \vee A \wedge B \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee C \wedge \bar{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} = 1$.

Застосувавши переставний закон для кон'юнкції, врахувавши, що кон'юнкція висловлення та його заперечення дорівнює нулеві, одержимо:

$0 \vee C \wedge \bar{A} \wedge B \vee 0 \vee 0 = 1$.

Оскільки $A \vee 0 = A$, то $C \wedge \bar{A} \wedge B = 1 \Rightarrow C = 1, \bar{A} = 1, B = 1 \Rightarrow C = 1, A = 0, B = 1$. Отже, підуть чергувати учні *B* і *C*.

6. *Означення*. Формули називаються ***тотожно істинними (логічними законами)***, якщо при всіх можливих наборах значень компонентів вони набувають істинних значень.

Приклад

Складемо таблицю істинності для формули $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ і покажемо, що вона є тотожно істинною.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
0	0	1	0	1

7. Логічні закони

1. *Закон виключення третього:* $A \vee \bar{A}$.

Зміст закону полягає у тому, що кожне висловлення є хибним або істинним, третього бути не може.

2. *Закон тотожності:* $A \Rightarrow A$.

3. *Закон протиріччя:* $\overline{A \wedge \bar{A}}$. – кожне висловлення не може бути одночасно хибним або істинним.

4. *Правило висновку:* $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$.

5. *Правило заперечення умови:* $\bar{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bar{A}$.

6. *Закон силогізму:* $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Розглянуті раніше рівносильності (основні властивості логічних операцій) можна розглядати як логічні закони, якщо знак рівносильності (=) замінити на ($\Leftrightarrow$).

Приклад

Властивість $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$ можна записати $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$. Дійсно, склавши таблицю істинності одержаної формули, переконаємося, що вона є тотожно істинною, тобто є логічним законом (*закон де Моргана).*

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати визначення:* формули алгебри висловлень; рівносильних формул; тотожно істинних формул.

2. Як довести рівносильність формул?

3. Як визначити, що формула є тотожно істинною?

4. Яку формулу називаємо логічним законом?

5. Довести, що справедлива рівносильність $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

6. Довести, що формула $\bar{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bar{A}$ є тотожно істинною.

Завдання для аудиторної роботи

1. Визначити значення істинності складених висловлень: а) $2\cdot3=5$ або $2\cdot 2=4$; б) число 702 ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр $7 + 0 + 2$ ділиться на 3; в) число 13 просте і число 13 ділиться на 2; г) якщо число 72 ділиться на 6, то воно ділиться на 2; д) неправильно, що 2 – просте число.

2. Виявити логічну структуру складених висловлень, записати кожне з них символами математичної логіки і знайти значення істинності кожного з них: а) «в одній тонні 10 ц або 1000 кг»; б) «в одному центнері 100 кг або 1 000 000 г»; в) «1 – найменше натуральне число, і воно просте»; г) «2 – єдине просте парне число; д) рік має не більше 366 днів; ж) якщо $2\cdot 5=8$, то $7\cdot 6=63$»; з) «$5\cdot 5=30$ тоді і тільки тоді, коли $7 + 8 = 12$»; і) неправильно, що $3 > 5$.

3. З’ясувати, в якому випадку наведені дані є суперечливими: а) $A=1$, $A\wedge B=0$; б) $A=0$, $A\wedge B=1$; в) $A=1$, $A\vee B=0$; г) $A=1$, $A\vee B=1$.

4. З’ясувати в яких випадках можна встановити значення істинності висловлення A: а) $A\wedge B = 1$; б) $A \vee B = 1$; в) $A \wedge B = 0$; г) $A \vee B = 0$; д) $A \wedge B = 0$, $B= 1$; е) $A \vee B = 1$, $B=0$.

5. Дано висловлення $A \asymp$ « Січень – перший місяць зими», $B \asymp$ «У січні 31 день», $C \asymp$ «У лютому 28 або 29 днів», $D \asymp$ « Лютий – останній місяць зими». Прочитайте словами складені висловлення: $A \Rightarrow D$; $\overline{A}\vee D$; $B\Rightarrow C$; $B\wedge C \Rightarrow D$; $C\wedge D\Rightarrow B$. Які з них є істинними?

6. Спростити формули: $A\wedge \overline{C} \wedge A$; $(A\Rightarrow B)\wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

7. Визначити, чи є формула тотожно істинною:

а) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A\wedge \overline{B}}$;

б) $A \wedge((A \Rightarrow C) \wedge \overline{A} \vee(A \wedge C))$;

в) $B \Rightarrow A \vee \overline{C} \Rightarrow \overline{B}$;

г) $(B \vee \overline{C})\Leftrightarrow(A \Rightarrow C)$;

д) $B \wedge \overline{A} \Rightarrow \overline{C} \vee \overline{B}$.

8. Довести рівносильності:

а) $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$;

б) $(A \wedge B)\vee C =(A\vee C)\wedge (B\vee C)$;

в) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

г) $A \Rightarrow B \vee C = (A \Rightarrow B)\vee(A \Rightarrow C)$;

д) $A \vee B \vee \overline{C} \Rightarrow A = (B \Rightarrow A)\wedge(\overline{A} \Rightarrow C)$.

Завдання для самостійної роботи

9. З’ясувати, в якому випадку наведені дані є суперечливими:
а) $A=0$, $A\wedge B=1$; б) $A=0$, $A \vee B=1$; в) $A=0$, $A \vee B=0$; г) $A=0$, $A\wedge B=0$.

10. З’ясувати, в яких випадках можна встановити значення істинності висловлення B: а) $A\wedge B = 1$; в) $A \vee B = 1$; в) $A \wedge B = 0$; г) $A \vee B = 0$; д) $A \wedge B = 0$, $A = 1$; е) $A \vee B = 1$, $A=0$.

11. Дано висловлення: $A \asymp$ «Сьогодні понеділок», $B \asymp$ «Сьогодні п’ятниця», $C \asymp$ «Я піду грати у футбол», $D \asymp$ «Я піду на вечірку». Сформулювати висловлення, які мають структуру: а) $A \vee B$; б) $A \wedge D$; в) $C \vee D$; г) $A \wedge (C \vee D)$; д) $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$.

12. Побудувати заперечення висловлень: а) 3+4=8; б) 23>9. Визначити їх значення істинності.

13. Позначити буквою кожне з висловлень, що входять до складених висловлень, і записати їх у символічній формі: «Якщо у даному чотирикутнику всі сторони рівні і кути прямі, то цей чотирикутник є квадрат»; «Якщо я поїду в інститут на таксі або на автобусі, то я не запізнюся на заняття».

14. Які із висловлень є істинними: а) якщо $2 \cdot 4 = 8$, то $3 + 9 = 11$; б) якщо $2 \cdot 2=8$, то $7 - 4=2$; в) якщо $4 < 3$, то $16 >12$.

15. Визначити, чи єформули тотожно істинними:

а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$;

б) $A \wedge \overline{B} \Leftrightarrow A \vee C$;

в) $(A \wedge B \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (A \Leftrightarrow \overline{C})$;

г) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B \vee C)$;

д) $((A \wedge B) \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (A \Leftrightarrow C)$?

16. Чи є істинними рівносильності:

а) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$;

б) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) = A \Rightarrow B \wedge C$;

в) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B) = A \vee \overline{C} \vee B$;

г) $A \wedge B \wedge (C \Rightarrow C \vee B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$;

д) $A \vee B \vee (A \vee C \Rightarrow B) = \overline{A} \wedge C \vee \overline{A}$?

Завдання підвищеної складності

17. З простих висловлень A і B скласти за допомогою логічних операцій складені висловлення: $A \Rightarrow B$, $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, $\overline{A} \Rightarrow B$, $\overline{B} \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$, $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$ і встановити значення істинності кожного із них, якщо:

1) $A \asymp$ «Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180 градусів»; $B \asymp$ «Сума внутрішніх кутів чотирикутника більша 180 градусів».

2) $A \asymp$ «Сума внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює 360 градусів», $B \asymp$: «Кожний внутрішній кут чотирикутника дорівнює 90 градусів».

18. Використовуючи закон контрапозиції, розв’язати задачу-жарт:

«Собаки з чорними хвостами собі вівсянку варять самі.
Всі інші , ніде правди діти, не знають, як її варити.
Всі, хто готує сам вівсянку, ідуть прогулюватись зранку.
Хто сам сніданку не готує, на ганку на шматок чатує…
Всі, хто прогулюється рано, не люблять фальші і обману,
А ті, що ласі їсти й спати, не проти вдосталь побрехати.

Спокійна вдача у Рябка – він лиш сорок завжди ляка,
Бо цокотухи білобокі не вчать, а списують уроки.
Зведіть тепер логічний міст, який в Рябка на колір хвіст?»

2.3. ПРЕДИКАТИ

1. Нехай стверджувальне речення містить змінну, наприклад, «x – просте число», яка може набувати різних значень, причому підстановка будь-якого значення змінної перетворює речення в істинне або хибне висловлення. Тоді це речення називають *одномісним предикатом.*

Означення. ***Одномісний предикат*** – це логічна функція $F(x)$, визначена на деякій множині M і яка приймає значення з двоелементної множини $\{0,1\}$**.** Одномісний предикат позначається $h(x)$ або $A(x)$.

Приклади одномісних предикатів

1. $h(x)\asymp$”Студент x – відмінник”.

2. $q(x)\asymp$”$y\,⋮\,6$”.

3. $A(x)\asymp$“ $x + 2<3$”.

Якщо предикат містить n змінних, то його називають n-місним предикатом. Розглядають ***двомісні***, ***тримісні предикати*** тощо.

Множина, якій належать змінні, називається ***областю визначення*** предиката.

Приклади двомісних предикатів

1. $f(x,y)\asymp$„x сильніший за y” на множині імен певної групи спортсменів;

2. $s(x,y)\asymp$„x – брат y” на множині імен деяких конкретних людей;

3. $h(x,y)\asymp$„$x\,⋮\,y$” на множині натуральних чисел.

Приклади тримісних предикатів

1. $f(x,y,z)\asymp$ «точка x лежить між точками y та z»на множині точок прямої.

2. $h(x,y,z)\asymp$«$x+y=z$» на множині N.

Приклад n – місного предиката

$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\asymp$ «$ax_1+ax_2+\ldots+ax_n=b$» на множині R.

2. *Означення.* ***Область істинності предиката*** – це множина значень змінних, які перетворюють предикат у істинне висловлення.

Приклади

1. $h(x)\asymp$«$0 \le x +1 \le 5$», $x \in Z$.

Z – область визначення предиката. Знайдемо його область істинності.

З того, що $0 \le x + 1\le 5$, випливає $-1 \le x \le 4$. Оскільки $x \in Z$, то $M_h=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ – область істинності.

2. $q(x)\asymp$ «$12\,⋮\,x$». Очевидно N – область визначення предиката.

$M_q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ – область істинності.

Над предикатами виконують тіж самі операції, що й над висловленнями ($\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

Якщо :

1) $f(x)=\overline{p(x)}$, то $M_f=M_p{}'$;
2) $f(x)=p(x)\vee q(x)$, то $M_f=M_p\cup M_q$;
3) $f(x)=p(x)\wedge q(x)$,то $M_f=M_p\cap M_q$;
4) $f(x)=p(x)\Rightarrow q(x)=\overline{p(x)}\vee q(x)$, то $M_f=M_p{}'\cup M_q$;
5) $f(x)=p(x)\Leftrightarrow q(x)=(\overline{p(x)}\vee q(x))\wedge(\overline{q(x)}\vee p(x))$,то $M_f=(M_p{}'\cup M_q)\cap(M_q{}'\cup M_p)$;

3. *Означення.* ***Квантором існування*** називається така операція $\exists$, яка кожному одномісному предикату $p(x)$, визначеному на множені M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\exists x)\ p(x)$ (читається: «Існує x таке, що виконується $p(x)$»), яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне $a\in M$ таке, що $p(a)=1$.

Приклади

1. Нехай $p(x)\asymp$ «x – парне число», тоді $(\exists x)\ p(x)\asymp$ «Існує парне число x» – істине висловлення.

2. Якщо $q(x)\asymp$ «x – просте число», то $(\exists x)\ p(x)\wedge q(x)\asymp$ «Існує просте парне число x» – істине висловлення.

4. *Означення.* ***Квантором загальності*** називається така операція$\forall$, яка кожному одномісному предикату $p(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\forall x)\ p(x)$(читається: «Для кожногоx виконується $p(x)$»),, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли для кожного $a\in M$: $p(a)=1$.

Приклад

«Для будь-яких x існує y таке, що $x \vdots y$» за допомогою кванторів запишеться так: $(\forall x\in R)(\exists y\in R)(x\vdots y)=1$.

Операція навішування квантора на предикат (запис квантора перед предикатом) називається ***квантифікацією***.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. ***Дати означення:*** предиката; області визначення предиката; області істинності предиката; квантора існування; квантора загальності.
2. Як знайти область істинності предиката?
3. Як знайти область істинності заперечення предиката?
4. Як знайти область істинності кон’юнкції предикатів?
5. Як знайти область істинності диз’юнкції предикатів?
6. Як знайти область істинності імплікації предикатів?
7. Як знайти область істинності еквіваленції предикатів?
8. Знайти область істинності предиката: $p(x)\asymp$“$x^2-5x+6=0$”, $x\in R$.

9. Записати за допомогою кванторів висловлення: а) існує таке дійсне число x, що $x^2 \geq 0$; б) для будь-якого дійсного числа x: $x^2 \geq 0$.

Завдання для аудиторної роботи

1. На множині Z задано предикати $f(x)$: «x – ділиться на 3», $g(x)$:«число x при діленні на 3 дає остачу 1». Знайти значення цих предикатів при x=4; 6; 7; 9; 10. Визначити значення істинності одержаних висловлень.

2. На множині дійсних чисел дано предикати $a(x)$: «$x - 2 < 0$» і $b(x)$: «$x+5>0$». Знайти області істинності предикатів: $a(x) \vee b(x)$; $a(x) \wedge b(x)$; $\overline{a(x) \vee b(x)}$; $\overline{a(x) \Rightarrow b(x)}$

3. Знайти область істинності предикатів $\overline{a(x)}$;$a(x) \vee b(x)$; $a(x) \wedge b(x)$; $a(x) \Rightarrow b(x)$, якщо: $a(x)$: «$3x - 15 = 0$», $b(x)$: «$x - 7>0$».

4. Записати висловлення за допомогою кванторів: а) існують числа кратні 3; б) кожне натуральне число є цілим; в) знайдеться таке натуральне числоx, що $x< 3$; г) будь-яке число має дільник, рівний 1; д) для будь-якого x знайдеться таке значення y, що $x- 2=y$; ж) існують такі натуральні числа x,y,що $x \cdot y=6$; з) для будь-яких дійсних чисел x і y існує таке дійсне число z, що $x<z<y$.

5. Записати заперечення висловлень і визначити значення істинності висловлення і його заперечення: а) існують числа, які кратні 2 і 5; б) будь-які числа кратні 3 або 5; в) деякі паралелограми мають центр симетрії; г) усі паралелограми мають центр симетрії; д) існують паралелограми, які не мають осей симетрії.

6. Визначити значення істинності висловлень:а) для всіх чисел x і y правильна рівність $x = 2y$; б) для будь-якого числа x існує таке число y, що $x = 2y$; в) для будь-якого числа y існує число x таке, що $x = 2y$.

Завдання для самостійної роботи

7. Знайти область істинності заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації предикатів $a(x)$, b (x), якщо: а) $a(x)$: «$x+13=10$», b (x): «$x- 5 = 4$»; б) $a(x)$: «$x- 7<0$», b (x): «$x+3>0$».

8. Записати висловлення за допомогою кванторів: а) усі елементи множини X мають властивість P; б) деякі елементи множини X мають властивість P; в) деякі елементи множини X не мають властивості P; г) жоден елемент множини X не має властивості P.

9. Записати висловлення за допомогою кванторів: а) деякі натуральні числа менші за 7; б) існують парні числа; в) будь-який чотирикутник є квадратом; г) знайдеться трикутник, у якого одна із висот збігається з медіаною та бісектрисою.

10. Сформулювати заперечення висловлень, визначити значення істинності висловлень та їх заперечень: а) діагоналі будь-якого ромба не рівні між собою; б) будь-який прямокутник є квадратом; в) деякі числа кратні 2 і 7; г) усі числа додатні або від'ємні.

11. Визначити значення істинності висловлень:а) існує таке число y, що для всіх чисел x справедлива рівність $x = 2y$; б) існує таке число x, що для всіх чисел y справедлива рівність $x = 2y$; в) існують такі числа x і y, що $x = 2y$.

Завдання підвищеної складності

12. Для доведення яких тверджень необхідно провести міркування в загальному вигляді, а для яких достатньо навести приклад: а) у будь-якому паралелограмі сума величин прилеглих кутів рівна 180 градусів; б) знайдеться ромб, діагоналі якого рівні; в) у деяких трикутниках усі висоти ділять протилежну сторону навпіл; г) існують тупокутні трикутники; д) будь-які числа, які діляться на 4, діляться на 2?

13. Довести або заперечити такі висловлення: а) сума будь-яких трьох послідовних натуральних чисел кратна 3; б) будь-яке двозначне число, записане за допомогою однакових цифр, ділиться на 11; в) у деяких паралелограмах діагоналі не рівні.

14. Спростити предикати і знайти їх області істинності: а) $\overline{x+5=0 \wedge x<0}$; б) $\overline{x+5=0 \vee x<0}$.

2.4. МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ, ЇХ СТРУКТУРА

1. ***Поняття*** відображають найсуттєвіші, найістотніші ознаки речей і явищ об'єктивної дійсності (форми, кількості, відношення тощо).

Людина пізнає реальну дійсність за допомогою відчуття, сприймання, уявлення та за допомогою мислення. Отже, поняття є однією з форм мислення. ***Поняття*** – це думка, передана словом – назвою предмета, явища, результата абстрагування. Поняття мають свою назву (термін), наприклад:«ромб», «дільник», «функція» тощо. Деякі терміни позначають символами: $\infty, \subset, \forall, \geq, \Leftrightarrow$, % тощо.

2. Поняття характеризується ***змістом***та ***обсягом***. ***Зміст*** – фіксована сукупність істотних ознак. *Істотними ознаками* поняття називають ознаки, кожна з яких є необхідною, а разом усі є необхідними і достатніми для того, щоб відрізняти дане поняття від інших понять. ***Обсяг*** – сукупність об'єктів, які належать цьому поняттю.

Приклад

Зміст поняття «*трикутник*» – три точки, які не лежать на одній прямій, та три відрізки, які їх попарно сполучають. *Обсяг* поняття «*трикутник*» – множина всіх трикутників.

Зміст і обсяг поняття пов'язані ***закономоберненого відношення***: *чим більший зміст поняття, тим менший його обсяг.*

Приклад

Множина рівнобедрених трикутників є підмножиною всіх трикутників. Множина рівносторонніх трикутників є підмножиною рівнобедрених трикутників.

3. ***Види понять***

Поняття поділяються на ***види***: *загальні, конкретні, одиничні, збірні, абстрактні.*

Вид поняття	Зміст	Приклади
Загальне (родове) поняття	Назва обсягу поняття	Многокутники, зошити, меблі, будівлі
Конкретне (видове) поняття	Назва окремого поняття з обсягу	Квадрат, зошит у клітинку, стілець, палац
Одиничне поняття	Назва міста, річки, гори, ім'я та прізвище відомої людини	Київ, Дунай, Тарас Шевченко
Збірне поняття	Назва об'єднання груп понять, що мають спільні властивості	Автопарк, школа, місто
Абстрактне поняття	Назви якостей, понять з різних галузей знань	Мужність, нерівність, число, підмет

Одне і те ж поняття може бути віднесено до різних видів. Наприклад, поняття *«школа»* – конкретне поняття, як різновид навчальних закладів, і збірне, як сукупність класів (учнів).

Поняття бувають ***порівнянні*** та ***непорівнянні***.

1. Порівнянні поняття	Зміст	Приклади
1) Сумісні поняття	Обсяг одного поняття є підмножиною обсягу іншого поняття	Рівняння і квадратне рівняння, одяг і пальто, квадрат і прямокутник
2) Несумісні поняття	Обсяги понять не перетинаються, але входять до обсягу родового поняття	Тарілка і чашка, коло і трикутник, призма і конус
2. Непорівнянні поняття	Обсяги понять відносяться до різних родів	Коло і нерівність, дерево і будинок, трикутник і сфера

4. *Означенням поняття* є речення, в якому розкривається зміст цього поняття.

Приклади

1. Фігурою називається будь – яка множина точок.

2. Ромбом називається паралелограм, у якого суміжні сторони рівні.

Математична теорія використовує скінченну кількість понять. Частина їх є початковими, вони не означаються і називаються **первісними, неозначуваними**, наприклад: множина, величина, точка, пряма, площина, належність тощо.

Існують різні види означень понять: *через найближчій рід та видову відмінність; генетичні (конструктивні); через узгодження; індуктивні (рекурсивні); аксіоматичні.*

Означення через найближчій рід та видову відмінність

Поняття *A* є родовим, а поняття *B* є видовим, якщо всі основні ознаки *A* входять у зміст поняття *B*, але не всі основні ознаки *B* є основними ознаками *A*. Обсяг родового поняття ширший за обсяг видового поняття. Родове поняття містить у собі відповідні йому видові поняття.

Приклад.

Квадрат має всі істотні ознаки чотирикутника, паралелограма, прямокутника,але має і свої ознаки (видову відмінність: рівність усіх сторін). Найближчий до нього рід – рід прямокутників. Маємо означення: *Квадратом* називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Генетичні (конструктивні) означенняпоказують спосіб утворення поняття.Означення трикутника, кола, сфери, конуса є генетичними

Приклад

Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо катета.

Означення через узгодження мають вигляд формул:

$$a^0=1\ (a \neq 0),\ 0! = 1,\ (-a)(-b) = ab,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Індуктивні (рекурсивні) означення

В означеннях такого виду спочатку називаються об’єкти, які належать до цього поняття, а потім формулюється алгоритм, який дає можливість одержати нові об’єкти цього поняття.

Приклад

За допомогою індуктивного означення можна означити поняття «натуральне число» :

1) 1 – натуральне число;

2) якщо n– натуральне число, то $n + 1$ також натуральне число;

3) ніяких інших натуральних чисел, крім зазначених у попередніх пунктах, не існує.

Аксіоматичні означення

Якщо теорія будується аксіоматично, то властивості первинних понять описує система аксіом, яка є їх неявним означенням. Так означується множина цілих невід’ємних чисел з аксіоматичної точки зору, адитивно- скалярна величина, тощо. До системи аксіом ставляться вимоги: несуперечливість, незалежність, повнота.

Правила означення понять

1. Об’єм поняття, яке означується, повинен бути рівним об’єму поняття, за допомогою якого означаємо.

2. Поняття не повинно означуватися за допомогою поняття, яке означується.

3. Означення не повинно містити: а) ознаки, яких означуване поняття не має; б) зайвих видових ознак, які є наслідком ознак, уже наведених в означенні.

5. ***Теорема*** – це твердження, істинність якого перевіряється за допомогою логічних міркувань (доведень) на основі аксіом або раніше доведених тверджень. (Теорема – слово грецького походження, означає: «придивляюсь, спостерігаю»).

Теорема складається з *умови* ***A*** та *висновку* ***B***. У термінах «Якщо…, то..» теорему можна записати у вигляді $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$**.** Щоб визначити умову і висновок, теорему зручно записати у цих термінах.

Приклад

Для теореми «Діагоналі прямокутника рівні» визначити умову і висновок.

Щоб визначити умову і висновок, сформулюємо теорему у вигляді імплікації «Якщо…, то…»: «Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі рівні».

Умова A: «Чотирикутник є прямокутником». Висновок B: «Діагоналі чотирикутника рівні».

Оскільки ця теорема справедлива для будь – якого чотирикутника x, що є прямокутником, то цю теорему можна записати у вигляді:

$(\forall x)$ $(A(x) \Rightarrow B(x))$. ($\forall x$ – *пояснювальна частина,* $A(x)$ – *умова,* $B(x)$ – *висновок)*.

6. ***Види теорем***

1) $A \Rightarrow B$ – *дана теорема***.**

Приклад

Якщо кути вертикальні, то вони рівні – істинне твердження.

2) $B \Rightarrow A$ – *теорема, обернена до даної.*

Приклад

Якщо кути рівні, то вони вертикальні – хибне твердження.

3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$–*теорема , протилежна до даної.*

Приклад

Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні – хибне твердження.

4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$–*теорема, обернена до протилежної, або протилежна до оберненої.*

Приклад

Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні – твердження істинне.

Серед чотирьох видів теорем є дві пари рівносильних теорем:

$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ та $B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

7. ***Необхідні і достатні умови***

Якщо $A \Rightarrow B = 1$, то A – достатня умова для істинності B, а B є необхідною умовою для істинності A. Якщо і $B \Rightarrow A = 1$, то B є достатньою умовою для істинності A, а A є необхідною умовою для істинності B. В такому випадку A є необхідною і достатньою умовою для істинності B, а B є необхідною і достатньою умовою для A.

Приклади

1. «*Якщо число ділиться на 4, то воно ділиться на 2*».

Висловлення A: «Число ділиться на 4». Висловлення B: «Число ділиться на 2». Імплікація $A \Rightarrow B$є істинною, а $B \Rightarrow A$ хибною. Отже, подільність числа на 4 є достатньою умовою подільності його на 2, а подільність на 2 є необхідною умовою подільності на 4.

2. *«Якщо число ділиться на 2 і на 3, то воно ділиться на 6».*

Висловлення A: «число ділиться на 2 і на 3», B: «Число ділиться на 6». Імплікації $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ є істинними. Тому подільність числа на 2 і на 3 є необхідною і достатньою умовою подільності його на 6. В такому випадку говорять: «Для того щоб число ділилося на 6, необхідно і достатньо, щоб число ділилося на 2 і на 3» або «Подільність числа на 2 і на 3 є необхідною і достатньою умовою подільності на 6». Вживають і такий вираз: «Число ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2 і на 3».

8. *Методи доведення теорем*

Дедуктивне доведення – основний метод математичних доведень. Виходячи з умови, використовуючи аксіоми або теореми, логічні закони, будується ланцюг логічних умовиводів.

Повна індукція.В доведенні розглядаються всі можливі випадки,при яких теоремаєістинним твердженням.

Теорема. Добуток двох послідовних натуральних чисел є парним числом.

Доведення

Нехайn – будь-яке натуральне число, тоді$(n + 1)$ – число, яке беспосередньо слідує за ним, а $n(n + 1)$ – добуток послідовних натуральних чисел. Можливі випадки: 1) якщо $n=2t$, тоді $n(n + 1) = 2t(2t+ 1)$ – парне число; 2) $n = 2t + 1$, тоді$n(n + 1) = (2t + 1)(2t + 2) = 2(2t + 1)(t + 1)$–парне число. Інших випадків немає. Теорема доведена.

Неповна індукція–зміст методу полягає у тому, що розглядаються часткові випадки і на основі їх висловлюється гіпотеза (висновок).

Теорема. Довести, що сума n послідовних непарних чисел дорівнює n^2.

Доведення

$1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$. Дійдемо висновку, що для n непарних чисел справедлива рівність $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Одержаний висновок треба логічно обґрунтувати, оскільки метод неповної індукції може привести до хибного висновку. Відомий історичний приклад про число Ферма $2^{2^n} + 1$. Французький математик П.Ферма висловив гіпотезу, що числа такого виду є простими. Це дійсно так при $n = 0, 1, 2, 3, 4$. У 1732 році Л. Ейлер показав, що при $n = 5$ це число є складеним.

Непрямі доведення (від супротивного, зведення до абсурду)

Метод від супротивногобазується на рівносильності: $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Теорема. Якщо добуток трьох додатних чисел 63, то хоч би одне з них менше за 4.

Доведення

Умова A: «$a>0, b>0, c>0 \wedge abc = 63$».

Висновок B: « $a<4 \vee b<4 \vee c<4$».

Заперечимо висновок. $\overline{B}$: «$a\geq 4, b\geq 4, c\geq 4$».

Тоді одержимо: $\overline{A}$: «$abc \geq 64$». Маємо: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, що і доводить теорему.

Зведення до абсурду базується на рівносильності: $A \Rightarrow B = A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$.

Теорема. Якщо дві різні прямі a і b паралельні третій прямій c, то вони паралельні між собою.

Доведення

Умова A: «$a \neq b \wedge a \parallel c \wedge b \parallel c$», висновок B: «$a \parallel b$». Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Нехай прямі перетинаються в точці C, де $C \notin c$. Маємо: через точку C проходять дві прямі, які паралельні прямій c, що суперечитьаксіомі паралельності. Одержали $A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$, що доводить теорему: $a \parallel b$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* змісту, обсягу поняття; порівняльних, не порівняльних, сумісних, несумісних понять.

2. Що розуміємо під поняттям?Які ознаки поняття є істотними?

3. Який існує зв'язок між змістом і обсягом поняття?

4. Назвати види понять, навести приклади понять різних видів (визначте їх зміст і обсяг).

5. Яка особливість означень: а) через найближчий рід та видову відмінність; б) генетичного; в) через узгодження; г) індуктивного; д) аксіоматичного? Навести приклади означень різних видів.

6. Що називаємо теоремою? Що розуміємо під доведенням теореми?

7. Яка структура теореми? Які існують види теорем? Навести приклад відомої вам теореми. Визначити її структуру.

8. Сформулювати обернену теорему, протилежну до даної, обернену до протилежної.

9. Визначити, які із сформульованих теорем є істинними? Визначити в них необхідні, достатні, необхідні й достатні умови.

Завдання для аудиторної роботи

1. Розкрити зміст та обсяг понять: а) множина; б) натуральне число; в) конус; г) десятковий дріб.

2. Серед понять виділити загальні, конкретні, одиничні, абстрактні поняття: *висловлення, слово, речення, автобус, літак, аксіома, теорема, Полтава, транспорт, Андрій, Андрій Шевченко, множина*. Які серед них є порівнянними (сумісними, несумісними), непорівнянними?

3. Визначити родове поняття та видову відмінність понять: а) рівнопотужні множини; б) паралельні прямі; в) прямокутник; г) висловлення; д) квадратне рівняння.

4. Поділити родове поняття «трикутник» на види, якщо за основу поділу взяти: а) величину кутів; б) довжини сторін.

5. Поділити родове поняття «дійсне число» на види. Для кожного виду вказати найближчий рід.

6. Сформулювати означення поняття та визначити вид означення: а) висловлення; б) нескінченна множина; в) паралелограм; г) ромб; д) куля.

7. Вказати в теоремах пояснювальну частину, умову, висновок. Записати її за допомогою символів математичної логіки.

а) Квадрат парного числа є числом парним;

б) Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника рівний сумі квадратів його катетів.

8. Які із наведених теорем є істинними? Які з них є оберненими, протилежними?

а) Якщо кожен із доданків ділиться на 7, то і сума ділиться на 7.

б) Якщо жоден з доданків не ділиться на 7, то і сума не ділиться на 7.

в) Якщо сума ділиться на 7, то і кожен доданок ділиться на 7.

г) Якщосума не ділиться на 7, то і кожен з доданків не ділиться на 7.

9. Визначити структуру теореми. Сформулювати теорему обернену, протилежну, обернену до протилежної. Які з них є істинними?

а) Якщо натуральне число закінчується двома нулями, то воно ділиться на 4.

б) Якщо два кути трикутника рівні, то трикутник рівнобедрений.

в) Квадрат парного числа є числом парним.

10. У теоремі «Якщо чотирикутник $ABCD$ – паралелограм, то $BC = AD$» виділити необхідну ознаку паралелограма. Чи є вона достатньою?

11. Які з висловлень є істинними?

а) Для того щоб точка M кута A належала його бісектрисі, достатньо, щоб точка M була однаково віддалена від сторін кута A.

б) Для того щоб у чотирикутнику $ABCD$ сторониAB і CD були паралельними, необхідно, щоб він був паралелограмом.

в) Для того щоб дві прямі були паралельними, необхідно, щоб внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині цих прямих третьою, були рівними.

12. Обгрунтувати, що теореми $(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ істинні, і сформулювати їх, використовуючи терміни «необхідно і достатньо», якщо:

а) $A(x)$: «Трикутник x рівнобедрений»; $B(x)$: «Дві медіани трикутника x рівні»;

б) $A(x)$: «Трапеція x рівнобедрена»; $B(x)$: «Діагоналі трапеції x рівні».

13. Довести методом від супротивного теорему «Якщо сума двох натуральних чисел рівна 53, то одне з них менше 27».

Завдання для самостійної роботи

14. Розкрити зміст та обсяг понять: а) висловлення; б) імплікація; в) відношення еквівалентності; г) відношення нестрогого порядку; д) куля.

15. Серед понять виділити загальні, конкретні, одиничні, абстрактні поняття: *чотирикутник, ціле число, дріб, Ворскла, мир, світло, дерево, яблуня, трикутник, сфера, куб, Олексій, Тарас Шевченко.*

16. Визначити родове поняття та видову відмінність таких понять: а) нескінченна множина; б) диз'юнкція; в) предикат; г) чотирикутник; д) квадрат.

17. Скласти таблицю поділу родового поняття «чотирикутник» на види, враховуючи найближчий рід.

18. Сформулювати означення понять та визначити вид означення: а) бінарна відповідність; б) відношення строгого порядку; в) прямокутник; г) призма; д) сфера.

19. Вказати в теоремах пояснювальну частину, умову, висновок. Записати її за допомогою символів математичної логіки:

а) Якщо сума цифр числа ділиться на 3, то число ділиться на 3;

б) Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.

20. Які із наведених теорем є істинними? Які з них є оберненими, протилежними?

а) Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $a^2 + b^2 = 0$ ($a, b \in R$).

б) Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то $a = 0$і $b = 0$.

в) Якщо $a \neq 0$ або $b \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$ ($a, b \in R$).

г) Якщо $a^2 + b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ або $b \neq 0$ ($a, b \in R$).

21. Визначити структуру теореми. Сформулювати теорему обернену, протилежну, обернену до протилежної. Які з них є істинними? Визначити необхідні, достатні, необхідні і достатні умови. Сформулювати теореми з використанням цих термінів:

а) діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл;

б) деякі дійсні числа – раціональні.

22. Довести методом від супротивного теореми: а) опуклий чотирикутник не може мати більше трьох гострих кутів; б) якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180^0, то через вершини цього чотирикутника можна провести коло.

РОЗДІЛ ІІІ.
ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ТА АКСІОМАТИЧНИЙ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

3.1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

1. ***Кількісне натуральне число*** є спільною властивістю класу скінченних еквівалентних множин. Натуральне число визначається будь-якою множиною даного класу.

Кількість елементів множини *М* називають ***потужністю множини М*** іпозначають: $n\ (M)= m$.

Приклади

1. $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $A \sim B$, $n\ (A) = n\ (B) = 2$. Число 2 – спільна характеристика класу еквівалентних множин, що містять два елемента.

2. Число «нуль» з теоретико-множинної точки зору відповідає порожній множині: $n(\varnothing) = 0$.

Доповнивши будь-яку скінченну множину *М* новим елементом, дістанемо нову множину, не еквівалентну початковій. Продовживши цей процес далі, матимемо нескінченну послідовність попарно не еквівалентних множин і відповідний їй ряд чисел 1, 2, 3, ..., *n*, ...

$N_0=\{ 1, 2, 3,\ldots,n,\ldots\} \cup \{0\}$ – ***множина цілих невід'ємних чисел***.

2. Нехай *A* і *B* – дві скінченні множини, $n\ (A) = a$ і $n\ (B) = b$ – відповідні їм натуральні числа. Множини *А* і *В* можуть бути як еквівалентними ($A \sim B$), так і нееквівалентними ($\overline{A \sim B}$). Якщо $A \sim B$, то вони належать одному й тому ж класу, і тому відповідні їм числа рівні, тобто $a = b$. Отже, $(a=b) \Leftrightarrow (A \sim B)$, де $a = n(A)$, $b=n(B)$.

Означення 1. Якщо множина *А* еквівалентна власній підмножині множини *В*, то говорять, що число *а* ***менше*** *b*, і пишуть: $a<b$.

Отже, $\boldsymbol{(a<b) \Leftrightarrow (A \sim B_1 \wedge B_1 \subset B \wedge B_1 \neq B \wedge B_1 \neq \varnothing)}$.

Оскільки, які б не були скінченні множини *А* і *В,* вони або еквівалентні, або не еквівалентні, то, які б не були натуральні числа *а* і *b*, завжди виконується одне із співвідношень: $a = b$ або $a \neq b$.

Відрізком $\boldsymbol{N_m}$ натурального ряду називається множина всіх послідовних натуральних чисел, які не перевищують натурального числа *m*.

Приклад

Відрізок $\mathbf{N_7}$ – множина натуральних чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Лічбою елементів множини *М* називається встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною *М* і відрізком N_m натурального ряду.

Означення 2. Число *a* ***менше*** *b* тоді і тільки тоді, коли відрізок натурального ряду N_a є власною підмножиною відрізка N_b тобто $(\boldsymbol{a<b}) \Leftrightarrow (N_a \subset N_b \wedge N_a \neq N_b)$.

Приклад

2<3 тому, що $\{1, 2\} \subset \{1,2,3\}, \{1,2\} \neq \{1,2,3\}$.

Таке тлумачення поняття «менше» дає змогу порівнювати числа, знаючи їх місце в натуральному ряді. Число, яке при лічбі зустрічається раніше, менше від числа, що йде пізніше. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тому 0 менше за будь-яке натуральне число. Множина N_0 – упорядкована і може бути записана у вигляді нескінченого ряду чисел $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

3. *Додавання цілих невід'ємних чисел*

Нехай A і B – дві скінчені множини, $n(A) = a$, $n(B) = b$ – відповідні їм натуральні числа.

Означення. ***Сумою цілих невід'ємних чисел*** a і b, що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів об'єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

Якщо $n(A) = a$, $n(B) = b$ і $A \cap B = \varnothing$, то $a + b = n(A \cup B)$.

Числа a і b називаються *доданками,* а дія знаходження їхньої суми – *додаванням.*

4. *Різниця цілих невід'ємних чисел*

Означення1. ***Різницею цілих невід'ємних чисел*** a і b називається число елементів у доповненні множини B до множини A.

Якщо $a = n(A)$, $B = n(B)$, причому $B \subset A$, то $a - b = n(A \backslash B)$.

Знаходження за даними двома числами a і b їхньої різниці $a - b$ називається ***відніманням*** і позначається $a - b = c$. Число a називається ***зменшуваним***, b – ***від'ємником***, c – ***різницею.***

З означення випливає, що різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли множина B – підмножина множини A, тобто коли $n(B) \leq n(A)$, або $b \leq a$.

Якщо $A = B \cup (A \setminus B)$ і $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$, то $n(A) = n(B \cup (A \backslash B)) = n(B) + n(A \backslash B)$, отже: $\boldsymbol{a=b+(a-b)}$, то має місце друге означення різниці.

Означення 2. ***Різницею цілих невід'ємних чисел*** a і b називається таке число c, сума якого з числом b дорівнює a, тобто $b+c=a$.

$$(\boldsymbol{a - b = c}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{b + c = a}).$$

Обидва означення різниці цілих невід'ємних чисел еквівалентні.

Теорема. Які б не були цілі невід'ємні числа a і b такі, що $b \leq a$, існує єдине число c таке, що є різницею чисел a і b.

5. ***Множення цілих невід'ємних чисел***

Дію знаходження суми рівних між собою доданків називають ***дією множення,*** а результат множення – ***добутком***.

Означення1. Суму***b,*** ***b***>1, доданків, кожний з яких є ціле невід'ємне число ***a***, називають ***добутком a*** на натуральне число ***b*** і позначають ***ab.***

Особливі випадки множення: $a\cdot 0 = 0$; $a\cdot 1 = a$.

Означення добутку пов'язане з об'єднанням скінченних еквівалентних між собою множин.

Означення 2. Добутком ***цілих невід'ємних чисел*** *a* і *b* називається число елементів декартового добутку множини, що має *a* елементів, на множину, що має *b* елементів.

Якщо *A, B* – скінченні множини і $n(A) = a$, $n(B) = b$, то $n(A \times B) = ab$.

6.Ділення цілих невід'ємних чисел

Розбиття скінченної множини *A* на еквівалентні підмножини передбачає розв'язання двох задач:

1) визначення числа підмножин, еквівалентних підмножині *B,* на множині *A*;

2) розбиття множини *A* на певне число еквівалентних множин і визначення їх чисельності.

Задачі першого виду називаються задачами *ділення на вміщення,* другого виду – *ділення на рівні частини.*

Приклади

1) ***Задача на вміщення:*** дано деяку множину *B*, що є власною підмножиною множини *A*, і треба визначити, скільки всіх підмножин, еквівалентних *B*, має множина: "*Петрик розклав на тарілки 12 цукерок по 4 цукерки на кожну. Скільки тарілок використано?"*

2) ***Задача на ділення на рівні частини:***множину *A* треба розбити на певне число еквівалентних підмножин, визначити потужність цих множин: "*Петрик розклав 12 цукерок на 4 тарілки порівну. Скільки цукерок на кожній тарілці?"*

*Означення1***.** Нехай $a = n\ (A)$ і множина *A* розбита на еквівалентні множини. Тоді, якщо *b* – число елементів кожної підмножини, то ***часткою чисел a і b*** називається число підмножин у цьому розбитті; якщо *b* число підмножин у розбитті множини *A*, то ***часткою чисел a і b*** називається число елементів кожної підмножини.

Перша задача зводиться до знаходження числа*x* підмножин, якщо в кожній підмножині *b* елементів*:*

$$\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{x}=a, \text{ або } b\cdot x = a.$$

Друга задача зводиться до знаходження кількості елементів кожної з *b* еквівалентних підмножин, якщо в множині *a* елементів:

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{b}= a, \text{ або } x\, b=a.$$

В обох випадках задача зводиться до знаходження невідомого множника за відомим добутком і другим множником. Отже, ділення є дія, обернена до множення.

$\boldsymbol{a{:}b = x}$(число a називається *діленим, b–дільником,* $c = a{:}b$ *– часткою*).

Означення2. Поділити ціле невід'ємне число a на натуральне число b означає знайти таке число c, що $a = b{\cdot}c$ ($a{:}b = c \Leftrightarrow a = b{\cdot}c$).

З означення випливають такі рівності:

1)$(a{:}b){\cdot}b = a$ (ділене дорівнює частці, помноженій на дільник);

2) $(a{\cdot}b) : b = a$.

7. *Існування частки*

За яких умов можливе ділення цілих невід'ємних чисел? Проаналізуємо можливі значення a і b урівнянні $b\cdot x = a$, оскільки саме воно визначає дію ділення.

1. Якщо, $a = 0$ і $b = 0$, то $0\cdot x = 0$.

Рівняння $0\cdot x{=}0$ має безліч розв'язків, оскільки множення будь-якого числа на 0 дає в результаті 0. Отже, вираз 0:0 не має змісту, бо йому не можна надати єдиного конкретного значення.

Висновок.* 0 *ділити на* 0 *не можна.

2. Якщо, $a \neq 0$ і $b = 0$, то $0\cdot x = a$.

Рівняння $\boldsymbol{0\cdot x = a}$ не має жодного розв'язку, оскільки$(\forall x \in N_0)(0\cdot x = 0)$ і $a{\neq}0$. ***Висновок*: *Ділити на* 0 *не можна!***

3. Якщо, $a = 0$ і $b \neq 0$, то $b\cdot x = 0$.

$x = 0$ – розв'язок рівняння, тому, що $b\cdot 0 = 0$.

4. Якщо, $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $b\cdot x = a$. Рівняння має один розвязок.

Знайдемо розв'язки цього рівняння у множині N_0.

Якщо $b \in N$, то добутки числа b на невід'ємні цілі числа: $b{\cdot}0{=}0$, $b{\cdot}1{=}\ b$, $b{\cdot}2$, $b{\cdot}3,\ldots,b{\cdot}n,\ldots$ називаються кратними числу b.

Якщо $a = b{\cdot}n$, то за означенням ділення $a{:}b = n$. Звідси випливає умова існування частки у множині цілих невід'ємних чисел.

Теорема (*існування частки*). Ділення цілого невід'ємного числа a на натуральне число b можливе тоді і тільки тоді, коли a кратне b. Ділення на нуль – неможливе.

Якщо a кратне b, то говорять, що a ділиться на b, і пишуть $a \vdots b$.

Висновок. Множина цілих невід'ємних цілих чисел замкнена відносна дій додавання та множення і незамкнена відносно дій віднімання та ділення.

Теорема. Якщо ділення двох цілих невід'ємних чисел a і b можливе, то їхня частка $a{:}b$ – єдина.

8. ***Ділення з остачею***

Ціле невід'ємне число ***a ділитьсяна натуральне число b з остачею***, якщо існують такі цілі невід'ємні числа q і r, що $a = bq + r$, де q – неповна частка, r – остача, $0 \leq r < b$.

Теорема. Для будь-яких цілого невід'ємного числа a і натурального числа b існує і причому єдина пара цілих невід'ємних чисел q і r таких, що $a = bq+r$, де $0 \leq r < b$.

Приклади

1) 17:3. Маємо 17:3 = 5 (остача 2), або $17 = 3 \cdot 5+2$; $q = 5$; $r=2$.

2) 15:3=5 або $15=5 \cdot 3+0$, $r=0$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:*кількісного натурального числа; відрізку натурального ряду; лічби предметів; суми,різниці, добутку, частки цілихневід’ємних чисел у кількісній теорії.
2. Як означується 0 (1, 2, 3 та інші числа) у кількісній теорії?
3. В якому випадку число a менше числа b?
4. Чи існує найбільше ціле невід’ємне число? Відповідь обґрунтуйте.
5. Записати характеристичну властивість множини цілих невід’ємних чисел.
6. Чому не можна ділити на 0?
7. В якому випадку частка не існує на множині цілих невід’ємних чисел?
8. В якому випадку частка не визначена на множині цілих невід’ємних чисел?
9. Навести приклади двох типів задач, які розкривають конкретний зміст арифметичної дії ділення (задачі на ділення на рівні частини, задачі на вміщення).
10. Сформулювати теорему про ділення з остачею.

Завдання для аудиторної роботи

Порівняння, додавання та віднімання цілих невід’ємних чисел

1. Прочитати записи: $n(A) = 3$; $n(B) = 0$. Навести приклади множин A і B, які задовольняють цим умовам.
2. Навести приклади множин C і D, для яких виконуються умови:
а) $n(C) = n(D)$ і $C=D$; б) $n(C) = n(D)$ і $C \neq D$. Які цілі невід’ємні числа задають множини C і D?
3. Яку треба задати умову, щоб $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$?
4. У класі 15 учнів мають з математики оцінку «12», 10 учнів – оцінку «12» з української мови. Скільки учнів мають такі оцінки з математики або української мови? Розглянути всі можливі випадки. Скільки їх?
5. У 3-А класі оцінку «12» з математики мають 13 учнів, у 3-Б класі оцінку «12» з математики мають 10 учнів. Скільки учнів обох класів мають з математики такі оцінки? Пояснити, чому задача має один розв’язок?
6. Довести, що: а) $4 < 5$; б) $0<2$.

7. У Наталки 5 цукерок, а у Петрика – 8. У кого менше? Відповідь обґрунтувати з теоретико-множинної точки зору.

8. Використовуючи означення суми цілих невід'ємних чисел, показати, що: а) 2 + 4 = 6; б) 3 + 1 = 4; в) 0 + 4 = 4.

9. Пояснити, чому такі задачі розв'язуються додаванням: а) Оля зібрала гриби: три білих і два маслюки. Скільки грибів зібрала Оля? б) Із коробки вийняли 4 олівці, а потім ще 2. Скільки всього олівців вийняли з коробки?

10. Використовуючи означення різниці, показати, що: а) 7 – 5 = 2; б) 5 – 3=2; в) 3 – 3=0; г) 2 – 0 = 2.

11. Пояснити, чому такі задачі розв'язуються відніманням: а) На столі 10 чашок, їх на 2 більше, ніж ложок. Скільки ложок на столі? б) У зоопарку 6 ведмедів, а верблюдів на 2 менше. Скільки верблюдів у зоопарку?

12. У трикутнику ABC сторона AC = 40см, вона на 18 см менше довжини сторони BC і на 10 см більша за довжину сторони AB. Знайти периметр трикутника.

13. Вказати істинні висловлення:

а) Яке б не було ціле невід'ємне число a, знайдеться таке ціле невід'ємне b, що $a + b$–складене число.

б) Яке б не було ціле невід'ємне число a, знайдеться таке ціле невід'ємне b, що $a + b$–парне число.

в) Яке б не було ціле невід'ємне число a, знайдеться таке ціле невід'ємне b, що $a + b$–непарне число.

14. Накреслити таблицю з двома стовпцями та з чотирма рядками. Розташувати в клітинах таблиці числа 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 так, щоб: а) суми чисел у кожному рядку були рівні; б) суми чисел у кожному стовпці були рівні.

Множення і ділення цілих невід'ємних чисел

15. Знайти декартовий добуток множин A і B, якщо: $A = \{k, l, m\}$, а множина B така: а) $B = \{r, p\}$; б) $B = \{a\}$; в) $B=\varnothing$. У кожному випадку знайти $n(A\times B)$.

16. Використовуючи означення добутку цілих невід'ємних чисел, показати, що: а) 5·2=10; б)1·7=7; в) 6·0=0.

17. Прямокутник, квадрат, круг фарбують в кожен із кольорів: червоний, блакитний, жовтий. Скільки варіантів розфарбування геометричних фігур можна одержати?

18. У змаганнях з шахів беруть участь дві команди: A = {Антон, Сергій, Петро} і B= {Юрій, Іван, Мишко}. Кожний член першої команди грає партію з кожним членом другої команди. Скільки партій буде зіграно?

19. Дано множину голосних {а, о, і, и} і множину приголосних {м, н, п}. Скільки можна скласти відкритих та закритих складів із цих букв?

20. Скільки можна записати двоцифрових чисел, у яких число десятків записується цифрою 2, 3, 4, 5, а число одиниць – цифрою 7, 8, 9, 4 ?

21. Використовуючи означення частки чисел, показати (двома способами), що: а)12:3 = 4; б) 6:2 = 3.

22. Доведіть, що для будь-якого натурального n справедлива рівність: $n : n = 1$.

23. Знайти частку і остачу при діленні a на b, результати записати у вигляді: $a=b\cdot q+r$, якщо $a = 78$, $b = 15$.

24. При діленні числа a на b одержали частку q і остачу r. Знайти: а) a, якщо $b = 10$, $q = 6$, $r = 5$; б) b, якщо $a = 137$,$q = 11$, $r = 5$.

25. При діленні чисел a, b і c на 7 одержали остачі відповідно 1, 4 і 5. Яку остачу при діленні на 7 дає сума $a+b+c$?

26. Швидкість потяга 80 км/год. За який час пройде потяг a кілометрів? Скласти вираз і знайти його значення при $a = 480;160$.

Завдання для самостійної роботи

Порівняння, додавання та віднімання цілих невід'ємних чисел

27. Серед даних множин виділити рівнопотужні множини. Які натуральні числа вони задають? $A=\{a, b,c\}$, $B=\{d, k\}$, $C=\{m, n\}$, $D=\{m, n, r\}$.

28. Дано множини A і B. Знайти кількість елементів $n(A\cup B)$, якщо: а) $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{5, 6, 7\}$; б) $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{6, 7\}$.

29. 15 студентів групи працюють у танцювальному гуртку, 12 – у спортивному. Скільки студентів працюють хоча б в одному з цих гуртків? Скільки розв'язків має задача?

30. У п'ятому класі 15 учнів, а у шостому класі 12 учнів записались у математичний гурток. Скільки учнів обох класів записались у цей гурток? Скільки розв'язків має задача?

31. Використовуючи означення суми та різниці, виконати дії: а) 7+1; б) 3+4; в) 0+8; г) 10–7; д) 5–3.

32. Площа однієї класної кімнати 28м^2, площа другої на 6м^2 більша за площу першої кімнати і на 20м^2 менша, ніж площа спортивної зали. Яка площа цих приміщень?

33. Обгрунтувати вибір дії при розв'язуванні задач: а) У Миколи було 5 марок, а у Петра на 3 марки більше. Скільки марок було у Петра? б) У Сашкабуло 10 книжок, дві книжки він подарував товаришу. Скільки книжок залишилося у Сашка?

34. Подати число 5 у вигляді суми двох цілих невід'ємних чисел. Скількома способами це можна зробити? Чи можна число 5 подати у вигляді суми 10 цілих невід'ємних чисел?

35. Чи може сума двох цілих невід'ємних чисел бути рівною: а) нулеві; б) одному із доданків?

36. Чи може сума двох натуральних чисел бути рівною: а) нулеві; б) одному із доданків?

Множення і ділення цілих невід'ємних чисел

37. Використовуючи означення добутку цілих невід'ємних чисел, довести істинність рівності: а) $5 \cdot 3 = 15$; б) $0 \cdot 3 = 0$; в) $1 \cdot 3 = 3$.

38. Використовуючи означення частки цілих невід'ємних чисел, довести (двома способами) істинність рівності : а) $8 : 2 = 4$; б) $10 : 5 = 2$.

39. Довести, що для будь-якого натурального n справедлива рівність: $0 : n = 0$.

40. Скільки можна записати двоцифрових чисел, у яких число одиниць записується однією з цифр 8, 9, 4, а число десятків – однією з цифр 5, 6, 1, 2?

41. Вадиму 30 років, він у 5 разів старший за Сергія. На скільки років Сергій молодший за Вадима?

42. При діленні числа a на 4 в остачі одержали r. Записати число a у вигляді $b \cdot q + r$, якщо а) $r = 3$; б) $r = 2$; в) $r = 0$.

43. При діленні чисел a і b на 12 одержали одну і ту ж остачу 9. Яку остачу одержали при діленні на 12 числа: а) $a + b$; б) $a – b$; в) $a \cdot b$.

Завдання підвищеної складності.

44. При діленні з остачею на 15 одержали неповну частку 10. Яке найбільш можливе числове значення діленого?

45. A– множина чисел, які при діленні на 4 в остачі дають 3 або 1, B – множина чисел, які при діленні на 2 дають в остачі 1. Довести, що $A=B$.

46. Відомо, що $a = b \cdot q + 17$. Одне з чисел a, b або q дорівнює 13. Яке це число?

47. Розбити множину натуральних чисел від 5 до 27 на класи чисел, які дають однакові остачі при діленні на 5. Скільки одержали класів?

3.2. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ ТА МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

1. *Властивості арифметичної дії додавання*

1) $(\forall a, b \in N_0)$ $(a+b = b+a)$ – *комутативність*

2) $(\forall a, b, c \in N_0)$ $(a+(b+c) = (a+b)+c)$ – *асоціативність* (Сума трьох цілих невід'ємних чисел не зміниться, якщо будь-які два доданки замінити їхньою сумою).

З комутативного та асоціативного законів додавання випливають *правила додавання числа до суми, суми до числа і суми до суми*.

Щоб додати число до суми або суму до числа, можна або знайти суму і до неї додати число, або додати це число до одного з доданків і до результату додати другий доданок.

Правила додавання є основою алгоритмів додавання. Так, щоб додати до 13 число 5, можна число 13 замінити сумою 10 + 3 і до трьох одиниць цієї суми додати п'ять одиниць:

13+5=(10+3)+5=10+(3+5)=10+8=18.

Теоретичною основою додавання багатоцифрових чисел є *правило додавання суми до суми*: $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c)$

Приклади застосування правил

12+23=(10+2)+(20+3)= (10+20)+(2+3)=30+5=35

203+49+17+11=(203+17)+(49+11)=220+70=280.

Властивості додавання та правила, що випливають з них, використовують для раціоналізації усних обчислень.

3) *Монотонність додавання для рівності:*
$(\forall a,b,c \in N_0)(a = b)\Leftrightarrow(a+c=b+c)$ (Якщо до обох частин рівності цілих невід'ємних чисел додати одне й те саме ціле невід'ємне число, то рівність не порушується).

На основі дії додавання дається *означення* відношення «менше»: *Число a менше числа b тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число c, що a+c=b.*

Цей спосіб порівняння цілих невід'ємних чисел більш зручний, ніж той, що був розглянутий раніше, наприклад 4 < 6, бо існує таке натуральне число 2, що 4 + 2 = 6.

4) *Монотонність додавання для нерівностей:*
$(\forall a,b,k \in N_0)(a<b)\Leftrightarrow(a+k<b+k)$.

5) *Адитивність додавання для рівностей:*
$(\forall a,b,c,d \in N_0)(a=b\wedge c=d)\Rightarrow(a+c=b+d)$.

6) *Адитивність додавання для нерівностей:*
$(\forall a,b,c,d \in N_0)(a<b\wedge c<d)\Rightarrow(a+c<b+d)$– нерівності одного змісту можна почленно додавати.

Нерівності протилежного змісту додавати почленно не можна!

2. На основі означення віднімання або за допомогою діаграм Ейлера - Венна можна довести такі ***правила***.

1) $(\forall a \in N_0)$ $(a - a = 0)$, $(A\backslash A = \varnothing)$;
2) $(\forall a,b \in N_0)((a - b)+b=a),((A\backslash B)\cup B=A)$;
3) $(\forall a,b \in N_0)((a+b) - b=a)$, $((A\cup B)\backslash B=A)$;
4) *правило віднімання від числа суми*:
якщо $a \geq b$, то $a -(b+c) = (a - b)-c$;
5) *правило віднімання числа від суми*:
якщо $a \geq c$ або $b \geq c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$;
6) $(\forall a,b,c \in N_0)$ $(a + (b - c) = (a + b) - c)$;
7) $(\forall a,b,c \in N_0)$ $(a \geq b)\Rightarrow a - (b - c) = (a - b) + c$;
8) *основна властивість різниці*: якщо зменшуване і від'ємник одночасно збільшити або зменшити на одне й те саме число, то різниця не зміниться: $(\forall a,b,c, k \in N_0)$ $(a - b=c)\Leftrightarrow ((a+k) - (b+k) =c)$.

3. *Властивості арифметичної дії множення*

1) *Існування та єдиність добутку:*$(\forall a, b \in N_0)(\exists c \in N_0)(a\cdot b = c)$.

Які б не були числа *a* і *b*, завжди існує число *c*, причому єдине, таке, що є їхнім добутком.

2) *Комутативність множення:* $(\forall a,b \in N_0)(ab = ba)$.

3) *Асоціативність множення:* $(\forall a,b,c \in N_0)(abc = (ab)c = a(bc))$.

Добуток трьох невід'ємних цілих чисел не зміниться, якщо будь-які два послідовні множники замінити їхнім добутком.

Наслідки з комутативної та асоціативної властивості множення.

1. $(\forall a,b,c,d \in N_0)(abc)d = (ad)bc = (bd)ac = \ldots$

Щоб помножити добуток на число або навпаки число на добуток, досить помножити на це число один із множників і результат помножити на інший множник і т.д.

2. $(\forall a,b,c,d \in N_0)(ab)(cd) = ((ac)b)d = (abc)d = abcd = \ldots$ Щоб помножити добуток на добуток, досить один з множників першого добутку помножити на будь-який множник другого добутку, знайдений результат помножити на інший множник з добутку і т. д.

3. $(\forall a,b,c,m \in N_0)\ (ab=c) \Leftrightarrow (amb=cm),\ m \in N_0$

Якщо один з множників збільшити (зменшити) в кілька разів, то й добуток відповідно збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів

4) *Розподільний закон множення відносно додавання та віднімання:*

$(\forall a,b,c \in N_0)(a+b)c = ac+bc,$ щоб помножити суму на число, досить помножити на це число кожний доданок і результати додати.

$(\forall a,b,c \in N_0,\ a \geq b)(a-b)c = ac-bc$

Розподільні закони встановлюють зв'язок множення з додаванням і відніманням. Читати їх треба як зліва направо, так і справа наліво. На основі цих законів розкривають дужки і виносять спільні множники за дужки.

5) *Монотонність множення:*

а)$(\forall a,b,c \in N_0)(a = b) \Rightarrow (ac = bc)$;

б) $(\forall a,b,c \in N_0)(a \leq b) \Leftrightarrow (ac \leq bc)$.

Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна помножити на одне й те саме число.

Наслідки:

1. $(\forall a,b,c,d \in N_0)\ (a = b \wedge c = d)(ac = bd)$;

2. $(\forall a,b,c,d \in N_0)(a < b$ і $c < d)(ac < bd)$.

На множині цілих невід'ємних чисел рівності та нерівності однакового змісту можна почленно перемножати.

4. *Властивості арифметичної дії ділення*

1. $(\exists a,b,c \in N)(a:b):c \neq a:(b:c)$ділення, як і віднімання, неасоціативне. *Наприклад*, (12:6):2 = 1, але 12 : (6:2) = 4.

2. $(\forall a,b \in N)(a=b) \Rightarrow (a:b=b:a)$ – ділення комутативне лише у випадку рівності діленого і дільника.

3. $(\forall a,b,c \in N)(a \vdots b \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a \pm b):c = a:c \pm b:c)$ – дистрибутивність ділення відносно додавання і віднімання.

4. $(\forall a,b \in N_0)(a<b \wedge a \vdots b) \Rightarrow (a=0)$.

5. $(\forall a,b,c \in N)(ac=bc \Rightarrow a=b)$.

6. $(\forall a,b,c \in N)(a:b=ac:bc)$; $(a:b=(a:c):(b:c))$ (частка не зміниться, якщо ділене і дільник помножиити або поділити на одне і те ж число).

7. *Ділення числа на добуток* :$(\forall a,b,d \in N)(a:(bd)=(a:b):d)$.

8. *Ділення добутку на число*:$(\forall a,b,c \in N)$ $((ab):c=(a:c)b)$.

9. *Ділення частки на число* $(\forall a,b,c \in N)((a:b):c=(a:c):b=a:(bc))$.

10. *Ділення числа на частку:* $(\forall a,b,c \in N)(a:(b:c)=(a:b)c=(ac):b)$.

11. *Множення числа на частку:*$(\forall a,b,c \in N)(a(b:c)=(a:c)b)$.

5. Властивості множини цілих невід'ємних чисел

1. Множина N_0 – *впорядкована*, оскільки відношення «менше» є відношенням строгого порядку на множині цілих невід'ємних чисел.

2. Множина N_0 – *утворює зростаючу послідовність* цілих невід'ємних чисел.

3. Множина N_0 – *обмежена зліва числом* 0.

4. Множина N_0 – *необмежена справа.*

5. Множина N_0 – *нескінченна*. ***<u>Не існує найбільшого натурального числа!</u>***

З теоретико-множинної точки зору нескінченність множини N_0 випливає з того, що між її елементами і множиною всіх парних чисел існує взаємно однозначна відповідність:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

6. Множина N_0 – *задовольняє принцип найменшого числа*: будь-яка сукупність її чисел має єдине найменше число.

7. Множина N_0 – *дискретна*.

За кожним числом безпосередньо слідує єдине число n' і кожне ціле невід'ємне число, крім нуля, безпосередньо слідуєлише за одним цілим невід'ємним числом. Отже, для жодної пари чисел n і n' не можна вказати ніякого третього числа x такого, що $n < x < n'$

Наведені властивості наочно підтверджуються за допомогою числового променя, початку якого відповідає число нуль, і, при вибраній одиниці масштабу, кожному натуральному числу відповідає єдина точка променя.

8. Множина N_0 – *зчисленна* ($N_0 \sim N$) – числа множини N_0 можна занумерувати).

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Які властивості має множина цілих невід'ємних чисел?

2. Записати за допомогою математичної символіки властивості арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення).

3. Сформулювати правило віднімання числа від суми та навести приклади його застосування в прийомах усних обчислень.

4. Обґрунтувати прийоми додавання: 1) 24 + 3; 2) 18 + 11; 3) 28 + 104 + 82 + 406.

5. Показати на прикладі, що додавати нерівності протилежного змісту неможна.

Завдання для аудиторної роботи

1. Записати комутативний і асоціативний закони додавання, дати їх тлумачення з теоретико-множинної точки зору.

2. Знайти суму зручним способом: 28 + 89 + 32 + 11; 135 + 13 + 25 + 67.

3. Як зміниться сума, якщо один із доданків збільшити на 2; кожен із доданків збільшити на 3?

4. Записати основні властивості множення, дати їх тлумачення з теоретико-множинної точки зору.

5. Назвати властивості множення, які використано: а) $26\cdot 15 = 26\cdot(3\cdot 5) = 26\cdot(5\cdot 3) = (26\cdot 5)\cdot 3$; б) $4\cdot 47\cdot 25 = 4\cdot 25\cdot 47 = (4\cdot 25)\cdot 47$.

6. Знайти числове значення виразу зручним способом:

а) $9\cdot 13 + 9\cdot 87$; б) $5\cdot(12+44)$; в) $62\cdot 103$. Пояснити, які властивості арифметичних дій використано.

7. Як зміниться добуток двох чисел, якщо один з множників збільшити на 6? збільшити у 2 рази?

8. Як зміниться частка, якщо: а) ділене і дільник помножити на одне і те ж число; б) не змінюючи діленого, дільник збільшити в k разів?

9. Користуючись формулою $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, обчислити усно:

а) $61\cdot 59$; б) $37\cdot 43$; в) $203\cdot 197$.

10. Обчислити зручним способом: а) 615 – (370 – 85); б) 530 – (220 – 17); в) (5375 – 28) – 75; г) (2728 + 137) – 728; д) 6051 – (51 + 345).

11. Значення якого виразу більше $a{:}b$ чи $(a\cdot b):b$? У скільки разів? Пояснити відповідь.

12. Обчислити зручним способом: а) $(105\cdot 88):11$; б) $(36\cdot 520):12$; в) $360\cdot(50:36)$; г) $120\cdot(8:3)$; д) $198000:(99\cdot 40)$; е) $54000:(27\cdot 25)$; є) $38000:(38:25)$; ж) 2050 : (205 : 4); з) $(7000:9)\cdot 18$; і) $(520:17)\cdot 34$; к) $(340:17):2$.

13. Довести, що добуток двох непарних чисел є числом непарним.

Завдання для самостійної роботи

14. Навести приклади застосування основних властивостей додавання та множення для усних обчислень.

15. Як зміниться сума, якщо кожен із доданків збільшити на 5?

16. Як зміниться різниця, якщо зменшуване і від’ємник збільшити на одне і те ж число?

17. Як зміниться добуток двох чисел, якщо: 1) кожний з множників збільшити у 3 рази; 2) один множник збільшити на 3?

18. Як зміниться частка, якщо: 1) не змінюючи дільника, ділене збільшити у t разів; 2) не змінюючи діленого, дільник зменшити у k разів?

19. Довести, що добуток двох парних чисел є число парне.

20. Обчислити зручним способом: а) 1200–(200 – 35); б) (2437+28) – 237; в) 1243 – (43 + 350); г) (548 – 17) – 48; д) (20 · 13 · 5) : 26; е) (72 · 45) : 36; є) 480 · (70 : 24); ж) 1320 : (4 · 330); з) 8400 : (84 : 5); і) (3000 : 7) · 21.

21. Висота яблуні 2 м, груша в a разів вища за яблуню, а слива в 4 рази нижча за грушу. Знайти висоту сливи. Скласти вираз за умовою задачі, обчислити його значення при $a = 2; 4$.

22. Якими способами можна знайти різницю: а) 11 – (3+1); б) (7 + 8) – 5; в) (17 – 3) – 5; г) 25 – (17 – 8) ?

23. Як зміниться різниця, якщо зменшуване і від'ємник одночасно зменшити на одне і те ж число? Відповідь обгрунтувати.

Завдання підвищеної складності

24. Дати теоретико-множинне тлумачення таких тверджень:

а) Щоб відняти від числа суму чисел, достатньо відняти від цього числа послідовно кожний доданок.

б) Щоб від різниці двох чисел відняти третє число, достатньо від зменшуваного відняти суму двох інших чисел.

в)Щоб відняти від числа a різницю чисел b і c, достатньо до даного числа a додати від'ємник c і від одержаного результату відняти зменшуване b; при $a > b$ можна відняти від числа a зменшуване b і до одержаного результату додати від'ємник c.

г) Щоб додати до числа a різницю $b - c$, достатньо додати до числа a зменшуване b і від одержаного результату відняти число c, або від даного числа a відняти число c і до одержаного результату додати число b.

3.3. АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ ПОБУДОВИ N_0

У аксіоматичній теорії множини цілих невід'ємних чисел, побудованій італійським математиком Джузеппе Пеано у 1891 році, за основне поняття взято відношення «безпосередньо слідувати за». Елемент, безпосередньо наступний за елементом a, позначають a'.

1. *Означення.* Множина N_0, для елементів якої встановлено відношення «безпосередньо слідувати за» та операції додавання і множення, що задовольняє аксіомам 1 – 8, називається множиною ***цілих невід'ємних чисел:***

Аксіома 1. У множині N_0 існує елемент(називають його нулем), який безпосередньо не слідує ні за яким елементом цієї множини:

$(\forall a \in N_0)\ (a' \neq 0)$.

Аксіома 2. За кожним цілим невід'ємним числом безпосередньо йде одне число – безпосередньо наступне число для даного числа:

$(\forall a \in N_0)(\exists! b \in N_0)(b = a')$.

Аксіома 3. Кожне ціле невід'ємне число, крім нуля, безпосередньо йде тільки за одним числом –попереднім:

$(\forall a,b\in N_0)\ (a'\neq 0)\wedge(a'=b'\Rightarrow a=b)$.

Аксіома 4 (аксіома індукції). Нехай множина M є підмножиною множини N_0 і відомо, що: а) нуль належитьM; б) з того, що a належитьM, випливає, що і a' належитьM. Тодімножина M збігається з множиною N_0:

$(M\subset N_0\wedge 0\in M\wedge(\forall a\in M\Rightarrow a'\in M)\Rightarrow M=N_0$.

Аксіома 5. $(\forall a\in N_0)(a+0=a)$.

Аксіома 6. $(\forall a,b\in N_0)(a+b'=(a+b)')$.

Аксіома 7. $(\forall a\in N_0)(a\cdot 0=0)$.

Аксіома 8. $(\forall a,b\in N_0)(a\cdot b'=ab+a)$.

Наслідок з аксіоми 8. $a+1=a'$

Тоді 1=0', 2=1', 3=2', 4=3'.

При аксіоматичній побудові теорії цілих невід’ємних чисел віднімання визначається як операція, обернена додаванню, а ділення – як операція, обернена множенню.

Аксіоматичний підхід до теорії натуральних чисел не розглядається ні в початковій, ні в середній школі. Проте, ті властивості відношення «безпосередньо слідувати за», які знайшли відображення в аксіомах 1 – 4, є предметом вивчення у початковій школі і використовуються у розв’язуванні задач. Уже в першому класі в процесі розгляду чисел першого десятка з’ясовується, як може бути отримано кожне число. У цьому широко використовуються поняття «слідує» і «передує». Кожне нове число із самого початку виступає як продовження вивченого відрізка натурального ряду чисел. При такому підході створюються умови для того, щоб діти помітили деякі загальні властивості чисел натурального ряду: не тільки дане, що розглядалося на цьому уроці число, але і взагалі будь-яке натуральне число може бути одержано додаванням 1 до того числа, яке зустрічається при лічбі перед ним, або відніманням 1 з числа, яке йде при лічбі відразу після нього; будь-яке число на 1 більше, ніж попереднє. Отже, вже в початковій школі учні переконуються в тому, що за кожним числом йде наступне, і притому тільки одне, що натуральний ряд чисел нескінченний тощо.

2. Метод математичної індукції. Аксіома 4 (з аксіоматики Пеано) лежить в основі *принципу математичної індукції*: якщо твердження $A(n)$ зі змінною n істинно для $n=0$ і з того, що воно істинне для $n=k$ (k – довільне натуральне число), випливає, що воно істинне і для наступного числа $n=k+1$, то твердження $A(n)$ істинне для будь-якого цілого невід’ємного числа n.

Використання принципу математичної індукції для доведення математичних фактів називається ***методом математичної індукції***.

Отже, доведення *методом математичної індукції* складається з таких етапів:

1) доводять, що твердження $A(n)$ істинно для $n = 0$, тобто що істинне висловлення $A(0)$;

2) припускають, що твердження $A(n)$ істинне для $n = k$ і, *виходячи з цього припущення*, доводять, що твердження $A(n)$ істинно і для $n = k + 1$, тобто, що істинний вислів $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

3) на основі принципу математичної індукції роблять висновок, що твердження $A(n)$ виконується для будь-якого числа $n \in N_0$

Принцип математичної індукції замінює нескінченний ланцюг умовиводів від n до n', коли n пробігає всю множину N_0.

Зустрічаються твердження $T(n)$, які виконуються для всіх n, починаючи тільки з деякого n. Для доведення таких тверджень використовують ***узагальнений принцип математичної індукції***:

якщо твердження $T(n)$ виконується для деякого натурального числа m і з того, що воно виконується для $k \geq m$, випливає, що воно виконується для k', то твердження $T(n)$ виконується для будь-якого числа $n \in N_0$, $n \geq m$.

Приклад

Довести методом математичної індукції, що для будь-якого натурального числаn істинна рівність: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Доведення

1) Перевіримо істинність даної рівності для $n = 1$. При $n = 1$ ліва частина рівності складається з одного члена, рівного 1, а права частина рівна 1^2 (тобто теж 1). Оскільки 1 = 1, то для $n = 1$ дана рівність істинна.

2) Припустимо, що дана рівність істинна для $n = k$, тобто що $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$. Виходячи з цього припущення, доведемо, що воно істинне і для $n = k+1$, тобто $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ – істинна рівність.

Перетворимо ліву частину останньої рівності.

$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=$ [врахуємо, що $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ за припущенням] = $k^2+2k+1=(k+1)^2$.

1) За узагальненим принципом математичної індукції твердження доведено.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:*порядкового натурального числа; суми, різниці, добутку та частки натуральних чисел в аксіоматичній теорії.

2. В якому випадку число a менше числа b?

3. Чи існує найбільше натуральне число? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сформулювати принцип математичної індукції (узагальнений принцип математичної індукції).

Завдання для аудиторної роботи

1. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що для будь-якого натурального числа n істинні рівності:

1) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

2. Використовуючи означення додавання, віднімання, множення і ділення цілих невід'ємних чисел з аксіоматичної точки зору, виконати дії: а) 4 + 3; б) 5 + 4; в) 12 – 3; г) 8 – 5; д) 4·3; е) 5·4; є) 12 : 6; ж) 15 : 3.

3. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами та результатами дій:
а) 360 + (337 – x) = 380; б) 2385 – (68 + x) = 380; в) (x – 17) – 138 = 135;
г) 2385 – (2068 – x) = 380; д) 1034 + (x – 35) = 2069; е) (x + 12) · 15 = 255;
є) 21·(x – 3) = 105; ж) (33 – x) : 2 = 13; з) 21 : (x + 2) = 7; і) 44 : (6 – x) = 11.

Завдання для самостійної роботи

4. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що для будь-якого натурального числа істинні рівності:

1) $1+2+2^2+…+2^{n-1}=2^n-1$;

2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+…+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

5. Використовуючи означення арифметичних дій над цілими невід'ємними числами з аксіоматичної точки зору, обчислити значення виразів: а) 3+5; б) 6+4; в) 10 – 5; г) 13 – 7; д) 7·4; е) 5·3; є) 28:7; ж) 35:5.

6. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами та результатами дій:а) (x + 11)·12 = 144; б) 31·(x – 2) = 62; в) (23 – x) : 2 = 10; г) (x – 13):3=10; д) 42:(x+1)=14; е) 55·(7 – x)=110.

Завдання підвищеної складності

7. Починаючи з якого натурального числа n, виконується нерівність: *а*) $3^n>2^n+7n$; б)$(1+h)^n>1+nh$, при $h>-1$.

8. Довести, що n^3+5n ділиться на 6 при будь-якому натуральному n.

9. Довести методом математичної індукції формули для обчислення A^n_m, C^n_m, P_n.

10. Нехай елементи a, b, c, d, k, l є елементами множини точок, розміщених на колі так, що за a безпосередньо слідує b, за b – c, за c – d, за d – k, за k – l, за l – a. Які аксіоми Пеано виконуються на цій множині? Чи може дана множина бути інтерпретацією множини натуральних чисел?

11. Довести методом математичної індукції: а) формулу для обчислення загального члена арифметичної та геометричної прогресії; б) формулу суми n членів геометричної прогресії.

РОЗДІЛ IV. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

4.1. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

1. ***Система числення (нумерація)*** – сукупність способів позначення та найменування натуральних чисел.

Кількість цифр, що використовується, називається ***основою системи числення***. Місце кожної цифри в числі називається ***позицією.***

Система числення, в якій значення цифри не залежить від її положення в записі числа, називається ***непозиційною***.

Непозиційна система числення, яка збереглася до нашого часу і дуже широко використовується (для позначення століть, нумерації розділів книг, на циферблатах годинників тощо) є римська система, в якій для запису чисел використовуються латинські букви (I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000).

Приклади

1) CCXXXII = 232;

2) На пам'ятнику Петру I в Санкт-Петербурзі викарбувано MDCCLXXXII – рік відкриття пам'ятника в римській системі числення. MDCCLXXXII = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 3·10 + 2 = 1782 рік.

Система числення, в якій значення цифри залежить від її положення в запису числа, називається ***позиційною***.

У римській системі вже були зародки позиційного принципу.

2. ***Непозиційні і позиційні системи числення*: *історична довідка***

Сучасний запис чисел з'явився поступово. Спочатку виникла ієрогліфічна писемність, в якій кожне слово позначалося певною фігурою, значком. Найдавнішою є єгипетська ієрогліфічна нумерація, яка з'явилася 5000 років тому. Відомі також фінікійська, сірійська, пальмірська ієрогліфічні нумерації. З часом виникло алфавітне позначення чисел у старогрецькій, слов'янській, єврейській, сірійській, арабській, грузинській, вірменській нумераціях. У старогрецькій нумерації для позначення чисел використовувалося 27 букв алфавіту (по 9 букв для позначення одиниць, десятків, сотень). *Наприклад*, число 444 набувало вигляду $\overline{\nu\mu\delta}$. Для чисел, які мали більше розрядів, застосовували спеціальні значки. Слов'янське алфавітне позначення чисел виникло у X столітті за зразком грецького. Були використані ті букви з кирилиці, які відповідали буквам грецького алфавіту. Така нумерація використовувалася на Русі до початку XVII ст.

Позиційна десяткова нумерація була винайдена індійськими математиками близько 1500 років тому. Позначення будь-якого числа лише за допомогою десяти цифр є геніальним відкриттям у світовій науці. На Русі така система знайшла застосування починаючи з «Арифметики» Л. Магницького, виданої у 1703 році.

3. ***Запис чисел у десятковій системі числення***

Основою десяткової системи числення є число 10. Отже, для запису будь-якого числа використовується десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Кожне натуральне число *x*можна записати у загальному вигляді: $x = \overline{a_n ... a_1 a_0}_{(p)}$ або у вигляді розкладу за степенями 10:

$$x=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+...+a_1\cdot10^1+a_0\cdot10^0,\ (a_n\neq 0),$$

де коефіцієнтами розкладу є числа: $a_n, a_{n-1, ...,} a_{1,} a_0$ (послідовні цифри в записі числа). Такий розклад називається ***десятковим***.

Теорема. Десятковий запис будь-якого натурального числа існує, причому єдиний.

Показник степеня 10 – це номер позиції в записі числа. Кожна цифра означає відповідну кількість розрядних одиниць. $10^0 = 1$ (1 – одиниця першого розряду, 10 – одиниця другого розряду, 10^2 – одиниця третього розряду і т. д.). Багатоцифрове число розбивають на класи по три цифри справа наліво: перший клас – клас одиниць, другий – клас тисяч, третій – клас мільйонів і т. д. У кожному класі є одиниці, десятки та сотні (табл. 1).

Наприклад, у числі 675 348 у класі тисяч є 5 одиниць тисяч, 7 десятків тисяч, 6 сотень тисяч. У цьому числі всього 675 348 одиниць, 67 534 десятки, 6 753 сотні, 675 тисяч, 67 десятків тисяч, 6 сотень тисяч.

Таблиця 1

Таблиця перших трьох класів та розрядів

III клас – МІЛЬЙОНІВ			II клас – ТИСЯЧ			I клас – ОДИНИЦЬ		
IX розряд	VIII розряд	VII розряд	VI розряд	V розряд	IV розряд	III розряд	II розряд	I розряд
Сотні мільйонів	Десятки мільйонів	Одиниці мільйонів	Сотні тисяч	Десятки тисяч	Одиниці тисяч	Сотні (одиниць)	Десятки (одиниць)	Одиниці (одиниць)

Приклад

Подати десятковий запис числа 130 678.

Розв'язання

Запишемо розклад числа 130 678 за степенями 10. Одержимо: $130678=1\cdot10^5+3\cdot10^4+0\cdot10^3+6\cdot10^2+7\cdot10^1+8\cdot10^0$. Оскільки $10^0 = 1$, то можна записати: $130678=1\cdot10^5+3\cdot10^4+0\cdot10^3+6\cdot10^2+7\cdot10^1+8$.

4. ***Запис чисел у позиційних системах числення, відмінних від десяткової.***

Нехай p – основа системи числення, $p \geq 2$.

Теорема. Будь-яке натуральне число можна зобразити в довільній позиційній системі числення, причому єдиним способом.

Записом натурального числах у p-й системі числення називається його подання у вигляді: $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 \cdot p^1 + a_0$ або $x = \overline{a_n ... a_1 a_{0(p)}}$, де $a_n ... a_0$ – цифри даного числа, які набувають значень 0, 1, 2,..., p – 1, $a_n \neq 0$. Числа 1, p^1, p^2, ..., p^{n-1}, p^n *називають розрядними одиницями* 1-го, 2-го, ..., $(n+1)$-го розрядів.

Приклади

Записати числа $1001_{(5)}$, $1111_{(20)}$, $101101101_{(2)}$ у вигляді розкладу за степенями основи.

Розв'язання

1)$1001_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1$;

2) $1111_{(20)} = 1 \cdot 20^3 + 1 \cdot 20^2 + 1 \cdot 20^1 + 1$;

3) $101101101_{(2)} = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$.

5. *Перехід від запису чисел в одній системі числення до запису в іншій системі*

1) Перехід від запису чисел в р-й системі числення до запису в 10-й системі числення.

Нехай у системі числення з основою p дано число $x = \overline{a_n ... a_1 a_0}_{(p)}$, де $a_n, ..., a_0$ – цифри цього числа. Дане число можна подати у вигляді:

$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_0 \cdot$

Якщо знайти числове значення виразу в10-й системі, то одержимо число в десятковій системі числення.

Цей алгоритм є універсальним для переведення з будь-якої системи числення в десяткову.

Наприклад, так можна перевести число $4A3F$ з 16-кової системи в десяткову. У 16-ковій системі числення: цифри від 0 до 15. 10=A, 11=B, 12 = C, 13 = D, 14=E, 15 = F. За означенням, $4A3F = 4 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + F$. При заміні A на 10, а F на 15, виходить $4 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 19007$.

Отже, $4A3F_{(16)} = 19007$.

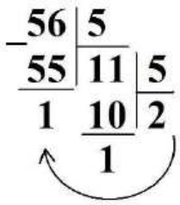
2) Перехід від запису чисел в 10-й системі до запису в р-й системі числення.

Є різні способи переведення чисел з десяткової системи числення в іншу. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Нехай потрібно перевести число 56 з десяткової в п'ятіркову систему.

1-й спосіб. Розкладемо число 56 за степенями числа 5. Одержимо: $56 = 2 \cdot 25 + 5 + 1 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 1 = 211_{(5)}$. Цифрами числа в п'ятірковій системі є коефіцієнти розкладу (2, 1, 1).

2-й спосіб. Для переведення чисел з десяткової системи числення в іншу систему використовується дія ділення в стовпчик. Запишемо число 56 у п'ятірковій системі. Поділимо число 56 на 5. Одержимо неповну частку 11 та остачу 1. Число 11 більше за 5. Ділимо 11 на 5. Одержуємо неповну частку 2 та остачу 1. Неповна частка 2 менша за 5, тому процес ділення завершено. Цифрами числа в 5 – й системі числення є остання неповна частка та одержані остачі. Щоб одержати шукане число достатньо записати останню частку, тобто 2, і приписати до неї в зворотному порядку всі одержані в процесі ділення остачі. Отже, $56 = 211_{(5)}$.



Отже, перехід від десяткової системи числення до системи числення з основою *p* може здійснюватися за таким ***алгоритмом:***

1**.** Поділити дане число на *p*, зафіксувати остачу від ділення (число від 0 до $p - 1$) і неповну частку.

2. Якщо неповна частка більша за *p*, то поділити неповну частку на *p*, продовжуючи фіксувати остачу від ділення. Процес ділення неповних часток продовжувати до тих пір, поки частка не стане меншою за *p*.

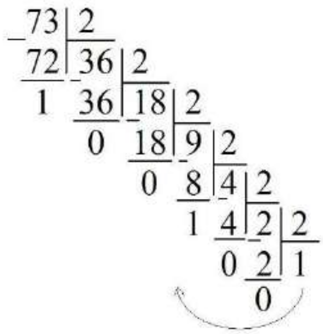
3. Остання частка і всі одержані остачі є цифрами вихідного числа в системі числення з основою *p*. Виписавши всі знайдені цифри в зворотному порядку (починаючи з останньої частки), ми і одержимо шукане число.

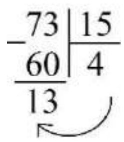
Приклад

Перевести число 73 з десяткової системи в двійкову, п’ятнадцятіркову.

Розвязання

Застосуємо алгоритм послідовного ділення:





Отже, $73 = 1001001_{(2)}$, $73 = 4(13)_{(15)}$.

Перехід від запису чисел в p-й системі числення в систему числення з основою q.

Один із способів переведення

Дане натуральне число $a_{(p)}$ записується в десятковій системі, а потім переводиться з десяткової системи в систему з основою *q*.

Приклад

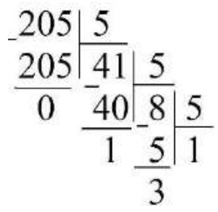
Число $412_{(7)}$ записати в системі числення з основою 5.

Ров'язання

1) Переведемо $412_{(7)}$ у десяткову систему числення, для цього запишемо розклад за основою 7 і виконаємо обчислення:

$412_{(7)}= 4\cdot 7^2+1\cdot 7+2=196+7+2= 205.$

2) Переходимо від десяткової системи до системи з основою 5:



Одержимо: $205 = 1310_{(5)}$.

Відповідь: $412_{(7)}= 1310_{(5)}$.

6. ***Арифметичні операції над числами в недесяткових системах числення***

Арифметичні дії над числами в позиційних системах числення з основою *p* ($p \neq 10$) виконуються за такими ж правилами, як і у десятковій системі числення. При цьому користуються таблицями додавання і множення у системі числення з основою *p,* які попередньо складаються.

Складемо таблиці додавання у системах з основами 2; 5.

Якщо ***p*** **= 2**, то для запису чисел використовуються дві цифри: **0, 1**. Можливі суми однозначних чисел:

$0 + 0 = 0,$

$0 + 1=1 + 0 = 1_2,$

$1 + 1 = 2 = 1\cdot 2 + 0 = 10_2.$

Якщо ***p*** **= 5**, то для запису чисел використовуються п'ять цифр: **0, 1, 2, 3, 4.**

Можливі суми однозначних чисел:

$0 + 0 = 0,$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1_{(5)},$

$0 + 2 = 2 + 0 = 2_{(5)},$

$0 + 3 = 3 + 0 = 3_{(5)},$

$0 + 4 = 4 + 0 = 4_{(5)}$

$1 + 1 = 2_{(5)},$

$1 + 2 = 2 + 1 = 3_{(5)},$

$1 + 3 = 3 + 1 = 4_{(5)},$

$1 + 4 =4 + 1= 5 =1\cdot 5 + 0 =10_{(5)};$

$2 + 2 = 4_{(5)},$

$2 + 3= 3+ 2 = 5 = 1\cdot 5 + 0 = 10_{(5)};$

$2 + 4= 4+ 2 = 6 = 1\cdot 5 + 1 = 11_{(5)};$

$3 + 3 = 6 =1\cdot 5 + 1 = 11_{(5)};.$

$3 + 4 = 4 + 3 = 7 =1\cdot 5 + 2 = 12_{(5)};$

$4 + 4 = 8 =1\cdot 5 + 3 = 13_{(5)}.$

Таблиці додавання в двійковій та п’ятірковій системах числення можна подати в такому вигляді:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

У загальному вигляді таблиця додавання в системі числення з основою p має вигляд:

+	1	2	3	…	p–1
1	2	3	4	…	10
2	3	4	5	…	11
3	4	5	6	…	12
….	….	….	….	…	….
p –1	10	11	12	…	1(p–1)

Приклад

Знайти суму $245_{(6)} + 434_{(6)}$.

Розв’язання

Додавання здійснюємо по розрядах так, як і в десятковій системі числення. Якщо є таблиця додавання, то нею користуємося. Якщо немає, то суму розрядних одиниць знаходимо в десятковій системі і переходимо до заданої системи. Якщо при цьому отримали двозначне число, то одиниці другого розряду додаємо до одиниць вищого розряду. Додаємо стовпчиком.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 245_{(6)} \\ 434_{(6)} \end{array} \\ \hline 1123_{(6)} \end{array}$$

$5 + 4 = 9 = 1\cdot 6 + 3 = 13_{(6)}$;

$1 + 4 + 3 = 8 = 1\cdot 6 + 2 = 12_{(6)}$;

$1 +2 + 4 = 7 = 1\cdot 6 + 1 = 11_{(6)}$.

Отже, $245_{(6)} + 434_{(6)} = 1123_{(6)}$.

Віднімання чисел з основою p теж здійснюємо по розрядах. Якщо різниця розрядних одиниць не існує, то беремо одну одиницю вищого розряду, роздробляємо її у p одиниць нижчого розряду і додаємо отримане число до одиниць цього розряду. При відніманні користуємося таблицею додавання у системі числення з основою *p* або використовуємо алгоритм переходу від запису числа в десятковій системі числення до недесяткової.

Приклад

Знайти різницю $243_{(5)} – 154_{(5)}$.

Розв'язання

Від числа 3 не віднімається число 4. Беремо одну одиницю другого розряду, роздробляємо її у 5 одиниць першого розряду і додаємо 5 до 3, (5 + 3 = 8, 8 – 4 = 4), 4 записуємо у першому розряді. У другому розряді зменшуваного стало 3, від 3 не віднімається 5, діємо аналогічно: 5 + 3 = 8, 8 – 5 = 3. Число 3 записуємо у другому розряді різниці, у третьому розряді зменшуваного одержуємо 1 (1 – 1=0). Різницею є двозначне число $34_{(5)}$.

$$\begin{array}{r} 243_{(5)} \\ -\,154_{(5)} \\ \hline 34_{(5)} \end{array}$$

Отже, $243_{(5)} – 154_{(5)} = 34_{(5)}$.

Множення многозначних чисел в системі числення з основою *p* виконують за правилами, аналогічними правилам множення чисел в десятковій системі числення з використанням таблиць множення і додавання однозначних чисел у *p-й* системі числення.

Таблиця множення однозначних чисел в системі числення з основою *p* має вигляд:

×	1	2	…	*p* – 1
1	1	2	…	*p* –1
2	2	4	…	1(*p* –2)
….	….	….	…	….
p–1	*p* –1	1(*p*– 2)	…	(*p*–2)1

Складемо таблицю множення для системи числення з основою *p* = 5. Для запису чисел в системі числення з основою *p* = 5 використовуються чотири цифри: 0, 1, 2, 3, 4. Можливі добутки:

$1 \cdot 1 = 1_{(5)}$; $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2_{(5)}$; $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = 3_{(5)}$; $1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 4_{(5)}$

$2 \cdot 2 = 4_{(5)}$; $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 = 1 \cdot 5 + 1 = 11_{(5)}$; $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8 = 1 \cdot 5 + 3 = 13_{(5)}$;

$3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 5 + 4 = 14_{(5)}$; $3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 5 + 2 = 22_{(5)}$;

$4 \cdot 4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1 = 31_{(5)}$.

Таблицю множення можна подати в такому вигляді:

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22

4	4	13	22	31

Приклад

Знайти добуток $43_{(5)} \cdot 34_{(5)}$.

Розв'язання

Для знаходження добутку використовуємо таблиці множення і додавання в системі числення з основою $p = 5$ або виконуємо множення аналогічно, як і в десятковій системі, з наступним переведенням проміжних добутків у систему з основою p.

Множимо стовпчиком, $43_{(5)}$ множимо на $4_{(5)}$:
$3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 5 + 2 = 22_{(5)}$. Число 2 пишемоу неповному добутку і 2 запам'ятовуємо.
$4 \cdot 4 = 16$, $16 + 2 = 18 = 3 \cdot 5 + 3 = 33_{(5)}$. Отримали число $332_{(5)}$ – це перший неповний добуток.

Множимо $43_{(5)}$ на 3 одиниці другого розряду:
$3 \cdot 3 = 9 = 1 \cdot 5 + 4 = 14_{(5)}$. Число 4 пишемо, 1 запам'ятовуємо.
$4 \cdot 3 = 12$, $12 + 1 = 13 = 2 \cdot 5 + 3 = 23_{(5)}$. Отримали число $234_{(5)}$ – це другий неповний добуток.

Виконавши додавання, отримаємо результат: $3222_{(5)}$.

$$\begin{array}{r} \times\; 43_5 \\ 34_5 \\ \hline 332 \\ +\;234 \\ \hline 3222_5 \end{array}$$

Отже, $43_{(5)} \cdot 34_{(5)} = 3222_{(5)}$

Ділення можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Ділене і дільник, подані з основою p, записуємо у десятковій системі числення, виконуємо ділення і частку переводимо в систему p.

Другий спосіб

Використовуємо алгоритм ділення кутом, таблиці додавання і множення у системі числення з основою p.

Приклад

Знайти частку $143_{(5)} : 32_{(5)}$.

Розв'язання

Перший спосіб

Перейдемо до основи 10:

$143_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 3 = 25 + 20 + 3 = 48$.

$32_{(5)} = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$.

Виконаємо ділення: 48 : 17 = 2 (ост. 14).

Перейдемо до основи 5:

неповна частка $2 = 2_{(5)}$, остача $14 = 2 \cdot 5 + 4 = 24_{(5)}$.

Отже, $143_{(5)} : 32_{(5)} = 2_{(5)}$(ост. $24_{(5)}$).

Другий спосіб

Ділення здійснюємо кутом, як і в десятковій системі числення. Прикидка показує, що неповною часткою є число однозначне.

$$\begin{array}{r|l} -143_5 & 32_5 \\ \underline{114} & 2 \\ 24 & \end{array}$$

Отже, $143_{(5)} : 32_{(5)} = 2_{(5)}$ (ост.$24_{(5)}$).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. *Дати означення*: системи числення; позиційної системи числення; непозиційної системи числення; запису цілого невід'ємного числа x у p-й системі числення; запису цілого невід'ємного числа x у 10-й системі числення.

2. Як виглядає в римській нумерації поточний рік?

3. Якими цифрами записуються числа у шіснадцятірковій системі числення? У двійковій системі числення?

4. Скільки цифр для запису числа існує у п'ятірковій системі числення? У двадцятірковій системі числення?

5. Який алгоритм переходу від запису чисел в p-й системі числення до запису в 10-й системі числення?

6. Який алгоритм переходу від запису чисел в 10-й системі до запису в p-й системі числення?

7. Який алгоритм переходу від запису чисел в p-й системі числення в систему числення з основою q?

8. Записати алгоритми арифметичних операцій над цілими невід'ємними числами у десятковій системі числення, а саме: 1) алгоритм додавання багатоцифрових чисел; 2) алгоритм віднімання багатоцифрових чисел; 3) алгоритм множення багатоцифрових чисел; 4) алгоритм ділення цілого невід'ємного числа на натуральне.

Завдання для аудиторної роботи

Десяткова система числення

1. Замінити суми коротким записом:

а) $2\cdot10+6$;

б) $5\cdot10^2+6\cdot10+1$;

в) $8\cdot10^3+7\cdot10^2+4\cdot10+5$;

г) $9\cdot10^3+7\cdot10^2+9$;

д) $5\cdot10^5+7\cdot10^3+3$;

2. Записати число, в якому: а) x десятків і одна одиниця; б) 4 десятка і x одиниць; в) y десятків і n одиниць.

3. Скільки в числі 2346580 всього: а) одиниць; б) одиниць тисяч; в) десятків, сотень, сотень тисяч; г) одиниць мільйонів?

4. Цифра десятків у запису двоцифрового числа втричі більша цифри одиниць. Якщо ці цифри переставити, то отримаємо число, менше заданого на 36. Знайти це число.

5. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 16. Якщо з цього числа відняти число, що записане тими ж цифрами, але взятими в зворотному порядку, то отримаємо 18. Знайти це число.

6. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо до цього числа додати подвоєне число, що записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 141. Знайти двоцифрове число.

7. Обчислити раціональним способом значення виразів і пояснити, які закони множення були при цьому використані: а) $46 \cdot 1001$; б) $99 \cdot 32$; в) $4 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 25$.

8. Обґрунтувати спосіб множення:

а) $13 \cdot 64=26 \cdot 32=52 \cdot 16=104 \cdot 8=208 \cdot 4=416 \cdot 2=832 \cdot 1=832$;

б) $24 \cdot 17=24 \cdot 16+24=48 \cdot 8+24=96 \cdot 4+24=192 \cdot 2+24=384 \cdot 1+24=384+24=408$.

9. Використовуючи спосіб множення, описаний у попередній вправі, знайти значення добутку: а) $23 \cdot 16$; б) $451 \cdot 8$; в) $91 \cdot 12$.

Запис чисел в позиційних системах числення, відмінних від десяткової

10. З’ясувати всі непорозуміння, що зустрічаються у вірші:

“Ей было 1100 лет.
Она в 101 класс ходила.
В портфеле по 100 книг носила.
Всё это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И 10 загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И 10 тёмно - синих глаз
Оглядывали мир привычно.
Но станет всё совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ”

11. Які цифри можна використати у вісімковій, шіснадцятірковій, двадцятірковій системі числення?

12. Скільки цифр має система числення з основою *p?*

13. Як запишеться *p* одиниць у системі числення з основою *p?*

14. Скільки одиниць містить найбільше однозначне число у десятковій системі числення; у двійковій системі числення; у системі числення з основою *p?*

15. Замінити суми коротким записом:

а) $7 \cdot 8^2+3 \cdot 8+2$;

б) $8 \cdot 9^4+7 \cdot 9^3+2 \cdot 9+4$;

в) $1 \cdot 2^5+1 \cdot 2^2+1$;

г) $3 \cdot 5^4+2 \cdot 5^3+3 \cdot 5+1$.

16. Записати у десятковій системі число: а)$346_{(8)}$; б) $111101_{(2)}$; в)$424_{(5)}$; г) $212_{(3)}$; д) $231_{(4)}$.

17. Записати числа від 0 до 10: а) у двійковій системі числення; б) у трійковій системі числення; в) у п'ятірковій системі числення.

18. Записати у вісьмірковій системі числення число 985.

19. Записати у двійковій системі числення число 27.

20. Порівняти числа: а)$131_{(8)}$ і $141_{(5)}$; б) $312_{(4)}$і $83_{(9)}$.

Операції над числами у позиційних системах числення

21. Скласти таблицю додавання для трійкової системи числення.

22. Скласти таблицю множення для шестіркової системи числення.

23. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у п'ятірковій системі числення: а) 24+43; б) 423+113; в)321 – 133; г) 412 – 223.

24. Перевірити чи правильно виконані дії у трійковій системі числення: а)1202+21=2000; б) 2101 – 211=1120.

25. Серед рівностей вказати істинні: а)$10_{(2)}+11_{(2)}=101_{(2)}$; б)$101_{(2)}+110_{(2)}=1011_{(2)}$.

26. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у трійковій системі числення: а) $121\cdot 2$; б) $2112\cdot 12$; в) $201\cdot 21$.

27. Знайти добуток чисел у двійковій системі числення: а) $1001\cdot 11$; б)$110\cdot 101\cdot 1011$.

28. Виконати ділення: а) $2134_{(5)}:12_{(5)}$; б) $1022_{(3)}:12_{(3)}$.

Завдання для самостійної роботи

Десяткова система числення

26. Скільки в числі 4563278760: а) одиниць; б) одиниць тисяч; в) десятків; д) сотень; є) сотень тисяч; ж) одиниць мільйонів?

27. Подати число у вигляді суми степенів числа 10: а) 56498; б) 305; в) $\overline{abc}$.

28. Двоцифрове число закінчується цифрою 3. Якщо суму його цифр помножити на 4, то отримаємо число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Знайти двоцифрове число.

29. У двоцифровому числі десятків у три рази більше, ніж одиниць. Якщо між цифрами поставити цифру 0, то число збільшиться на 540. Знайти двоцифрове число.

30. У трицифровому числі десятків на один більше, ніж одиниць, і сотень на одну більше, ніж десятків. Якщо до цього числа додати число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 444. Знайти це число.

31. Знайти двоцифрове число, в якому число десятків у 3 рази більше числа одиниць. Якщо цифри цього числа переставити, то отримане число буде менше шуканого на 54.

32. Різниця між найбільшим трицифровим числом і задуманим у 2 рази більша різниці між задуманим числом і найбільшим двоцифровим числом. Знайти задумане число.

Запис чисел в позиційних системах числення

33. Перевести вісьміркове число 7071 у десяткову систему числення.

34. Перевести числа 111010 і 11111100 з двійкової у десяткову систему числення.

35. Записати числа $7434_{(8)}$, $3524_{(6)}$, $2435_{(7)}$ у десятковій системі числення.

36. Записати у вісьмірковій системі числення число: а) 74; б) 1129.

37. Записати у двійковій системі числення число: а) 40; б) 120.

38. Записати у трійковій системі числа: 17, 28, 116.

39. Порівняти числа а) $157_{(8)}$ і $213_{(4)}$; б)$111_{(2)}$ і $31_{(4)}$.

Операції над числами у позиційних системах числення

40. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у шестірковій системі числення: а) 2314+2104; б) 41 – 23; в) 4412 – 314.

41. Серед рівностей вказати істинні: а) $10001_{(2)}+10101_{(2)}=100100_{(2)}$; б) $1011_{(2)}-1001_{(2)}=10_{(2)}$.

42. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у семірковій системі числення: а) 54 + 45; б) 456 + 323; в) 4514 + 6304;
г) 51 – 25; д) 6612 – 5434.

43. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у п'ятірковій системі числення: а) 1312 · 4; б) 3112 · 3; в) 2141·24

44. Знайти значення виразу, складеного з чисел, що записані у вісьмірковій системі числення: а) 372 · 4; б) 3645·52.

45. Виконати ділення: а) $1001_{(2)} : 11_{(2)}$; б)$731_{(8)} : 13_{(8)}$.

Завдання підвищеної складності

46.Дешифрувати шіснадцятіркові числа, перетворивши їх у десяткові: 15, *A*6, 1*F*5, 63, 3*D*9.

47.У якій системі числення правильна рівність: а) $4=10_x$, б)$8=11_x$ в) $9=100_x$,

48.Виконати дії: а) $21_{(3)}\cdot 12_{(3)}+11_{(3)}$; б)$504_{(8)}+210_{(5)}-110011_{(2)}$.

49.Знайти значення виразу: а) $3012_{(5)}+2324_{(5)}-1413_{(5)}$; б) $6325_{(8)}+456_{(8)}+157_{(8)}$; в) $76_{(8)}\cdot 64_{(8)}-57_{(8)}\cdot 37_{(8)}$; г) $23213_{(5)}\cdot 32_{(5)}-113_{(5)}\cdot 3_{(5)}$.

50.Знайти основу системи числення: а) $306_{(x)}+124_{(x)}=220$; б) $342_{(x)}+147_{(x)}=329$.

4.2. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

1. Ціле невід'ємне число ***a ділиться*** на ціле невід'ємне число ***b***, якщо існує таке ціле невід'ємне число ***q***, що ***a = bq***. *Позначення.* $a \vdots b$ (говорять: ***a*** знаходиться у відношенні подільності до ***b***).

Приклади

1) $25 \vdots 5$ тому, що $(\exists 5 \in N)(25 = 5 \cdot 5)$ (існує натуральне число $q = 5$, таке, що при множенні на $b = 5$ в результаті дає 25).

2) $18 \vdots 3$ тому, що $(\exists 6 \in N)$ $(18 = 3 \cdot 6)$(існує натуральне число $q = 6$, таке, що при множенні на $b = 3$ в результаті дає 18).

Відношення подільності є відношенням нестрогого порядку, оскільки воно рефлексивне, транзитивне і симетричне лише у випадку, коли $a = b$.

2. Якщо $a \vdots b$, то b називають ***дільником*** числа a, а число a − ***кратним*** числу b.

Приклади

1) Число 3 − дільник 18; 18 − кратне числу 3.

2)Число 0 є кратним будь-якому цілому невід'ємному числу.

3. Натуральне число, що більше за 1 і ділиться тільки на одиницю і само на себе, називається ***простим***. Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається ***складеним***.

Приклади

2, 3, 5, 7, 11, 13, …− прості числа.

4, 6, 8, 9, − складені числа.

Число 1 не відноситься ні до простих чисел, ні до складених.

Число 0 має нескінченну кількість дільників і також не відносять ні до простих, ні до складених чисел.

Висновок. Множину N_0 цілих невід'ємних чисел можна розбити на 4 класи:

1) клас, який містить лише 0 (має нескінченну кількість дільників);
2) клас, який містить лише 1 (має лише один дільник) ;
3) клас простих чисел (які мають рівно два дільники) ;
4) клас складених чисел (які мають більше двох дільників).

Теорема Евкліда. Не існує найбільшого натурального простого числа.

4. ***Подільність суми, різниці, добутку***

Теорема 1 (достатня умова подільності суми). Якщо кожний доданок ділиться на натуральне число, то їхня сума теж ділиться на це число.

$(\forall a,b \in N_0 \wedge c \in N)\ (a \vdots c) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow ((a + b) \vdots c)$.

Приклад

$175 \vdots 5 \wedge 1005 \vdots 5$, отже$(175 + 1005) \vdots 5$.

Теорема 2 (достатня умова подільності різниці). Якщо a і b діляться на c, $a \geq b$, то $a - b$ теж ділиться на c.

$(\forall a,b \in N_0 \wedge c \in N)\ (a \vdots c) \wedge (b \vdots c) \wedge (a \geq b) \Rightarrow ((a - b) \vdots c)$.

Приклад

$1005 \vdots 5 \wedge 200 \vdots 5 \Rightarrow (1005 - 200) \vdots 5$.

Теорема 3. Якщо один із доданків ділиться на дане число, то щоб їхня сума ділилась на це число, необхідно і достатньо, щоб і другий доданок ділився на це число.

Приклад

$(14 + a) \vdots 7 \Leftrightarrow a \vdots 7$

Теорема 4. Якщо один із множників ділиться на натуральне число, то й добуток ділиться на це число.

$(\forall a, b \in N_0 \wedge c \in N)\ (a \vdots c) \Rightarrow (ab \vdots c)$

Приклад

$35 \vdots 5 \Rightarrow 17 \cdot 35 \vdots 5$

Наслідок. Якщо в добутку ab множник a ділиться на c, b ділиться на d, то і добуток abділиться на cd.

$(\forall a, b \in N_0 \wedge c, d \in N)\ (a \vdots c) \wedge (b \vdots d) \Rightarrow (ab \vdots cd)$.

Приклад

$121 \vdots 11 \wedge 34 \vdots 2 \Rightarrow (121 \cdot 34) \vdots (11 \cdot 2) \Leftrightarrow 121 \cdot 34 \vdots 22$

5. *Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 25.*

Ознака подільності на 2 і 5. Для того, щоб число ділилося на 2 (на 5), необхідно і достатньо, щоб на 2 (на 5) ділилось число його одиниць.

Приклади

1)$382 \vdots 2$, тому, що $2 \vdots 2$ (остання цифра у записі числа ділиться на 2);

2) $\overline{382 \vdots 5}$, тому, що $\overline{2 \vdots 5}$;

3)$1005 \vdots 5$, тому, що $5 \vdots 5$.

Наслідки

1) На 2 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються однією із цифр 0, 2, 4, 6, 8.

2) На 5 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 0 або 5.

Ознака подільності на 4 і 25. Для того, щоб число ділилося на 4 (на 25), необхідно і достатньо, щоб на 4 (на 25) ділилося число, утворене його двома останніми цифрами.

Приклади

1)$11324 \vdots 4$ тому, що $24 \vdots 4$.

2)$17350 \vdots 25$ тому, що $50 \vdots 5$.

Ознака подільності на 3 і *9.* Для того щоб, число ділилося на 3 (на 9), необхідно і достатньо, щоб на 3 (на 9) ділилася сума цифр цього числа.

Приклад

Визначимо, чи ділиться на 3(на 9) число 17238. Знайдемо суму цифр цього числа: 1+ 7 + 2 + 3 + 8 = 21.

$21 \vdots 3$, отже $17238 \vdots 3$.

$\overline{21 \vdots 9}$, отже $\overline{17238 \vdots 9}$.

6. ***Основна теорема арифметики натуральних чисел***

Іноді виникає потреба розкласти число на прості множники, наприклад: $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$.

Два розклади вважаємо однаковими, якщо вони відрізняються лише порядком множників: $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2$. На складені множники число можна розкласти різними способами.

Наприклад, $140 = 14 \cdot 10 = 2 \cdot 70 = 4 \cdot 35$. А на прості множники скількома способами? Відповідь на це питання дає теорема (основна теорема арифметики), яка була сформульована і доведена у 1801р. німецьким математиком К.Гауссом.

Теорема. Кожне натуральне число $n > 1$ або просте, або може бути однозначно розкладено в добуток простих чисел з точністю до порядку розміщення множників. (Такий розклад називають канонічним).

Приклад.

Знайти канонічний розклад числа 270.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Отже, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ – канонічний розклад числа.

7. ***Найбільший спільний дільник***

Означення. ***Спільним дільником*** натуральних чисел a і b називається натуральне число, яке є дільником кожного з даних чисел.

Приклади

Числа 12 і 18 мають відповідно дільники: 1, 2, 3, 4, 6, 12 та 1, 2, 3, 6, 9, 18. Серед них спільні: 1, 2, 3, 6. Спільним найбільшим дільником є число 6.

Означення. ***Найбільшим спільним дільником*** натуральних чисел a і b називається найбільше число з усіх спільних дільників даних чисел і позначається НСД (a, b) або Д(a, b).

Приклад

Д(12, 18) = 6 – найбільший спільний дільник чисел 12 і 18 дорівнює 6.

Аналогічно вводиться поняття найбільшого спільного дільника кількох чисел.

Приклад

Д(12, 18, 24) = 6 – найбільший спільний дільник чисел 12, 18 і 24 дорівнює 6.

Властивості НСД (a, b)

1. Для будь-яких натуральних чисел існує єдиний найбільший спільний дільник.

2. $Д(a, b)$ не перевищує меншого з даних чисел. Якщо $a < b$, то $Д(a, b) \leq a$.

Приклад

$12 < 18$ і $Д(12,18) = 6 < 12$.

3. $Д(a, b)$ ділиться на будь-який інший спільний дільник чисел a і b.

Приклад

$Д(12, 18) = 6$. Спільні дільники цих чисел: 1, 2, 3, 6. Кожне з цих чисел є дільником числа 6.

4. Якщо $a \vdots b$, то $Д(a, b) = b$.

Приклад

$24 \vdots 12$, тоді $Д(24,12) = 12$.

Означення. ***Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$*** називаються ***взаємно простими***, якщо $Д(a_1,a_2,\dots, a_n) = 1$. Якщо, крім того, кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа $a_1,a_2,\dots, a_n$ називають ***попарно взаємно простими***.

Приклади

1) $Д(2, 3, 5) = 1$, $Д(2, 3) = 1$, $Д(3, 5) = 1$, $Д(2, 5) = 1$, отже числа 2, 3, 5 − взаємно прості і попарно взаємно прості.

2) $Д(2, 3, 4, 7) = 1$, отже 2, 3, 4, 7 − взаємно прості.

$Д(2, 3) = 1$, $Д(2, 4) = 2 \neq 1$, а тому числа 2, 3, 4, 7 не є попарно взаємно простими.

8. *Найменше спільне кратне*

Означення. ***Спільним кратним натуральних чисел a і b*** називається натуральне число, кратне кожному з даних чисел.

Означення. ***Найменшим спільним кратним*** називається найменше число з усіх спільних кратних і позначається $НСК(a, b)$ або $К(a ,b)$.

Приклад

$К(4 ,6) =12$; $К(12 ,18)=36$.

Властивості К (a, b)

1. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдине найменше спільне кратне.

2. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше більшого з даних чисел. (Якщо $a > b$, то $К(a ,b) \geq a$).

Приклад

$6 > 4 \Rightarrow К(4 ,6) =12 > 6$.

$12 > 4 \Rightarrow К(12, 4) =12 =12$.

3. Кожне спільне кратне чисел a і b ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

Приклад

Спільним кратним чисел 4 і 6 є: 12, 24, 36,…

Найменшим спільним кратним є $K(4,6) = 12$;

Кожне спільне кратне 12, 24, 36,… ділиться на найменше спільне кратне $12 \vdots 12$, $24 \vdots 12$, $36 \vdots 12$.

4. Якщо $a \vdots b$, то $K(a, b) = a$.

Приклад

$12 \vdots 3$, тому $K(12, 3) = 12$.

5. $Д(a, b)$ є найменшим спільним кратним усіх спільних дільників чисел a і b .

Приклад. Числа 12 і 18 мають спільні дільники: 1, 2, 3, 6.

$Д(12, 18) = 6$.

Тоді $K(1, 2, 3, 6) = 6$.

9. *Обчислення найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного за канонічними розкладами*

Знайдемо *НСД* та *НСК* чисел 360 і 525. Для цього знайдемо їх канонічні розклади:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\qquad$ $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

Очевидно, що в розклад *НСД* повинні ввійти всі спільні множники з найменшим показником. Тому, $Д(360, 525) = 3 \cdot 5 = 15$.

У розклад *НСК* повинні війти всі прості множники, які входять принаймні в один розклад , з найбільшим показником.

$K(360,525) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600$.

Теорема. $Д(a,b)\ K(a,b) = ab$.

Наслідок

$$K(a,b) = \frac{ab}{Д(a,b)}$$

10. *Ознаки подільності на складені числа.*

Теорема. Для того, щоб натуральне число ділилося на складене число $n = bc$, де $Д(b,c)=1$, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось і на b, і на c.

Приклади

1) *Ознака подільності на 6*:

$6=2\cdot3$; $Д(2,3)=1$. Отже, $a \vdots 6 \Leftrightarrow a \vdots 2$ і $a \vdots 3$.

2) *Ознака подільності на 15:*

$15 = 3 \cdot 5$; $Д(3,5) = 1$. Отже, $a \vdots 15 \Leftrightarrow a \vdots 3$ і $a \vdots 5$.

3) *Ознака подільності на 70*:

$a \vdots 70 \Leftrightarrow a \vdots 2$ і $a \vdots 35$, $Д(2, 35) = 1$.

$a \vdots 35 \Leftrightarrow a \vdots 5$ і $a \vdots 7$, бо $Д(5, 7) = 1$.

Отже, $a \vdots 70 \Leftrightarrow a \vdots 2,\ a \vdots 5,\ a \vdots 7$.

11. *Алгоритм Евкліда*

НСД двох чисел можна знайти за канонічними розкладами цих чисел, але якщо ці числа великі, то знайти канонічні розклади чисел буває досить важко. Існує інший спосіб, запропонований ще Евклідом і носить назву “алгоритм Евкліда”. Він ґрунтується на таких твердженнях:

1. Якщо $a \vdots b$, то $Д(a,b)=b$.

2. Якщо $\overline{a \vdots b}$, $a = bq + r$, де $0 < r < b$, то $Д(a,b) = Д(b, r)$ і задача зводитьсядо знаходження *НСД* чисел b і r. Тут міркування аналогічні:

якщо $b \vdots r$, то $Д(b, r) = r$ і тоді $Д(a,b) = Д(b, r) = r$;

якщо $\overline{b \vdots r}$, то $b = rq_1 + r_1$, $Д(b, r) = Д(r, r_1)$тому і $Д(r_1, r) = Д(a,b)$.

Такий процес є скінченний, оскільки остачі зменшуються, і дійдемо до випадку, коли попередня остача ділиться на наступну. А тому остання відмінна від нуля остача і є найбільшим спільним дільником даних чисел.

Приклад

Знайти *НСД* (7975, 2585) за алгоритмом Евкліда.

$$\begin{array}{r|l} -7975 & \underline{2585} \\ \underline{7755} & \mathbf{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2585 & \underline{220} \\ \underline{2420} & \mathbf{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 220 & \underline{165} \\ \underline{165} & \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & \underline{55} \\ \underline{165} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

$7975 = 2585 \cdot 3 + 220$

НСД (7975, 2585) = *НСД* (2585, 220)

$2585 = 220 \cdot 11 + 165$

НСД (2585, 220) = *НСД* (220, 165)

$220 = 165 \cdot 1 + 55$

НСД (220, 165) = *НСД* (165, 55)

$165 \vdots 55$, тому *НСД* (165, 55) = 55

Отже, *НСД* (7975, 2585) = 55.

Якщо *НСД* (7975, 2585) = 55, то

$$НСК(7975,\ 2585) = \frac{7975 \cdot 2585}{55} = 7975 \cdot 47 = 3748$$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. *Дати означення*: відношення подільності; дільника, кратного; простого числа; найбільшого спільного дільника; найменшого спільного кратного.

2. Які властивості має відношення подільності?

3. Як формулюються теореми про подільність суми, різниці, добутку?

4. Як перевірити за ознакою подільності, чи ділиться число на 2, на 5, на 3, на 9, на 4, на 25?

5. Як знайти канонічний розклад числа?

6. Як знайти *НСД* та *НСК* за канонічними розкладами, за алгоритмом Евкліда?

Завдання для аудиторної роботи

Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел.

1. Користуючись означенням дільника числа, довести, що:

а) Число 7 є дільником числа 28;

б) Число 0 не є дільником числа 12.

2. Чи є число 18: а) дільником числа 90; б) кратним числу 6; в) дільником числу 54?

3. Записати формулу чисел кратних числу 3 (5; 17; 100).

4. Пояснити, чому множина дільників будь-якого натурального числа скінченна, а числа 0 – нескінченна.

5. На множині $M = \{3, 6, 9, 12, 18\}$ побудувати графи відношень «число x – дільник числа y» та «x кратне y». Які особливості цих графів?

6. Навести приклади чисел, які: а) одночасно діляться на 2 і на 5; б) діляться на 2, але не діляться на 5; в) діляться на 3; г) діляться на 3, але не діляться на 9; д) діляться на 4, але не діляться на 25; ж) діляться на 25, але не діляться на 4.

7. Не виконуючи додавання, встановити, чи діляться дані суми на 2; на 3:

а) 183+126;

б) 182+612;

в) 185+613.

8. Не виконуючи додавання, визначити, чи ділиться сума:

а) 124+420+213 на 4;

б) 1080+123+124 на 9;

9. Встановити, не виконуючи обчислень, значення яких виразів діляться на 4:

а) 540 – 332;

б) 370 – 254;

в) 540 – 254.

10. Встановити, не виконуючи обчислень, значення яких виразів діляться на 3; на 4:

а) $2512 \cdot 127$;

б) $134 \cdot 270$;

в) $1482 \cdot 72$.

11. Не знаходячи значення числового виразу, встановити, чи ділиться вираз на 2, на 3, на 4, на 5, на 9, на 25: а) 25308 + 28054; б) 540 – 332; в) 2512·127.

12. Скласти суму із двоцифрового, трицифрового та чотирицифрового числа, записаних за допомогою однієї і тієї ж цифри. Чому ця сума ділиться на 3?

13. Довести, що: а) $(64^3 - 64^2) \vdots 63$; б) $(57^4 - 23^4) \vdots 40$.

14. Довести, що будь-яке число $\overline{7aa7}$ ділиться на 11.

15. Довести, що сума квадратів трьох послідовних натуральних чисел не ділиться на 3.

16. Довести, що коли натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 1, то і квадрат його при діленні на 5 дає в остачі 1.

17. Використовуючи метод повної індукції, довести, що при будь-якому натуральному n вираз $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 4$.

18. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що для будь-яких натуральних чисел є істинним твердження:

а) $(n^3 - 7n + 6) \vdots 6$; б) $(3^{2n+1} + 1) \vdots 4$.

19. Довести: $(64^3 - 64^2) \vdots 3$.

20. Використовуючи метод математичної індукції, довести, що $(4^n - 1) \vdots 3$.

Прості й складені числа

21. Довести, що числа 139, 331, 509 є простими, а числа 680, 819 і 221 – складеними.

22. Чи може сума двох простих чисел бути простим числом?

23. Записати канонічний розклад чисел: а) 168, б) 972, в) 2526.

24. Визначити, чи діляться задані числа на 12; 15; 18: а) 3225, б) 6348; в) 60012.

25. Не виконуючи додавання або віднімання, визначити, в яких випадках сума або різниця ділиться на 6, 18: а) 7345 + 28540; б) 15303 – 7283; в) 37438 – 15362 +3600.

26. Не виконуючи ділення, довести, що числа 6075 і 13860 кратні 45.

27. Не виконуючи обчислення, визначити, які з добутків діляться на 12: а) $33 \cdot 14$; б) $128 \cdot 99$; в) $202 \cdot 34 \cdot 33$.

28. Серед висловлень вказати істинні:

а) $(\forall a \in N)(a \vdots 7 \wedge a \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 35)$;

б) $(\forall a \in N)(a \vdots 10 \wedge a \vdots 15 \Rightarrow a \vdots 150)$;

в) $(\forall a \in N)(a \vdots 15 \Rightarrow a \vdots 3 \wedge a \vdots 5)$;

г) $(\forall a \in N)(a \vdots 45 \Rightarrow a \vdots 15 \wedge a \vdots 3)$.

29. Довести, що різниця між кубом числа і самим числом ділиться на 6.

30.Довести, що число $(2a+1)^2-1$ кратно 8 при будь-якому натуральному a.

31. Довести, що добуток чотирьох послідовних натуральних чисел кратний 24.

32. Користуючись решетом Ератосфена, знайти усі прості числа від 1 до 50.

Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне

33. Для чисел 50 і 75 записати множини :а) дільників числа 50; б) дільників числа 75; в) спільних дільників цих чисел. Який найбільший спільний дільник?

34. Для чисел 14 і 21 записати множини: а) кратних числу 14; б) кратних числу 21; в) спільних кратних чисел. Яке найменше спільне кратне?

35. Знайти *НСК* та *НСД* чисел за їх канонічними розкладами: а) 144 і 360; б) 351 і 28; в) 80, 120 і 280; г) 238, 266, 413 і 329.

36. Серед пар чисел вказати взаємно прості:а) 15 і 9; б) 15 і 17; в) 4 і 9; г) 24 і 72.

37. Відомо, що коли 11 – найбільший спільний дільник чисел a і b, то числа мають вигляд: $a=11p$, $b=11q$. Чому дорівнює найбільший спільний дільник чисел p і q?

38. Є 36 синіх і 48 червоних аркушів паперу. Яке найбільше число комплектів можна зробити з цих аркушів, якщо в кожному комплекті повинно бути по однаковому числу синіх і однаковому числу червоних аркушів?

39. В ложах нижнього ярусу театру 120 місць, в ложах середнього – 88. Скільки лож в кожному ярусі, якщо число місць в кожній ложі однакове і найбільше з усіх можливих?

40. Якої найменшої довжини повинна бути дошка, щоб її можна було розрізати впоперек на частини довжиною по 40 см або по 30 см так, щоб не залишилось обрізків?

41. Для укладання коробок шириною по 9 см і довжиною по 12 см необхідно заготовити ящик з квадратним дном. Якої довжини має бути найменша величина сторони дна цього ящика, при умові, щільного пакування коробок?

42. Трьом їдальням видали з бази по однаковій кількості яєць. Для однієї їдальні упакували по 150 яєць в ящик, для другої – по 100, для третьої по 50 яєць. Скільки яєць і скільки ящиків одержала кожна їдальня, якщо число яєць найменше з усіх можливих при цих умовах?

43. Знайти за допомогою алгоритму Евкліда найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел:

а) 138 і 115; б) 481 і 703; в) 3762 і 4446; г) 57599 і 55687.

44. Найменше спільне кратне двох чисел, одне з яких 60, дорівнює 420. Знайти друге число, якщо найбільший спільний цих чисел рівний 10.

45. Знайти числа a і b, якщо:

а) $НСД(a,b)=5$; $НСК(a,b)=105$;

б) $НСК(a,b)=224$; $a:b=7:8$.

46. Скоротити дроби: $\frac{21120}{30720}$; $\frac{714714}{217217}$; $\frac{7845}{11319}$.

47. Звести дроби до спільного знаменника:

а) $\frac{13}{69}$ і $\frac{25}{276}$;

б) $\frac{27}{121}$ і $\frac{5}{407}$.

48. Знайти*НСД* та *НСК* чисел за канонічним розкладом та за алгоритмом Евкліда:а) 536 і 1024; б) 6160 і 1560; в) 588 і 2058; г) 548 і 2466.

Завдання для самостійної роботи

Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел.

49. Не виконуючи додавання або віднімання, вказати, які вирази діляться на 3, 4, 5, 9: а) $2342-43642$; б) $8375-3250$; в) $369+45731-7021$.

50. Визначити, не виконуючи обчислень, значення яких виразів діляться на 4: а) $322\cdot 71$; б) $502\cdot 18$; в) $3762\cdot 202$.

51. Довести, що будь-яке тризначне число, в запису якого використано тільки однакові цифри, ділиться на 37.

52. Довести, що різниця між тризначним числом і числом, складеним із цих же цифр, але взятих у зворотному порядку, ділиться на 9.

53. Довести, що: а) $(59^3-59^2)\vdots 58$; б) $(17^{10}+17^{11})\vdots 18$; в) $(63^4-24^4)\vdots 87$.

54. Побудувати граф відношення «$(x+y)\vdots 6$» на множині чисел другого десятка .

55. Довести, що коли число a при діленні на 5 дає в остачі 3, то число a^2+1 ділиться на 5.

56. Довести, використовуючи метод повної індукції, що при будь-якому натуральному n вираз $n(n+1)(n+2)\vdots 3$.

57. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що для будь-яких натуральних чисел є істинним твердження:

а) $(5^{2n}-1)\vdots 4$; б) $(5^{2n-1}+1)\vdots 6$

Завдання підвищеної складності

58. Записати формулами класи чисел, які при діленні на 3 дають одну й ту саму остачу.

59. Який вигляд мають цілі невід'ємні числа, які не діляться на 4?

60. Довести, що коли п'ятицифрове число ділиться на 41, то й сума усіх чисел, утворених циклічною перестановкою його цифр, теж ділиться на це число.

61. Відомо, що числа a і b не кратні c. Чи випливає з цього, що $a\cdot b$ не кратне c?

62. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що для будь-яких натуральних чисел є істинним твердження:
а) $\left(5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1}\right)\vdots 23$; б) $\left(3^{2k+1}+2^{k+2}\right)\vdots 7$.

63. Чи може бути таке число, яке при діленні на 3 дає в остачі 1, при діленні на 4 дає в остачі 2, при діленні на 5 дає в остачі 3 і при діленні на 6 дає в остачі 4.

64. Довести, використовуючи метод повної індукції, що при будь-якому натуральному n вираз $\left(n^5-n\right)\vdots 5$.

Прості й складені числа

65. Із множини чисел 111, 127, 137, 139, 299, 1227 виділити підмножину простих чисел.

66. Встановити, не виконуючи обчислень, значення яких виразів діляться на 15:

а) $150+225$; б) $28422+22050$; в) $5040+8310+750$.

67. Визначити, не виконуючи обчислень, значення яких виразів діляться на 18: а) $24\cdot 36\cdot 53$; б) $1213\cdot 207\cdot 41$; в) $72\cdot 29\cdot 47$; г) $123\cdot 201\cdot 44$.

68. Знайти канонічні розклади чисел: 216, 594, 729, 1024, 2348.

69. Довести, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

70. Довести, що різниця квадратів двох будь-яких непарних чисел кратна 8.

71. Користуючись решетом Ератосфена, знайти усі прості числа від 1 до 80.

Задачі підвищеної складності.

72. Знайти канонічний розклад числа $a=2^6+3^6$.

73. Використовуючи загальну ознаку Паскаля, знайти ознаку подільності натуральних чисел на 6.

74. Знайти ціле число виду $2p+1$ де p – просте число, яке є точним кубом.

75. Навести приклади простих чисел, які є сумами і різницями простих чисел одночасно.

76. Використовуючи решето Ератосфена знайти всі прості числа від 1 до 150.

77. Числами-близнюками називаються прості числа, які відрізняються лише на дві одиниці. Навести приклади таких чисел.

78. Із цифр 0, 1, 2, 5, 7 скластитри різні п’ятицифрові числа, щоб серед них були числа кратні 12, 15, 25.

79. Довести, що добуток п’яти послідовних натуральних чисел ділиться на 120.

80. Довести, що при будь-якому парному n число n^3+20n кратно 48.

81. Довести істинність тверджень:

а) $(\forall a\in N)\left(a^3+5a\right)\vdots 6$;

б) $(\forall a\in N)\left(a^5-a\right)\vdots 30$.

Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне

82. Знайти *НСД* і *НСК* за їх канонічними розкладами: а) 3640 і 14300; б) 1980 і 936; в)765; 348 і 1320.

83. Серед чисел вказати взаємно прості: а) 37 і 62; б) 2800 і 2673.

84. У три магазини привезли яблука в однакових ящиках. У перший – 728 кг яблук, у другий – 672 кг, у третій – 952 кг. Скільки ящиків з яблуками привезли у кожний магазин, якщо ящики були максимально можливої маси?

85. По круговій доріжці біжать чотири спортсмени. Один спортсмен пробігає коло за 20 хв, другий – за 15 хв, третій – за 12 хв, четвертий – за 10 хв.

Через скільки хвилин після старту вони знову всі разом будуть на стартовій лінії? Скільки кругів пробіжить кожний спортсмен за цей час?

86. Знайти числа a і b, якщо відомо:

а) *НСД* $(a,b) = 7$, $a \cdot b = 294$;

б) *НСД* $(a,b) = 3$, $a : b = 17 : 14$.

88. У коробці лежать олівці. Їх число менше 300, але більше 200. Скільки олівців в коробці, якщо відомо, що там їх ціле число десятків, а також ціле число дюжин?

89. У студентському гуртожитку проживає більш ніж 500 і менше ніж 600 чоловік. Яке число студентів проживає у гуртожитку, якщо відомо, що вони живуть по три чоловіка у кімнаті, а під час ремонту їх розселили по чотири, а потім по п'ять чоловік?

90. Знайти *НСД* та *НСК* за алгоритмом Евкліда:

а) 861 і 456;

б) 11247 і 22563.

91. При діленні чисел 4376 і 3829на одне й те саме число дістали два взаємно прості числа. На яке число ділили?

92. Звести дроби до спільного знаменника, спочатку скоротивши їх: $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1236}{30720}$.

93. Знайти числа a і b, якщо:

а) $НСД(a,b)=11$, $НСК(a,b)=231$.

б) $НСД(a,b)=102$, $a:b=2:3$.

Задачі підвищеної складності

94. Нехай $НСД(375,645)=d$. Знайти d і такі цілі числа x і y, що $d = ax + by$, де a=375, b=645.

95. У множині натуральних чисел розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} xy = 20 \\ НСК(x,y) = 10 \end{cases}$$

96. Від прямокутника 324 см$\times$141 см відрізають кілька квадратів зі стороною 141 см, поки не залишиться прямокутник, у якого довжина однієї сторони менше 141 см. Від прямокутника знову відрізають квадрати, сторони яких дорівнюють довжині його меншої сторони, доти, поки це можливо, і т.д. Яка довжина сторони останнього відрізаного квадрата?

97. Знайти НСД та НСК чисел за алгоритмом Евкліда:

1) 476; 1258 і 21114;

2) 3445; 4225 і 5915.

98. Чотири послідовних натуральних числа дають в добутку 1680. Знайти ці числа.

99. Якщо помножити добуток двох натуральних чисел на різницю їх квадратів, то завжди дістанемо число кратне 3. Довести це.

РОЗДІЛ V
РОЗШИРЕННЯ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЛО

5.1. ЦІЛІ ЧИСЛА

1. ***Від'ємним цілим числом*** називається число виду $(-\,n)$, де $n \in N$. Множину цілих невід'ємних чисел позначають Z_-.

Натуральні числа називають цілими додатними числами, множину таких чисел позначають Z_+. ($N = Z_+$) Оскільки, для кожного натурального числа nіснує йому відповідне число $-n$, то $Z_+ \sim Z_-$.

$$
\begin{array}{l}
Z_+ = \{1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots\} \\
\qquad\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\qquad \updownarrow \\
Z_- = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}
\end{array}
$$

2. ***Множиною цілих чисел*** називають об'єднання множин Z_+, Z_-, $\{0\}$ і позначають Z. Отже, $Z = Z_+ \cup Z_- \cup \{0\}$, причому ці множини попарно не перетинаються.

Цілі числа ***a*** та ***−a*** називаються ***протилежними***, причому **−(−*a*) = *a***.

Приклади

1. $-(-5) = 5$; число-5 протилежне до числа 5.
2. Число 0 вважають протилежним самому собі: $-0=0$.

Розрізняють *числа одного знаку, різних знаків*.

Приклади

1. 5 і 7 або -5 і -7 − числа одного знаку.
2. Числа 4 і -2 − різних знаків.

3.*Модулем цілого числа* називається число **|*a*|** (читається „модуль *a*"), для якого мають місце рівності:

$$
|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \in Z_+ \cup \{0\} \\ -a, \text{ якщо } a \in Z_- \end{cases}
$$

Приклади: $|0| = 0$, $|-6| = 6$, $|7| = 7$.

4.*Числовою або координатною прямою* називається пряма з вибраними на ній точкою O − початком відліку, точкою A_1– одиничною точкою і додатним напрямом від точки O до точки A_1 (рис.36)

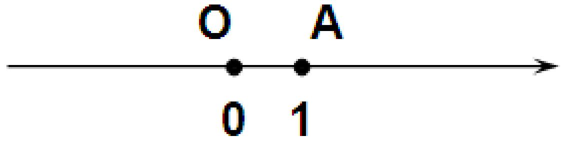


Рис.36

5. Нехай координати точок *A, B* координатної прямої є відповідно числа *a*, *b*: *A*(*a*) *і B*(*b*).

Число *a* ***менше*** від числа *b*, або число *b* ***більше*** від числа *a*, якщо точка *A* лежить зліва від точки *B*. Записуємо $a<b$ або $b>a$ (рис.37).

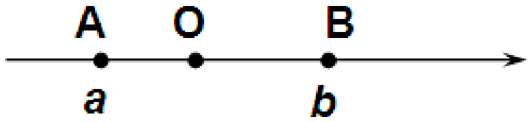


Рис.37

Приклади: $-4 < 5$; $-5 < -2$.

Можна показати, що для довільних цілих чисел *a* і *b* можливе одне і тільки одне із співвідношень: $a = b$, $a<b$, $a>b$.

6. ***Властивості множини Z***:

1) Множина $(Z, <)$ є лінійною впорядкованою множиною. Множину Z можна записати у вигляді „двостороннього ряду”:

$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

2) Множина Z є необмеженою (як зверху так і знизу), є дискретною.

3) Множина Z є зчисленною тому, що $N \sim Z$.

7. ***Додавання і віднімання цілих чисел***

Правило 1 (додавання цілих чисел одного знака). Сума двох чисел одного знака є число того ж знака. Щоб знайти модуль такої суми, потрібно додати модулі доданків.

Приклад

$(–114) + (–24) = –(114 + 24) = –138$

Правило 2 (додавання цілих чисел різних знаків). Сума двох чисел різних знаків є число того знака, що й доданок з більшим модулем; щоб знайти модуль такої суми, потрібно з більшого модуля відняти менший.

Приклади:

1) – 114 +2 4 = – 90;

2) – 7 + 13 = 6.

Правило 3 (віднімання цілих чисел)

Щоб з одного числа відняти друге, потрібно до зменшуваного додати число, протилежне від’ємнику.

Приклади:

1) 13 – (–7) = 13 + 7 = 20;

2)24 – 114 = 24 – (–114) = –90.

8. ***Множення і ділення цілих чисел.***

Правило1. (добуток (частка) цілих чисел одного знака). Добуток (частка) двох чисел одного знака є число додатне; щоб знайти модуль добутку (частки), потрібно перемножити (розділити) модулі даних чисел.

Приклади:

1) $(-13)\cdot(-8)=104$;

2) $-27 : (-3) = 27 : 3 = 9$.

Правило 2. (добуток (частка) цілих чисел різних знаків). Добуток (частка) двох чисел різних знаків є число від'ємне; щоб знайти модуль добутку (частки), потрібно перемножити (розділити) модулі даних чисел.

Приклади:

1) $24 : (-8) = -3$;

2) $-3 \cdot 5 = -15$.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. *Дати означення*: цілого від'ємного числа;множини цілих чисел;протилежних чисел; модуля цілого числа; суми цілих чисел; різниці цілих чисел; добутку цілих чисел; частки цілих чисел.
2. В якому випадку ціле число a менше числа b?
3. Чи існує найменше ціле число? Відповідь обґрунтуйте.
4. Чи існує найбільше ціле число? Відповідь обґрунтуйте.
5. Які властивості має множина цілих чисел?
6. Для яких цілих чисел x виконується: а) рівність $|x| = -x$; б) нерівність $|x|>12$.
7. Додатне чи від'ємне число, що є добутком 2013 додатних та 2014 від'ємних чисел?
8. В якому випадку частка не існує на множині цілих чисел?
9. В якому випадку частка не визначена на множині цілих чисел?
10. Довести, що множина Z зчисленна.
11. Знайти добуток усіх цілих чисел x таких, що $-10 \le x < 10$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Виконати дії, сформулювавши при цьому відповідне правило:

$24+(-27)$; $(-17)+(-103)$; $21-37$; $-25-(-175)$;

$(-5)\cdot 12$; $(-6)\cdot(-17)$; $24:(-6)$; $(-105):(-5)$

2. Обчислити:

а) $(-120):(-4)-75:(-25)+34\cdot(-2)$;

б) $-340-28\cdot(-3)+(-134):(-2)$.

3. Розв'язати рівняння на множині цілих чисел, результати зобразити на числовій прямій:

а) $|x|=-4$; б) $|x|=5$; в) $|x-4|=7$; г) $|x+8|=5$.

4. Розв'язати нерівності на множині цілих чисел:

а) $|x|\le 4$; б) $|x-4|\le 2$; в) $|x+3|\le 10$;

г) $|x| \geq 5$; д) $|x+1| > 6$; ж) $|x-5| > 2$.

5. Розв’язати рівняння на основі залежностей між компонентами і результатами дій:

а) $-140 + x = 5$;

б) $24 : (x - 13) = -12$;

в) $(15 - x) : 3 = 60$;

г) $(x - 13) \cdot 4 + 140 = 12$;

д) $(15 - 2x) \cdot 3 - 50 = 25$;

ж) $((x + 17) \cdot 2 - 15) : 7 + 15 = 14$;

з) $(((134x - 3179) + 856) \cdot 81) : 333 = 315$.

6. Знайти середню температуру повітря протягом тижня, якщо вона щодня змінювалася і набувала значень: 7^0, -3^0, -2^0, 1^0, 4^0. 5^0.

7. Найбільш низька температура повітря в Антарктиді ($-89{,}2^0$), в районі Оймікон – (-70^0). Знайти різницю температур.

8. Найменша висота відносно рівня моря долини Смерті у Північній Америці становить (–86 м), а плата Мангешлак у Казахстані – (–132 м). На скільки нижче плато, ніж долина?

9. Сума двох чисел 27. Якщо перший доданок збільшити в 5 разів, а другий у 3 рази, то дістанемо суму 111. Знайти ці числа.

10. Число 45 розкласти на суму трьох чисел так, щоб коли до першого додати 2, від другого відняти 2, третє помножити на 2, то всі результати були б рівними.

11. Як зміниться сума, якщо один з доданків збільшити на 2, а другий зменшити на 2?

Завдання для самостійної роботи

12. Обчислити:

а) $128 : (-4) - 18 \cdot 4 + (-12) : (-3)$;

б) $-105 - 121 : (-11) - 34 : (-17)$;

в) $-8 \cdot (-3 + 12) : 36 + 2$;

г) $(-8 + 32) : (-6) - 7$;

д) $-21 + (-3 - 4 + 5) : (-2)$.

13. Розв’язати рівняння та нерівності на множині цілих чисел:

а) $|x| = -10$; б) $|x| = 3$ в) $|x + 4| = 1$ г) $|x - 7| = 2$

д) $|x| \leq 3$; ж) $|x - 1| \leq 4$; з) $|x| \geq 4$ е) $|x + 5| > 7$.

14. Розв’язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) $(x + 42) \cdot 15 = -225$ б) $21 \cdot (3 - x) = 105$

в) $(11 - x) \cdot 2 - 13 = -27$ г) $44 : (x - 6) = 22$

д) $24960 : (3360 - 300 \cdot (200 - 6x) : 115) = 8$.

15. Термометр показує (-3^0), синоптики прогнозують підвищення температури на 10^0 з наступним зниженням на 6^0. Яка буде температура?

16. В Африці рівень озера Асоль відносно рівня моря (–157 м), а в Азії рівень Мертвого моря – (– 405 м). На скільки вище розташоване озеро, ніж море?

17. На складі було 340 ц картоплі. Коли зі складу вивезли картоплю на 9 машинах, порівну на кожній, то на складі залишилося 160 ц картоплі. Скільки картоплі вивезли на кожній машині?

18. В один поїзд навантажили 1200 т картоплі, а в другий – 950 т. У першому було на 5 вагонів більше, ніж у другому. Скільки вагонів було в кожному поїзді, якщо в кожному вагоні картоплі було порівну?

19. Добуток трьох цілих чисел додатний. Чи можна стверджувати, що усі множники додатні?

20. Обчислити суму і добуток ряду цілих чисел від (–50) до 30 раціональним способом.

Задачі підвищеної складності.

21. Довести, що множина $M = \{x | x \in Z, |x| > 10\}$ зчисленна.

22. Що більше і на скільки: сума всіх парних чисел чи сума всіх непарних чисел першої тисячі?

23. Лічильник показав, що автомобіль проїхав 16961 км. Через 2 год на лічильнику знову було число, яке читалось однаково зліва направо і справа наліво. Яка могла бути найменша швидкість автомобіля?

5.2. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

1. Символ $\frac{p}{n}$, в якому p і n − натуральні числа, називається ***дробом*** із чисельником p і знаменником n.

Приклад

$\frac{5}{12}$ − дріб, 5 − чисельник, 12 − знаменник.

Дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ називаються ***рівними*** і записуються $\frac{p}{n} = \frac{q}{k}$, якщо $pk=nq$.

Приклади

1) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ тому, що $1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$; 2) $\frac{2}{7} \neq \frac{5}{11}$ тому, що $2 \cdot 11 \neq 7 \cdot 5$.

2. ***Основна властивість дробу.*** Якщо чисельник і знаменник дробу помножити на довільне натуральне число або розділити на довільний їх спільний дільник, то дістанемо дріб, який дорівнює даному.

На цій властивості ґрунтується скорочення дробів, зведення їх до спільного знаменника.

Приклади

1. Скоротити дріб $\frac{216}{264}$.

Розв'язання

Скористаємось ознаками подільності на 2, 3, 4:

$\frac{216}{264}=\frac{108}{132}=\frac{36}{44}=\frac{9}{11}$. Отже, $\frac{216}{264}=\frac{9}{11}$.

1. Звести дроби $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{3}{20}$ до найменшого спільного знаменника.

Розв'язання

Знайдемо розклад чисел 12, 14, 20 на прості множники і визначимо НСК цих чисел.

$12 = 2^2 \cdot 3$; $14 = 2 \cdot 7$; $20 = 2^2 \cdot 5$.

НСК (12, 14, 20) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Це і є спільний знаменник.

Знайдемо додаткові множники до кожного дробу, поділивши НСК на кожний чисельник: 420 : 12 = 35 ; 420 : 14 = 30 ; 420 : 20 = 21 .

Отже, $\frac{7}{12} = \frac{7\cdot 35}{420} = \frac{245}{420}$; $\frac{5}{14} = \frac{5\cdot 30}{420} = \frac{150}{420}$; $\frac{3}{20} = \frac{3\cdot 21}{420} = \frac{63}{420}$.

Дріб $\frac{p}{n}$ називається ***правильним***, якщо $p<n$, і ***неправильним***, якщо $p \geq n$.

Приклади: $\frac{3}{5}$ – правильний дріб, $\frac{17}{5}$, $\frac{5}{1}$ – неправильні дроби.

3. Множину всіх дробів можна розбити на класи еквівалентності. У кожен клас входять рівні між собою дроби. Дроби, що належать до різних класів, не дорівнюють один одному.

Кожний із класів еквівалентності, на які відношення рівності дробів розбиває множину дробів, називають ***додатним раціональним числом***.

Для будь-якого додатного раціонального числа існує один і тільки один нескоротний дріб, що зображує це число.

Приклад

Клас $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\right\}$ – додатне раціональне число. Його зображенням є кожний із дробів цієї множини. Наприклад, $\frac{3}{6}$ або $\frac{4}{8}$. Серед дробів класу є єдиний нескоротний дріб – $\frac{1}{2}$.

Множину додатних раціональних чисел позначають буквою Q_+.

$N \subset Q_+$.

4. Нехай $a, b \in Q_+$ і ці числа зображуються дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{n}$.

Сумою $a + b$ називається додатне раціональне число, що зображується дробом $\frac{p+q}{n}$.

Отже, ***додавання дробів з однаковими знаменниками*** виконується за правилом: $\boxed{\frac{p}{n} + \frac{q}{n} = \frac{p+q}{n}}$**.** Якщо знаменники різні, то спочатку їх зводять до спільного знаменника.

Теорема 1. Сума додатних раціональних чисел існує, причому єдина.

Приклади:

1) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$;

2) $\frac{5}{12} + \frac{7}{15} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{25}{60} + \frac{28}{60} = \frac{25+28}{60} = \frac{53}{60}$.

5. Властивості додавання на множині додатних раціональних чисел:

1. *Комутативність*: $(\forall a)\ (\forall b)\ (a + b = b + a)$, $a, b \in Q_+$.

2. *Асоціативність*: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a+b)+c = a + (b+c))$, $a, b, c \in Q_+$.

Справедливість властивостей випливає з означення суми та аналогічних властивостей додавання натуральних чисел.

6. Відношення порядку на множині дробів.

Якщо знаменники дробів рівні, то $\frac{p}{n} < \frac{q}{n} \Leftrightarrow p < q$.

Якщо знаменники різні, тобто маємо дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$,то зведемо їх до спільного знаменника nk: $\frac{p}{n} = \frac{pk}{nk}, \frac{q}{k} = \frac{nq}{nk}$. Тоді, $\frac{p}{n} < \frac{q}{k} \Leftrightarrow pk < nq$.

Приклад

$\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ тому, що $2 \cdot 7 < 3 \cdot 5$.

Теорема 2. Нерівність $\frac{p}{n} < \frac{q}{k}$ не порушується при заміні дробів $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ будь-якими іншими, що дорівнюють їм.

Приклад

Замінимо дріб $\frac{2}{3}$ дробом $\frac{4}{6}$, рівним йому. Оскількиу попередньому прикладі обґрунтовано, що $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$, то і $\frac{4}{6} < \frac{5}{7}$ (за теоремою 2).

Означення. Нехай $a, b \in Q_+$, $\frac{p}{n}, \frac{q}{k}$ – дроби, що їх зображують. $\boldsymbol{a < b}$ або $\boldsymbol{b > a}$, якщо $\frac{p}{n} < \frac{q}{k}$, тобто $\boldsymbol{pk < nq}$.

7. ***Різницею*** додатних раціональних чисел a і b називається таке додатне раціональне число c , що $c + b = a$.

Якщо $c = a - b$, то c – *різниця*, a – *зменшуване*, b – *від'ємник*. Операція знаходження різниці називається відніманням.

Різниця на множині додатних раціональних чисел існує лише при умові, що $a > b$.

Віднімання дробів з однаковими знаменниками виконується за правилом: $\boxed{\frac{p}{n} - \frac{q}{n} = \frac{p-q}{n},\ p>q}$.

Якщо знаменники різні, то спочатку їх зводять до спільного знаменника.

Приклади:

1) $\frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$;

2) $\frac{5}{12} - \frac{2}{15} = \frac{25}{60} - \frac{8}{60} = \frac{25-8}{60} = \frac{17}{60}$.

8. Нехай a і $b \in Q_+$ і нехай ці числа зображуються дробами $\frac{p}{n}$ та $\frac{q}{n}$.

Добутком додатних раціональних чисел a і b називається додатне раціональне число ab, що зображується дробом $\frac{pq}{nk}$.

Числа a і b називаються ***множниками***, а операція знаходження добутку – ***множенням***.

Теорема 3. Добуток додатних раціональних чисел існує, причому єдиний.

Правило множення дробів: $\boxed{\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{k} = \frac{pq}{nk}}$.

Приклад

Знайти добуток дробів $\frac{3}{44}$ та $\frac{11}{36}$.

Розв'язання

$\frac{3}{44} \cdot \frac{11}{36} = \frac{3 \cdot 11}{44 \cdot 36} = \frac{1}{48}$.

9. ***Властивості операції множення***

1) *комутативність*: $(\forall a)(\forall b)(ab = ba)$, $a,b \in Q_+$;

2) *асоціативність*: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ \ ((ab) \cdot c = a\,(bc))$, $a,b,c \in Q_+$;

3) *дистрибутивність відносно додавання*:

$(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a+b)\,c = ac+bc)),\ a,b,c \in Q_+;$

4) *монотонність:*

$(\forall a)(\forall b)(\forall c)\ (a < b \Rightarrow ac < bc),\ \ a,b,c \in Q_+\ ;$

Справедливість властивостей випливає із означень операцій та з відповідних властивостей дій над натуральними числами.

Приклади

1. Обчислити: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}$

Розв'язання

Застосуємо дистрибутивну властивість. Винесемо спільний множник за дужки: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}=\left(\frac{1^{(5}}{3}+\frac{2^{(3}}{5}\right)\frac{2}{7}=\frac{5+6}{15}\cdot\frac{2}{7}=\frac{11}{15}\cdot\frac{2}{7}=\frac{22}{105}.$

2. Виконати обчислення різними способами $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\frac{2}{7}$.

Розв'язання

І спосіб. Застосування дистрибутивної властивості:

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\frac{2}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2^{(5}}{21}+\frac{4^{(3}}{35}=\frac{10+12}{105}=\frac{22}{105}.$

ІІ спосіб. Застосування правила порядку виконання дій у виразі:

1) $\frac{1^{(5}}{3}+\frac{2^{(3}}{5}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15};$

2) $\frac{11}{15}\cdot\frac{2}{7}=\frac{22}{105}$. Отже, $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\frac{2}{7}=\frac{22}{105}$.

10.*Часткою додатних раціональних чисел* *a* і *b* називається таке додатне раціональне число $c = a : b$, що $c\cdot b = a$. Число a − називають *діленим*, b − *дільником*, а операція знаходження частки − *діленням*.

На множині Q_+ операція ділення завжди виконується, причому однозначно, тобто частка є єдиною.

При діленні дробів $\frac{p}{n}$ та $\frac{q}{n}$, які зображають ділене a і дільник b, користуємося формулою: $\boxed{\frac{p}{n}:\frac{q}{k}=\frac{pk}{nq}}$.

Приклад

$\frac{5}{14}:\frac{2}{7}=\frac{5\cdot 7}{14\cdot 2}=\frac{5}{4}.$

11. Дріб $\frac{p}{10^k}$, записаний у позиційній десятковій системі числення, називається ***десятковим***.

Приклади: а) $\frac{1238}{10^3}=1{,}238$; б) $\frac{584}{10^3}=0{,}584$; в) $\frac{72}{10^3}=0{,}072$.

При переході від звичайного дробу до десяткового відокремлюємо справа наліво у чисельнику комою стільки знаків, який показник степеня числа 10 у знаменнику.

У загальному вигляді:

$$\frac{\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0 b_1 b_2 \cdots b_n}}{10^k} = \overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0, b_1 b_2 \cdots b_k}.$$

Число $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}$ є *цілою частиною дробу*. Таке число може бути і 0.

12.*Основні властивості десяткових дробів.*

1) Якщо до десяткового дробу дописати довільну кількість нулів справа, то дістанемо дріб, що дорівнює даному.

Приклад

2,35 = 2,35000

2) Для того щоб, помножити (поділити) десятковий дріб на 10^n, досить перенести у записі цього дробу кому на *n* цифр вправо (вліво).

Приклади

1. $17{,}375 \cdot 10^2 = 1737{,}5$;

2. 17,375 : 10 = 1,7375.

Використовуючи першу властивість десяткових дробів, легко їх порівняти.

Приклад

Порівняти дроби 127,38 та 127,335.

Розв'язання

- Зрівняємо кількість десяткових знаків, одержимо 127,380 та 127,335.
- Відкинемо коми: 127380 , 127335 .
- Порівняємо натуральні числа: 127380 > 127335.
- Висновок: 127,38 > 127,335 .

13.*Дії над десятковими дробами*

Правило додавання (віднімання):

- зрівняти у дробів кількість цифр праворуч від коми ;
- відкинути коми і додати (відняти) утворені натуральні числа ;
- у сумі відокремити комою праворуч стільки цифр, скільки їх відокремлено у кожному із компонентів.

Приклади

1) Обчислити: 3,52 + 17,238.

Розв'язання

Запишемо доданки з трьома десятковими знаками.

Додаємо, не звертаючи увагу на кому. На практиці нулі не дописуємо, а підписуємо число під іншим так, щоб кома була під комою.

$$\begin{array}{r} 3{,}520 \\ 17{,}238 \\ \hline 20{,}758 \end{array}$$

Отже, 3,52 + 17,238 = 20,758.

2) Обчислити: 12,354 − 9,31

$$\begin{array}{r} 12{,}354 \\ 9{,}31 \\ \hline 3{,}044 \end{array}$$

Отже, 12,354 − 9,31 = 3,044.

Правило множення десяткових дробів.

- відкинути в записах цих дробів коми ;
- знайти добуток двох утворених натуральних чисел ;
- у добутку відокремити комою праворуч стільки цифр, скільки їх відокремлено в обох множниках разом.

Приклад

Обчислити: 19,45 · 2,351

$$\begin{array}{r} \times 1945 \\ 2351 \\ \hline 1945 \\ 9725 \\ +5835 \\ 3890 \\ \hline 4572695 \end{array}$$

Отже, 19,45 · 2,351 = 45,72695

Ділення десяткових дробів зводиться до ділення натуральних чисел, тобто $a:b=\dfrac{p}{10^n}:\dfrac{q}{10^n}=\dfrac{p10^n}{10^n\cdot q}=\dfrac{p}{q}$.

Частка не завжди буде десятковим скінченним дробом.

Приклади

1) 94,86 : 15,3 = 9486 :1530 = 6,2;

2)62,3 : 2,1= 623 : 21= 29,66…

14. Перетворення звичайного дробу у десятковий

Теорема 4. Для того, щоб звичайний нескоротний дріб перетворився у скінченний десятковий, необхідно і достатньо, щоб канонічний розклад його знаменника містив лише множники 2 і 5 .

Приклади

Подати звичайні дроби у вигляді десяткових:

а) $\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 5}=\dfrac{15}{10}=1{,}5$;

б) $\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{2}=\dfrac{8}{10}=0{,}8$;

в) $\dfrac{7}{50}=\dfrac{7}{5^2\cdot 2}=\dfrac{7\cdot 2}{5^2\cdot 2^2}=\dfrac{14}{10^2}=0{,}14$;

г) $\frac{5}{21}=\frac{5}{7\cdot 3}\Rightarrow$ дріб не перетворюється у десятковий (розклад знаменника не містить множників 2 і 5);

д) $\frac{8}{75}=\frac{8}{3\cdot 5^2}$ − не перетворюється у десятковий (у розкладі знаменника є число 3).

15. Періодичні десяткові дроби

Означення. Якщо в нескінченному десятковому дробі, починаючи з деякої цифри після коми, відбувається нескінченне повторення однієї цифри або деякої групи цифр, то такий дріб називається ***нескінченним періодичним десятковим дробом, або просто періодичним десятковим дробом.***

Цифру або групу цифр, що повторюється, називаємо ***періодом***.

Якщо період починається відразу після коми, то дріб називається ***чистимперіодичним***, якщо не відразу − то ***мішаним періодичним.***

Наприклад, 20,666… …= 20,(6) − чистий періодичний дріб, 20,(6) *читається*: 20 цілих, 6 у періоді; 13,23666…= 13,23(6) − мішаний періодичний, 13,23(6) *читається* 13 цілих, 23 до періоду, 6 у періоді.

Теорема 5. Будь-який звичайний нескоротний дріб, який не перетворюється у десятковий, зображується періодичним десятковим дробом, чистим або мішаним.

Приклади: а) $\frac{2}{3}=0{,}66\ldots=0{,}(6)$; б) $\frac{5}{6}=0{,}833\ldots=0{,}8(3)$.

Наслідок. Немає жодного звичайного дробу, який зображується нескінченним десятковим неперіодичним дробом.

Теорема 6. Якщо знаменник нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ більший за 1 і в своєму канонічному розкладі не містить 2 і 5 , то цей дріб зображується чистим періодичним десятковим дробом. Число цифр у періоді дорівнює найменшому натуральному числу j такому, що $(10^j-1) \vdots n$.

Приклади

1. Визначити, яким десятковим дробом зображується звичайний дріб $\frac{2}{3}$ та скільки цифр у періоді.

Розв'язання

Використаємо теорему 6. У розкладі знаменника не міститься 2 і 5, отже дріб зображується чистим періодичним десятковим дробом. Визначимо число цифр у періоді, для цього знайдемо найменше натуральне числу j таке, що $(10^j-1) \vdots n$ ($n = 3$).

Якщо $j = 1$, то $(10^1-1) \vdots 3$, отже у періоді одна цифра. Дійсно $\frac{2}{3}$ = 0,(6).

2. Визначити, яким десятковим дробом зображується звичайний дріб $\frac{2}{11}$ та скільки цифр у періоді.

Розв'язання

Використаємо теорему 6. У розкладі знаменника не міститься 2 і 5, отже, дріб зображується чистим періодичним десятковим дробом. Визначимо число цифр у періоді, для цього знайдемо найменше натуральне число j таке, що $(10^{j} - 1) \vdots n$ ($n = 11$).

Якщо $j = 2$, то $(10^{2} - 1) \vdots 11$, отже у періоді дві цифри. Дійсно $\frac{2}{11} = 0,(18)$.

Теорема 7. Якщо знаменник нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ має вигляд $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot k$, де $max\ \{\alpha, \beta\} = \gamma$, а натуральне число $k > 1$ і у своєму канонічному розкладі не містить 2 і 5, то цей дріб зображується мішаним періодичним десятковим дробом. При цьому число цифр між комою і періодом дорівнює γ, а число цифр у періоді−найменшому натуральному числу j, для якого $(10^{j} - 1) \vdots k$.

Приклади

1. Довести, що дріб $\frac{17}{120}$ зображується мішаним періодичним дробом, визначити скільки цифр у періоді та між комою і періодом.

Розв'язання

Використаємо теорему 7.Знайдемо канонічний розклад знаменника $\frac{17}{120} = \frac{17}{3 \cdot 2^{3} \cdot 5}$, тоді $\gamma = max(3,1) = 3$, отже, між комою і періодом 3 цифри.

Знайдемо таке j, для якого $(10^{j} - 1) \vdots k$, де $k = 3$. Якщо $j = 1$, то $10^{1} - 1 = 9$; $9 \vdots 3$, отже, у періоді одна цифра. Дійсно $\frac{17}{120} = 0,141(6)$.

3. Довести, що дріб $\frac{8}{175}$ зображується мішаним періодичним дробом, визначити скільки цифр у періоді та між комою і періодом.

Розв'язання

Використаємо теорему 7. Знайдемо канонічний розклад знаменника $\frac{8}{175} = \frac{8}{7 \cdot 5^{2}}$, тоді $\gamma = 2$, отже, між комою і періодом 2 цифри.

Знайдемо таке j, для якого $(10^{j} - 1) \vdots k$, де $k = 7$. Найменшим є число $j = 6$, таке, що $10^{6} - 1 = 999999 \vdots 7$. Маємо: в періоді 6 цифр. Дійсно $\frac{8}{175} = 0,04(571428)$.

16. *Правила перетворення періодичних дробів у звичайні*

*Правило*1. Чистий періодичний дріб, ціла частина якого дорівнює 0, є зображенням звичайного дробу, чисельником якого є період даного числа, а знаменником − число, записане одними дев'ятками, кількість яких дорівнює числу цифр у періоді.

Приклади

Перетворити десяткові дроби у звичайні:

а) $0,(32)=\dfrac{32}{99}$;

б) $0,(6)=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$;

в) $2,(713)=2\dfrac{723}{999}=2\dfrac{241}{333}$.

Правило 2. Мішаний періодичний дріб, ціла частина якого дорівнює 0, є зображенням звичайного дробу, в якому чисельником є різниця між числом, що стоїть між комою і другим періодом, і числом, що стоїть між комою і першим періодом, а знаменник записаний дев'ятками, кількість яких дорівнює числу цифр у періоді, до яких дописано стільки 0, скільки цифр між комою і першим періодом.

Приклад

Перетворити десяткові дроби у звичайні:

а) $0{,}12(3)=\dfrac{123-12}{900}=\dfrac{111}{900}=\dfrac{37}{300}$;

б) $2{,}4(21)=2+0{,}4(21)=2+\dfrac{421-4}{990}=2+\dfrac{417}{990}=2\dfrac{417}{990}=2\dfrac{139}{330}$.

Наслідок. Серед звичайних нескоротних дробів, які не перетворюються в десяткові, немає таких, які зображуються періодичними дробами з періодом, що містить лише дев'ятки.

Наприклад, якщо записати число 0,4(9) у вигляді звичайного дробу, отримаємо: $0{,}4(9)=\dfrac{49-4}{90}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{5}{10}=0{,}5.$, але $0{,}4(9)\neq 0{,}5$.

Десятковий дріб або натуральне число можна записати з періодом рівним 0, тому кожному додатному раціональному числу можна поставити у відповідність періодичний десятковий дріб і ***розглядати додатне раціональне число як нескінченний періодичний десятковий дріб***.

Приклади: 45 = 45,(0) ; 5,38 = 5,38(0) .

17. Десятковий дріб 0,01 називається ***відсотком*** і позначається ***1%.***

Приклади: 2%=0,02; 67%=0,67, 350%=3,5.

Базовими задачами відсоткових обчислень є задачі трьох видів.

Задача 1 (***знаходження відсотку від числа***). Знайти 45% від числа 350.

Розв'язання

Перший спосіб. Нехай x – шукане число.

$350 - 100\%$, $x - 45\%$. Складемо пропорцію $\frac{350}{x} = \frac{100}{45}$. Звідси $x =$ $\frac{350 \cdot 45}{100} = 157{,}5$.

Другий спосіб. 45% = 0,45. Знайдемо 0,45 від числа 350 використовуючи дію множення: $350 \cdot 0{,}45 = 157{,}5$.

Відповідь: 157,5.

Задача 2 (***знаходження числа за його відсотком***). Знайти число, якщо 35% його становить 140.

Розв'язання

Перший спосіб. Нехай x – шукане число, тоді x – 100%, 140 – 35%. Складемо пропорцію $\frac{x}{140} = \frac{100}{35} \Rightarrow x = \frac{140 \cdot 100}{35} = 400$.

Другий спосіб. 35% = 0,35. Знайдемо число за його дробом дією ділення: 140 : 0,35 = 400.

Відповідь: 400.

Задача 3 (***знаходження числа відсотків, які одне число становить від іншого***)

Визначити, скільки відсотків становить 260 від числа 650.

Розв'язання

Нехай x – шукані відсотки. 650 – 100%, 260 – x%. Складемо пропорцію $\frac{650}{260} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{260 \cdot 100}{650} = 40\%$.

Відповідь: 40%.

18. *Властивості множини Q_+*

1) Множина Q_+ є лінійно впорядкованою.
2) У множині Q_+ немає найменшого числа.
3) У множині Q_+ немає найбільшого числа.
4) Множина Q_+ є щільною, тобто між двома її різними елементами міститься безліч елементів цієї множини.
5) Множина Q_+ зчисленна ($Q_+ \sim N$).

19. *Множина раціональних чисел*

Від'ємним раціональним числом називають число виду $-a$, де $a \in Q_+$. Множину від'ємних раціональних чисел позначають Q_-.

За цим означенням $Q_+ \sim Q_-$.

Об'єднанням множин Q_+, Q_- і $\{0\}$ називають ***множиною раціональних чисел і позначають Q***. Таким чином, $\boldsymbol{Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}}$, причому множини $\boldsymbol{Q_+}$, $\boldsymbol{Q_-}$, $\boldsymbol{\{0\}}$ попарно не перетинаються.

Властивості множини раціональних чисел аналогічні до властивостей множини $\boldsymbol{Q_+}$.

Множину **Q** можна подати у вигляді $Q = \{ \frac{p}{n} \mid p \in Z,\ n \in N \}$.

Означення. Модулем раціонального числа а називається число $|a|$, яке визначається рівностями:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \in Q_+ \cup \{0\} \\ -a, \text{ якщо } a \in Q_- \end{cases}.$$

Арифметичні операції додавання, віднімання, множення і ділення на множині **Q** є узагальненням цих операцій на множині **Q_+** і Z

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* дробу; додатному раціональному числу; суми додатних раціональних чисел; різниці додатних раціональних чисел; добутку додатних раціональних чисел; частки додатних раціональних чисел; десяткового дробу.
2. Який дріб називається правильним (неправильним)?
3. Чи існує найменше раціональне число? Відповідь обґрунтувати.
4. Чи існує найбільше раціональне число? Відповідь обґрунтувати.
5. Які властивості має множина раціональних чисел?
6. Чи завжди існує частка на множині раціональних чисел?
7. Який дріб називається періодичним?
8. Який дріб називається чистим (мішаним) періодичним?
9. Сформулювати основну властивість дробу.
10. Сформулювати правила додавання, віднімання, множення, ділення звичайних дробів.
11. Сформулювати властивості додавання та множення додатних раціональних чисел.
12. Сформулювати основні властивості десяткових дробів.
13. Сформулювати правила виконання арифметичних операцій над десятковими дробами.
14. Сформулювати правила перетворення періодичних дробів у звичайні.

Завдання для аудиторної роботи

1. Довести рівність дробів: а) $\frac{3}{5}$ і $\frac{6}{10}$; б) $\frac{36}{21}$ і $\frac{12}{7}$.

2. Записати три дроби, які рівні дробам: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{48}$. Чи використовували при цьому основну властивість дробу?

3. Звести дроби до найменшого спільного знаменника: а) $\frac{17}{24}$ і $\frac{7}{36}$; б) $\frac{14}{115}$ і $\frac{13}{48}$.

4. Кожний дріб перетворити у рівний йому нескоротний: $\frac{15}{20}$; $\frac{12}{225}$; $\frac{648}{964}$.

5. Довести, що: а) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{7} < \frac{4}{5}$.

6. Обчислити значення виразу:

а) $2+1\frac{2}{11}+3\frac{17}{22}+9\frac{1}{22}+7$;

б) $25\frac{7}{9}-8\frac{3}{4}-12\frac{5}{12}-2\frac{11}{8}$;

в) $4\frac{1}{4}:(11\frac{1}{3}\cdot 5\frac{1}{4})$.

7. Розв'язати рівняння на основі залежностей між компонентами і результатами дій:

а) $(\frac{1}{5}+x)-\frac{3}{8}=\frac{2}{5}$;

б) $2\frac{2}{3}\cdot x:\frac{4}{5}=25$;

в) $(\frac{5}{7}-x)+\frac{2}{11}=\frac{3}{14}$;

г) $7\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x=22\frac{1}{2}$.

8. Книга містить 140 сторінок тексту. Учень прочитав $\frac{5}{7}$ всієї книги. Скільки сторінок йому залишилось прочитати?

9. У бак налили 15 літрів води, що становить $\frac{3}{5}$ його об'єму. Який об'єм баку?

10. У садку сливові дерева складають $\frac{1}{6}$ усіх плодових дерев, яблуні $\frac{8}{15}$, а решта 360 дерев – грушеві. Скільки плодових дерев у садку?

Десяткові дроби.

11. Які з дробів можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу: $\frac{7}{8}$; $\frac{19}{40}$; $\frac{5}{48}$; $\frac{29}{2}$? Відповідь пояснити.

12. Записати десяткові дроби у вигляді звичайних нескоротних дробів: а) 0,225; б) 0,17; в) 13,345.

13. Виконати дії: а) 3,718 + 2,73; б) 12,125 – 8,3·0,05; в) 12,8:0,64 + 3,05:0,05.

14. Які з даних дробів зображуються чистими, а які мішаними періодичними дробами: а) $\frac{9}{13}$; б) $2\frac{7}{11}$; в) $\frac{117}{150}$; г) $5\frac{7}{60}$; д) $2\frac{5}{117}$.

15. Записати періодичні десяткові дроби у вигляді звичайних:
а) 0,(25); б) 15,(347); в) 0,13(749); г) 12,5(001); д) 10,00(105).

16. Знайти значення виразу: $(2\frac{4}{5}-0{,}0(6)):13\frac{2}{3}+3\frac{3}{65}\cdot 0{,}(26)$.

17. У трьох цехах заводу працює 2740 робітників. У другому цеху працює на 140 осіб більше, ніж у першому, а у третьому цеху – в 1,2 рази більше, ніж у другому. Скільки осіб працює у кожному цеху?

18. Змішали 30% розчин соляної кислоти з 10% і одержали 600г 15% розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

19. Вартість товару знизили на 20%, а потім збільшили на 20%. Чи змінилась початкова вартість товару?

20. Свіжі гриби містять 90% води, а сухі 12%. Скільки можна отримати сухих грибів із 22 кг свіжих грибів?

Завдання для самостійної роботи

21. Порівняти дроби: а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{7}{8}$; б) $\frac{2}{3}$ і $\frac{10}{15}$; в) $\frac{5}{12}$ і $\frac{7}{18}$.

22. Звести дроби до найменшого спільного знаменника: а) $\frac{7}{60}$ і $\frac{9}{40}$; б) $\frac{17}{52}$ і $\frac{11}{65}$.

23. Кожний дріб перетворити у рівний йому нескоротний: $\frac{12}{36}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{324}{482}$.

24. Обчислити значення виразу:

а) $(6-2\frac{4}{5})\cdot 3\frac{1}{6}-1\frac{3}{5}:\frac{1}{4}$;

б) $\dfrac{22\cdot\frac{8}{23}}{15:\frac{5}{8}}:\dfrac{2\frac{1}{3}:3\frac{1}{2}}{3\frac{1}{8}\cdot 1\frac{3}{5}}$.

25. Розв’язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) $(\frac{4}{5}+x):\frac{8}{11}=8\frac{1}{4}$; б) $(1\frac{2}{3}-x)\cdot\frac{3}{17}=\frac{5}{51}$.

26. За перші десять днів завод виконав $\frac{2}{5}$ місячного плану випуску машин, за другі десять днів – $\frac{3}{10}$, а за третю декаду – 900 машин. Який був місячний план випуску машин?

27. Які з дробів можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу, а які – у вигляді періодичного дробу (чистого чи мішаного)? Висновок обґрунтувати: а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{17}{15}$; в) $\frac{19}{24}$; г) $\frac{7}{50}$; д) $\frac{11}{250}$; е) $\frac{8}{21}$; є) $\frac{2}{75}$.

28. Подати дроби у вигляді звичайних дробів: 0,(13); 2,(123); 0,7(13); 51,21(4); 7,321(63).

29. Обчислити значення виразу: $(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}):\frac{22}{147}+(1,(5):0,1(8))\cdot\frac{17}{140}$.

30. Виконати дії: а) 5,312+12,5; б) 17,4:0,82; в) 34,12 – 2,35; г)2,3·0,005.

31. Розв’язати задачі:

а) знайти 25% від числа 340;

б) знайти вартість товару, якщо 12% його становить 24 грн.

в) скільки відсотків число 5 становить від 125 ?

32. Сторону *a* прямокутника зменшили на 10%, а сторону *b* збільшили на 10% . Чи змінилася площа прямокутника?

33. Сплав складається зі срібла та міді, причому маса срібла становить $14\frac{2}{7}\%$ маси міді. Який відсотковий вміст міді у сплаві?

Завдання підвищеної складності.

34. На множині дробів $A = \{\frac{1}{2};\ \frac{7}{8};\ \frac{4}{8};\ \frac{35}{40};\ \frac{25}{50};\ \frac{40}{80};\ \frac{1}{3}\}$ задано відношення рівності дробів. Побудувати граф цього відношення і записати усі підмножини, які складаються із рівних дробів.

35. Розташувати дроби у порядку зростання: а) $\frac{5}{10}$; $\frac{5}{21}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{219}$; $\frac{5}{142}$;

б) $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{13}$; $\frac{121}{197}$; $\frac{56}{73}$.

36. Які з чисел $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; 5; $\frac{3}{8}$ є розв'язками нерівності $x > \frac{2}{3}$?

37. Скоротити дроби: а) $\frac{9108}{924}$; б) $\frac{792}{1782}$.

38. Якщо до знаменника дробу додати 1, то він стане рівним числу 2. Знайти цей дріб, якщо його чисельник на 5 більший за знаменник.

39. Чисельник дробу на 3 більший за знаменник. Якщо чисельник дробу зменшити на 1, а знаменник збільшити у 2 рази, то одержаний дріб буде на 1 меншим за початковий. Знайти початковий дріб.

40. Розв'язати рівняння на основі залежностей між компонентами і результатами дій:

а) $3\frac{4}{15}:((2\frac{3}{4}x+4\frac{1}{2}):21\frac{3}{7})-1\frac{1}{8}=5\frac{7}{8}$;

б) $66\frac{3}{5}:(5+3\frac{1}{5}:(1\frac{3}{5}-\frac{4}{15}x))-7\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$.

41. Коли турист проїхав $\frac{3}{8}$ відстані між двома містами, то йому до половини шляху залишилося проїхати 15 км. Знайти відстань між містами.

42. У трьох гаражах 460 машин. Число машин першого гаража становить $\frac{3}{4}$ машин другого, а в третьому гаражі у півтора рази більше машин, ніж у першому. Скільки машин у кожному гаражі?

43. Обчислити значення виразу: а) $(1{,}3+0{,}7(6)+0{,}(36))\cdot\frac{110}{401}:\frac{55}{165}$;

б) $(1{,}2:36+1{,}8(3))1\frac{1}{4}-1{,}(3)$.

44. Сплав міді з оловом масою 12 кг містить 45% міді. Скільки чистого олова треба додати до сплаву, щоб одержати новий сплав із вмістом 40% міді?

45. З двох земельних ділянок зібрано 14,7 ц зерна. На другий рік на першій ділянці врожайність підвищилась на 80%, на другій – на 24% і зібрали з двох ділянок 21,42 ц зерна. Скільки зерна зібрали з кожної ділянки на другий рік?

46. Перше із невідомих чисел становить 140% другого, а відношення першого до третього дорівнює $\frac{14}{11}$. Знайти ці числа, якщо різниця між третім і другим числом на 40 одиниць менша числа, яке становить 12,5% суми першого і другого числа.

47. Є лом сталі двох сортів із вмістом нікелю 5% та 40%. Скільки потрібно взяти металу кожного із сортів, щоб одержати 140 т сталі із 30% вмістом нікелю.

5.3. ДІЙСНІ ЧИСЛА

1. *Ірраціональні числа*

Означення. Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називається ***ірраціональним числом.***

Множину ірраціональних чисел позначають ***I.***

Приклади ірраціональних чисел:

а) $\sqrt{2}=1,4142...$;

б) $\pi=3,1415926\ldots$(π – відношення довжини кола до діаметра, це число не є коренем жодного алгебраїчного рівняння);

в) $e = 2,7182\ldots, e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,7182\ldots$.

Множина ірраціональних чисел складається з множин додатних $\boldsymbol{I_+}$ і від'ємних $\boldsymbol{I_-}$ ірраціональних чисел. $I = \boldsymbol{I_+} \cup \boldsymbol{I_-}$.

2. ***Множиною дійсних чисел R*** називається об'єднання множини раціональних чисел Q та множини ірраціональних чисел $\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{R = Q \cup I}$).

Приклади: $2\frac{1}{3} \in R$; $-\sqrt{7} \in R$; $5 \in R$.

Числові множини знаходяться у такому відношенні: $\boldsymbol{N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R}$.

3. Дійсні числа можна зображати точками числової прямої.

Причому, кожному дійсному числу відповідає точка на координатній прямій і навпаки, кожній точці на прямій відповідає дійсне число (рис.38).

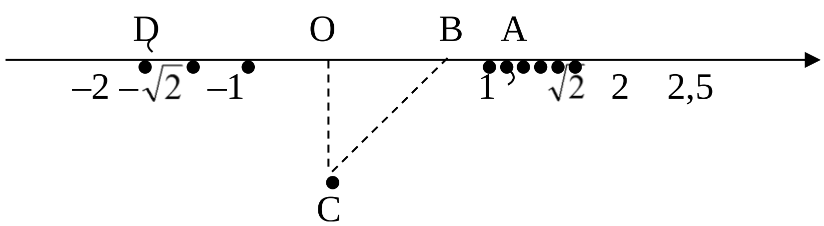


Рис.38

Приклад

Для зображення на координатній прямій точок $A(\sqrt{2})$ і $D(-\sqrt{2})$ використовуємо залежність: $OA = OD = BC$, де BC – гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами рівними одиниці.

4. ***Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа a*** називається число (позначають $|a|$), яке визначається рівностями:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Приклади

1. Якщо $a = 2{,}3$, то $|a| = 2{,}3$.

2. Якщо $a = -5\sqrt{2}$, то $|a| = 5\sqrt{2}$.

5. Будь-яке дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу періодичного чи неперіодичного: $a = \overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, де a_0 – ціла частина числа.

Нехай $a, b \in R$ і $a = \overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, $b = \overline{b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots}$, тоді:

1)$\boldsymbol{a = b}$, якщо для всіх i $a_i = b_i$, $i \in N_0$.

2) $\boldsymbol{a > b}$ ***(або b < a)***, якщо знайдеться таке натуральне число i, що $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …, $a_{i-1} = b_{i-1}$, $a_i > b_i$.

Приклади

1. Порівняти два числа $\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}$.

Розв'язання

Подамо числа $\sqrt{2}$ і $\sqrt{3}$ у вигляді десяткових дробів: $\sqrt{2} = 1{,}4142138...$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$. Бачимо, що цілі частини їх рівні (1=1), але наступні цифри різні: 4 < 7, отже, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

2. Порівняти числа $1\frac{2}{3} = 1{,}666\ldots$ і $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

Розв'язання

Цілі частини чисел рівні (1 = 1), порівняємо десяті частини: $6 < 7 \Rightarrow 1\frac{2}{3} < \sqrt{3}$ або $\sqrt{3} > 1\frac{2}{3}$.

6. ***Дії над дійсними числами***

Правила виконання арифметичних дій над дійсними числами

1. Якщо компонентами дій є раціональні числа, то використовуємо відповідні правила дій над ними.

2. Якщо хоч один із компонентів є ірраціональним числом, то подаємо обидва числа у вигляді десяткових дробів і беремо їх наближені значення з урахуванням точності обчислення.

Приклади

1. Знайти суму $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ з точністю до 0,01.

Розв'язання

Подаємо обидва числа у вигляді десяткових дробів:

$\sqrt{2} \approx 1{,}41421...$; $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

Візьмемо на один десятковий знак більше: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146 \approx 3{,}15$.

2. Знайти різницю чисел $\sqrt{2}$ і $1\frac{5}{6}$ з точністю до 0,01.

Розв'язання

Подаємо обидва числа у вигляді десяткових дробів:

$\sqrt{2} = 104142\ldots$; $1\frac{5}{6} = 1{,}8333\ldots$

Візьмемо на один знак більше, ніж вимагає умова:

$1\frac{5}{6} \approx 1{,}833$; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

$\sqrt{2} - 1\frac{5}{6} \approx 1{,}414 - 1{,}833 = -0{,}419 \approx -0{,}42\cdot$

3. Знайти добуток $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ з точністю до 0,1.

Розв'язання

Подаємо обидва числа у вигляді десяткових дробів:

$\sqrt{2}$ =1,41421..., $\sqrt{3}$ =1,73205...

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}41 \cdot 1{,}73=2{,}4393 \approx 2{,}4$.

4. Знайти частку $\frac{1}{6} : \sqrt{5}$ з точністю до 0,01.

Розв'язання

Подаємо обидва числа у вигляді десяткових дробів:

$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$; $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$

$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

$\frac{1}{6} : \sqrt{5} \approx 0{,}167 : 2.236 \approx 0{,}0746869\ldots \approx 0{,}07$.

7. *Властивості множини дійсних чисел*

1) Множина *R* є впорядкованою.

2) Множина *R* є необмеженою ні знизу, ні зверху.

3) Множина *R* є незчисленною, тобто, її елементи не можна пронумерувати на відміну від множини раціональних чисел *Q*.

4) Множина *R* є щільною, тобто між будь-якими двома її елементами міститься безліч дійсних чисел.

5) Множина *R* є неперервною, тобто в ній немає "стрибків", як у множині цілих чисел *Z*, немає "дірок", як у множині *Q*. Тобто, між точками числової прямої і множиною дійсних чисел *R* встановлено взаємно однозначну відповідність.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* ірраціонального числа; множини дійсних чисел; модуля дійсного числа; нескінченної (зчисленної) множини.

2. Яка множина називається дискретною?
3. Яка множина називається щільною?
4. Які властивості має множина дійсних чисел?
5. Як виконати дії над дійсними числами?
6. Чи існує найменше дійсне число? Відповідь обґрунтувати.
7. Чи існує найбільше дійсне число? Відповідь обґрунтувати.
8. Чи завжди існує частка на множині дійсних чисел?

Завдання для аудиторної роботи

1. У прямокутному трикутнику, з гострим кутом 60^0 і катетом рівним одиниці, знайти довжину гіпотенузи і довести, що довжину більшого катета не можна виразити жодним раціональним числом.

2. Довести, що не існує раціонального числа q, такого, що: а) $q^2 = 5$; б) $q^2=7$; в) $q^2=18$; г) $q=\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

3. Визначити, які з дробів є раціональними, а які ірраціональними числами: 2,323232…; 3,52(375); 1,(37); 1,212012001…; 5,417411741117…

4. Які з наступних висловлень є істинними, а які хибними:

а) будь-яке дійсне число x є раціональним числом;

б) будь-яке раціональне число x є дійсним;

в) існує дійсне число, яке не є раціональним;

г) $3,(4) \in Q$;

д) $3,(4) \in I$;

ж) $3,(4) \in R$;

з) $\sqrt{7} \in I$;

і) $\sqrt{7} \in R$;

5. Порівняти числа: а) 8,34 і $8\frac{1}{3}$ б) $2\frac{4}{7}$ і 2,(571428); в) 3,272727… і 3,27727772….

6. Знайти переріз, об’єднання та різницю множин:
а) N і R; б) Z і Q; в) Z і R.

7. Знайти три перших десяткових знака суми $x+y$, якщо:
а) x= 2,34871…, y= 5,63724…; б) $x=\frac{2}{3}$; $y = \pi$; в) $x=\sqrt{5}$; $y = \frac{5}{6}$;

8. Знайти два перших десяткових знака добутку $x \cdot y$, якщо:

а) x = 1,703504…, y = 2,04537…; б) $x=\sqrt{2}$; $y=\frac{1}{7}$; в) $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{7}$.

9. Знайти з точністю до 0,001 різницю $x - y$, якщо :

а) $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$; б) $x=1\frac{1}{3}$; $y=-\sqrt{2}$; в) $x=2\frac{5}{6}$; $y=7\frac{11}{13}$.

10. Обчислити з точністю до 0,01 частку $x:y$, якщо:

а) $x=\frac{2}{7}$; $y=\sqrt{5}$; б) $x=1\frac{3}{5}$; $y=\sqrt{7}$; в) $x=\sqrt{2}$; $y=\sqrt{3}$;

Завдання для самостійної роботи

11. Із множини $\left\{\frac{2}{3};4,2;7;\sqrt{7};0,2(34);\pi;\sqrt{9}\right\}$ виділити підмножину: а) раціональних чисел; б) ірраціональних чисел.

12. Довести ірраціональність чисел: $\sqrt{11}$; $3\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{19}}{5}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

13. Серед висловлень вказати істинні:

а) $\frac{5}{12}$=0,41(6); б) $\sqrt{13}$>3,6; в) $\sqrt{7} < 2\frac{3}{5}$;

14. Знайти суму та різницю чисел π=3,14159… і e=2,71828… з точністю до 0,01.

15. Знайти добуток і частку чисел з точність до 0,01:

а) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{11}$; б) $2\frac{3}{4}$ і $\sqrt{2}$.

16. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин:

а) *Q і R;* б)*N і Z;* в) *N і U.*

РОЗДІЛ VI. РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ. ФУНКЦІЇ

6.1. ВИРАЗИ. ЧИСЛОВІ РІВНОСТІ

1.*Числовий вираз* – це запис, який містить числа, знаки алгебраїчних операцій та дужки. Числові вирази позначаються великими літерами латинського алфавіту *A, B, C,...*

Приклади:

а) A = 24 – 9; B = (24 – 9): $\sqrt{3}$; C = 17 $\frac{5}{2}$ – числові вирази.

б) 25 – 3 = 22 – не є числовим виразом, бо знак " = " не є знаком алгебраїчних операцій.

Якщо у числовому виразі виконати всі зазначені операції (якщо це можливо), то дістанемо число, яке називають ***значенням числового виразу***.

Існують числові вирази, які *не мають* числового значення.

Приклад

Значення виразу $B=\frac{5}{2:2-1}$ не існує, тому що ділення на 0 неможливе.

2. *Порядок виконання арифметичних дій в числовому виразі*

Якщо числовий вираз не містить дужок, то спочатку виконуються дії множення та ділення, а потім додавання та віднімання зліва направо.

Якщо числовий вираз містить дужки, то спочатку виконуються дії в дужках.

Приклади

В дужках показано порядок дій:

$$\text{а) } A = \overset{(1)}{25 : 5} \overset{(3)}{-} 12 \overset{(2)}{\cdot} \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } B=(24 \overset{(1)}{:} 3 \overset{(2)}{-} 4)\overset{(3)}{\cdot} 2$$

3.*Числовою рівністю* називаються два числові вирази *A* і *B,* сполучені знаком “дорівнює” ($A = B$).

Приклад

25 : 5 = 4 + 1 – числова рівність.

Числова рівність – це висловлення, яке може бути істинним або хибним. Числова рівність істинна, якщо значення числових виразів, що стоять у правій і лівій частинах рівності, збігаються.

Приклади:

а) 14 – 4 = 2 · 5 – істинна рівність;

б) 14 – 1 = 7 · 2 – хибна рівність.

3. *Властивості числових рівностей:*

1) Якщо до обох частин істинної числової рівності додати один і той самий числовий вираз, то отримаємо істинну числову рівність.

2) Якщо обидві частини істинної числової рівності помножити або поділити на один і той же числовий вираз, що має зміст (при діленні враховувати, що на нуль ділити не можна), то отримаємо істинну числову рівність.

Приклад

Знайти помилку в міркуваннях, використовуючи властивості числових рівностей:

а) Доведемо, що 2=3.

Доведення

Розглянемо правильні числові рівності 10 – 10=0 і 15 – 15=0.Оскільки їхні праві частини рівні, то рівні й ліві частини: 10 – 10=15 – 15 або 2(5– 5) = =3(5–5). Скоротимо на вираз в дужках, отримаємо 2=3.

Помилка в доведенні: Значення виразу в дужках дорівнює нулеві, а тому ділення обох частин рівності на вираз (5 – 5) неможливий.

б) Доведемо, що 2· 2 = 5.

Доведення

Розглянемо правильну числову рівність 4 : 4 = 5 : 5. Винесемо у кожній частині спільний множник 4(1 : 1) = 5 (1 : 1). Числа у дужках рівні, тому 4= 5, тобто 2 · 2 = 5.

Помилка в доведенні: У процесі доведення допущено помилку: при винесенні спільного множника у лівій частині в дужках повинно залишитися (1 : 4), а в правій (1 : 5), а тому не можна здійснити поділ на одне і те саме число.

5. Вираз, в якому крім чисел та знаків арифметичних дій міститься змінна, називається ***виразом зі змінною (алгебраїчним виразом)*** і позначається ***A*(*x*).** Змінна може набувати конкретних значень з певної числової множини ***M***, яку називають ***множиною значень змінної.*** Множина $\boldsymbol{X \subset M}$, для якої вираз від змінної має значення, називається ***областю визначення цього виразу***.

Приклади

1) $A(x) = (x - 2 \cdot 5) : 5 + 2$.

Для виразу $A(x)$ $M = R$ і $X = R$, тобто $M = R$.

2) $B(x) = \dfrac{10}{x-1}$, $M = R$, проте не для кожного $x \in R$ вираз має числове значення. При $x = 1$ вираз не має значення.

Для виразу $B(x)$область визначення $X = R \setminus \{1\}$.

6. Два вирази $A(x)$ і $B(x)$ з непорожніми областями визначення називаються ***тотожно рівними***, якщо їх області визначення збігаються і для будь-якого числа a, що належить спільній області визначення виразів, значення останніх при $x = a$ рівні між собою. $A(x) = B(x)$– *тотожність*.

Приклади

1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$– тотожність.

2. $\dfrac{x^2}{4x} = \dfrac{x}{4}$–не є тотожністю.

Обґрунтування

Область визначення X_1 лівої частини і область визначення X_2 правої частини різні: $X_1 = R \setminus \{0\}$, $X_2 = R$.

Вирази $\dfrac{x^2}{4x}$ та $\dfrac{x}{4}$ є тотожно рівними на множині $M = R \setminus \{0\}$ ($M \subset X_1$, $M \subset X_2$).

Має місце рівність $\dfrac{x^2}{4x} = \dfrac{x}{4}$ при $x \in R \setminus \{0\}$.

Під ***тотожними перетвореннями алгебраїчних виразів*** розуміють послідовний перехід від виразу до тотожно рівного йому.

Розкладання многочлена на множники – це тотожне перетворення многочлена в добуток кількох співмножників – многочленів.

Розглядають вирази із кількома змінними.

7. ***Основні формули тотожних перетворень виразів***

Дії зі звичайними дробами

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \qquad a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}; \qquad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a;$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \qquad a : \frac{b}{d} = \frac{ad}{b}.$$

Формули скороченого множення

1. $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат суми (різниці);

2. $a^2 - b^2 = \left(a - b\right)\left(a + b\right)$; – різниця квадратів;

3. $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\left(a \pm b\right)$ - куб суми (різниці);

4. $a^3 \pm b^3 = \left(a \pm b\right)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$– сума (різниця) кубів;

5. $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, (де x_1 і x_2– корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$) – розклад тричлена на множники.

Властивості степенів

$a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$; $a^m \cdot b^m = \left(ab\right)^m$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Приклад

Спростити вираз $A\ (x) = \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x^3+1}{(x+1)(x-3)}$.

Розв'язання

Область визначення виразу $A\ (x)$: $X = R \setminus \{-1;\ 3\}$.

Виконаємо зазначені дії:

$$A(x) = \frac{x}{x-3} + \frac{x^3+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{x}{x-3} + \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x}{x-3} + \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x+x^2-x+1}{x-3} = \frac{x^2+1}{x-3}.$$

Отже, $A(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ при $x \in R \setminus \{-1;3\}$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* числового виразу; значення числового виразу; алгебраїчного виразу; області визначення алгебраїчного виразу; числової рівності.
2. Сформулювати правила порядку виконання дій в числовому виразі.
3. Як знайти область визначення виразу від змінної?
4. Які вирази називаються тотожно рівними?
5. Що означає виконати тотожне перетворення виразів?
6. Назвати та записати формули скороченого множення.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти числове значення виразу:

а) ((48:2 – 14) ·(12·2+ 18) +20):2;

б) (1,375 – 2,639 + 4,124) : (2,8 – 5,6 : 2);

в) (16,583 : 7,21 + 45,69 ·765,35 + 18,81 ·0,01) : 1,7 – 2,02;

г) (203,4 : 9 – (5,39 – 7,39)) : $(\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3})$.

д) 150, 24 – ((30 + 12, 477: 2,3) · 0,4 – 2,46) : 0,25 + 0,0752:0,4;

2. Знайти область визначення виразів:

а) $A(x)=\frac{x-1}{x+5}$; б) $B(x)=\frac{4x+11}{(x-2)(x+6)}$; в) $\frac{5x^3-5}{x+2}:\frac{(x+1)^2-x}{13x+26}$; г) $\frac{(x+1)^2-x}{13x+26}:\frac{5x^3-5}{x+2}$.

3. Спростити вирази :

а) $\frac{a-5}{a^2-5a}$;

б) $2x\,(2x+3)^2-(2x-3)(4x^2+12x+9)$;

в) $\frac{5x^3-5}{x+2}:\frac{(x+1)^2-x}{13x+26}$;

г) $\frac{a^2-6a+9}{a-3}$;

д) $\frac{p-1}{p}:\frac{2p-2}{p}$.

4. Обчислити:

а) (8,75т : 1,25 + 1,3 ц : 26 – 0,06т · 0,015) : (9, 01 кг: 17 –30г);

б) (0,75 т · 0,15 + 0,025 кг – 0,15 кг : 2) : (1,5 кг · 4 + 1 кг60 г).

Завдання для самостійної роботи

5. Знайти числове значення виразу:

а) (72 : 12 – (24 – 11)) : (25:5 – 4·4);

б) (((234 + 46) : 2 – 123):2 –5): 3 + 27;

в) ((34,89 –0,9) + 12):13 – 34·12,003;

г) 145 +23,45 – 35 ·12,6 + 54:12 ·5.

6. Знайти значення виразу:

$\frac{a-3}{a+4}:\frac{2a-3}{a}$ при $a=\frac{1}{3};\frac{2}{7};\sqrt{3};2{,}5$.

7. Знайти область визначення виразу:

а) $\frac{5x}{2x+5}$;

б) $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}$;

в) $\frac{125}{x^2-7x}$;

г) $\frac{3+5x}{x+45}$.

7. Спростити вирази :

а) $\frac{a^2-4}{a-2}$;

б) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{(x+1)^2}$;

в) $\left(\dfrac{m-2}{m+2}-\dfrac{m+2}{m-2}\right):\dfrac{8m}{m^2-4}$;

г) $\dfrac{a^2-5a+6}{a-3}$;

д) $\dfrac{p-1}{p^2}:\dfrac{3p-3}{p}$.

6.2 РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. *Рівняння з однією змінною*

Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$ – вирази зі змінною, X_1, X_2 – їх область визначення. ***Рівнянням з однією змінною*** називається рівність зі змінною (предикат):

$f_1(x) = f_2(x)$, $X = X_1 \cap X_2$ –***область визначення*** рівняння.

Приклад

$\dfrac{x-1}{x+2} = 3x + 1$ – рівняння.

Нехай $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$; $f_2(x) = 3x + 1$.

$X_1 = R \setminus \{-2\}$; $X_2 = R$. $X = X_1 \cap X_2 = R \setminus \{-2\}$.

$X = R \setminus \{-2\}$ – *область визначення рівняння.*

2. Розв'язком або коренем рівняння називається значення змінної з області визначення рівняння, яке перетворює дане рівняння в істинну числову рівність.

Приклад

$(x-3)(x+2) = x + 2$. Рівняння має два *корені:* $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

$\{-2; 4\}$ – *множина розв'язків.*

Розв'язати рівняння означає знайти множину його розв'язків.

3.Рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ та $q_1(x) = q_2(x)$ називаються ***рівносильними,*** якщо їх області визначення рівні й множини розв'язків збігаються.

Приклад

Рівняння $(x+3)(x-2) = 0$ та $(x^2+3)(x+3)(x-2) = 0$ рівносильні, тому що їх області визначення рівні (множина дійсних чисел R), а їх множини розв'язків збігаються, і для рівняння $(x+3)(x-2) = 0$ і для рівняння $(x^2+3)(x+3)(x-2) = 0$ множиною розв'язків є $\{-3; 2\}$.

4. *Теореми про рівносильні рівняння*

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ з областю визначення X додати один і той самий вираз зі змінною $q(x)$, визначений на тій самій множині, то отримаємо нове рівняння, рівносильне даному, тобто:

$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) + q(x) = f_2(x) + q(x)$.

Наприклад, $2x = 2+x \Leftrightarrow 2x + 88x^2 = 2+x + 88x^2$.

Наслідок 1. Якщо до обох частин рівняння додати одне і те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, $2x = 2+x \Leftrightarrow 2x + 88 = 2+x + 88$.

Наслідок 2. Якщо будь-який член рівняння (числовий або алгебраїчний вираз) перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши знак члену на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, $2x + 9 = 108 - x \Leftrightarrow 2x + x = 108 - 9 \Leftrightarrow 3x = 99$.

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ з областю визначення X помножити на один і той самий вираз зі змінною $q(x)$, який визначений на тій самій множині, і не перетворюється на цій множині в нуль, то отримаємо рівняння, рівносильне даному: $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x)\,q(x) = f_2(x)\,q(x)$.

Наслідок. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, $3x = 99 \Leftrightarrow x = 33$ – обидві частини рівняння поділили на 3.

Зауваження 1. Рівняння вигляду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ можна замінити рівносильною системою $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

Зауваження 2. Якщо рівняння має вигляд $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, то ділення обох його частин на $h(x)$, як правило, недопустимо, оскільки може привести до втрати коренів; у цьому випадку можуть бути втрачені корені рівняння $h(x) = 0$, якщо вони існують.

Приклад

$\frac{1}{2}x + 3 = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$ $(\times 10)$(*наслідок з теореми* 2).

$5x + 30 = 4x + 5$

$5x - 4x = 5 - 30$ *(наслідок 2 з теореми 1).*

$x = -25$

Відповідь: $\{-25\}$.

5. *Методи розв'язування рівнянь*

Метод рівносильних перетворень передбачає заміну одного рівняння іншим, йому рівносильним використовуючи теореми 1, 2 та наслідки з них.

Приклад

Розв’язати рівняння $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$.

Розв’язання

1. Знайдемо *ОВ (область визначення)* рівняння:

$$\begin{cases}3-x\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty).$$

2. Перенесемо всі члени рівняння у ліву частину і перетворимо одержаний вираз:

$$\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}\Rightarrow\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}-\frac{6}{x(3-x)}=0\Rightarrow\frac{x^2-7x+12}{2x(3-x)}=0.$$

3. Знаходимо корені рівняння $x^2-7x+12=0$. За теоремою Вієта $x_1=3$, $x_2=4$.

4. Зі знайдених коренів тільки $x_2=4$ належить *ОВ* рівняння, тому це і є шуканий розв’язок рівняння.

Відповідь: $\{4\}$.

Метод заміни змінної

Цей метод застосовується тоді, коли рівняння містить кілька однакових (виразів зі змінною). Вирази можна замінити і, тим самим, спростити подальше розв’язання рівняння. Зазвичай така заміна зводить рівняння до квадратного.

Приклад

Розв’язати рівняння $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$.

Розв’язання

1. Знайдемо *ОВ (область визначення)* рівняння: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Схожість знаменників дробів, що стоять у лівій частині рівняння, наводить на думку можливості такої заміни: $t=x^2+4$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\frac{4}{t}+\frac{5}{t+1}=2.$$

Це рівняння можна розв’язати методом рівносильних перетворень:

$$\frac{4}{t}+\frac{5}{t+1}=2\Rightarrow\frac{4(t+1)+5t-2t(t+1)}{t(t+1)}=0\Rightarrow\frac{2t^2-7t-4}{t(t+1)}=0.$$

Рівняння звелося до квадратного відносно змінної t: $2t^2-7t-4=0$.

Його розв’язки $t_1=-\frac{1}{2}$ та $t_2=4$.

3. Повертаючись до заміни, отримуємо та розв’язуємо таку

сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4=-\frac{1}{2} \\ x^2+4=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-4\frac{1}{2} \\ x^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=0.$$

4. Оскільки $x = 0$ належить області визначення рівняння, то ми знайшли шуканий розв'язок.

Відповідь: $\{0\}$.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* рівняння з однією змінною; області визначення рівняння; кореня (розв'язка) рівняння; рівносильних рівнянь.
2. Як знайти область визначення рівняння?
3. Що означає розв'язати рівняння?
4. Сформулювати теореми про рівносильні рівняння.
5. Які методи розв'язування рівнянь ви знаєте?

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $(x^2 - 9)(x + 0,7) = 0$;

б) $(x - 2)(x + 3) = (x + 7)(x + 3)$;

в) $\frac{3x-4}{x-3}=4$;

г) $\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x+1}=\frac{4}{x^2-2x-3}$;

д) $\frac{x}{6}+\frac{x-5}{6-3x}=\frac{x}{2x-4}$.;

є) (3 год 15 хв. + 1,25 год – 0,5 год + x год x хв. = 1 доба.

2. Розв'язати рівняння з параметром b відносно змінної x:

а) $bx = 5$;   б) $2 + bx = x$.

3. Чи існує таке значення a, при якому сума дробів $\frac{a-7}{3a+5}$ і $\frac{2a+6}{3a-1}$ дорівнює 1?

4. Розв'язати рівняння на множині X:

а) $x^2 + 5 = 0$, $X = R$;   б) $x = x$, $X = N$;   в) $7 + |x| = 22 - 2|x|$, $X = Q$;

г) $|7-3x| = 2$, $X = Z$.

5. Розв'язати задачі:

а) Бригада повинна була виконати замовлення за 12 днів. Перевиконуючи щоденно норму на 25%, за 10 днів роботи вона не тільки виконала замовлення, але й виготовила на 42 деталі більше. Скільки деталей в день виготовляла бригада?

б) Від пристані A до пристані B відійшов катер. Через 40 хвилин після цього від пристані A відійшов моторний човен, швидкість якого на 6 км/год більша швидкості катера. До пристані *B* моторний човен прибув на 10 хвилин пізніше, ніж катер. Відстань між пристанями 90 км. Знайти швидкості катера та моторного човна.

в) На виготовлення однієї деталі перший робітник втрачає на 6 хвилин менше, ніж другий. Скільки деталей виготовить кожний із них за 7 годин, якщо перший виготовив за цей час на 8 деталей більше?

г) Господиня купила рожевих і білих грейпфрутів по 17 грн і по 12 грн за кілограм. За всю покупку вона заплатила 69 грн. Скільки куплено грейпфрутів кожного виду, якщо рожевих куплено на $1\frac{1}{2}$ кг більше, ніж білих?

д) Число $73\frac{17}{30}$ розділили на 3 частини. При цьому друга частина більша за третю на $7\frac{59}{60}$, а перша більша другої на $8\frac{7}{20}$. Чому дорівнює кожна частина?

є) Господар вирушив на мопеді у райцентр, що знаходиться на відстані 48,4 км від його оселі. Цей шлях мопед подолав за $1\frac{1}{3}$ год, причому перші 20 хвилин він ішов зі швидкістю на 9,6 км/год більше, ніж в інший час. З якою швидкістю мопед рухався останню годину шляху?

ж) Відстань від дому до університету студент проходить пішки за 45 хвилин, а на велосипеді цю ж відстань він проїжджає за 0,4 години. На якій відстані живе студент від університету, якщо на велосипеді він проїжджає за годину на 7 км більше, ніж проходить пішки?

Завдання для самостійної роботи

6. Розв’язати рівняння:

а) $\dfrac{2x+3}{4}+\dfrac{3x-2}{2}=\dfrac{3(x-4)}{5}+5(x+4);$

б) $\dfrac{3x+4}{x-2}+\dfrac{2x+3}{x-5}=5;$

в) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2x-4}-\dfrac{3}{2x-6};$

г) $\dfrac{32}{x^2-16x+60}+\dfrac{8}{x-6}=\dfrac{x}{x-10};$

д) $\dfrac{3x-2}{x-3}+\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{15x-3}{x^2-9}.$

7. Розв’язати рівняння $S = 2d\,(n-2)$відносно n.

8. Розв’язати задачі:

а) В одній діжці на 5л бензину більше, ніж у другій. Коли у першу долили 10 л, а у другу – 35 л, у другій стало у 2 рази більше бензину, ніж у першій. Скільки бензину було у двох діжках?

б) Турист проплив за течією річки на плоту 12 км, а повернувся на човні, швидкість якого у стоячій воді 5 км/год, витративши на все 10 год. Знайти швидкість течії річки.

в) На виготовлення однієї деталі перший робітник витрачає на 10 хвилин менше, ніж другий. Скільки деталей виготовить кожний із них за 14 годин, якщо перший робітник виготовив за цей час на 7 деталей більше?

г) Від мотузки відрізали: половину її довжини і 0,5 м, потім половину залишку і 0,5 м, після чого залишилося 6 м. Знайти довжину цілої мотузки.

д) Яке число потрібно додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{7}{4}$, щоб дріб став рівним $\frac{3}{2}$?

є) Автобус Київ-Харків виїхав з Києва і рухався зі швидкістю 80 км/год в сторону Харкова, через 2 години на Харків з Києва виїхала маршрутка, швидкість якої 100 км/год. Через скільки годин і на якій відстані від Києва маршрутне таксі наздожене автобус?

ж) Гас містить 0,007 своєї ваги кисню, 0,144 своєї ваги водню і 84,9 г вуглецю. Визначити вагу гасу.

з) Мати на 34 роки старша за дочку. Через 7 років мати стане вдвічі старшою за дочку. Скільки років матері й скільки дочці?

6.3. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

1. ***Рівнянням з двома змінними*** називається двомісний предикат

$f_1(x,y) = f_2(x,y)$ або $f(x,y) = 0$.

Наприклад, $2x - 3y = 1 + 5x; x^2 + xy - 2 = 0$ – рівняння з двома змінними.

2. ***Розв'язком рівняння з двома змінними*** називається упорядкована пара (a, b) значень змінних, яка це рівняння перетворює у істинну числову рівність.

Рівняння з двома змінними може мати:

а) *один розв'язок* ($x^2 + y^2 = 0$, єдиний розв'язок (0; 0));

б) *декілька розв'язків* $(6 - |x|)^2 + (|y| - 1)^2 = 0$ має 4 розв'язки: (6; 1), (–6; 1), (6; –1), (–6; –1);

в) *мати безліч розв'язків* ($x + y = 7$, розв'язок можна записати у вигляді $(k; 7 - k)$, где k – будь-яке дійсне число);

г) *не мати жодного розв'язка* (рівняння $x^2 + y^2 = -7$не має розв'язків).

Приклад

Розв'язати рівняння $2x - 3y = 10$.

Розв'язання

Виразимо у рівнянні $2x - 3y = 10$ змінну x через змінну y, отримаємо:

$x = 5 + \frac{3}{2}y$. Надаючи змінній y значень з множини дійсних чисел отримаємо множину розв'язків $(5 + \frac{3}{2}k;\ k)$ $(k \in R)$. Так, якщо $k = 0;\ \ 1;\ -2$, одержимо розв'язки рівняння: (5;0),$(6\frac{1}{2};1)$, (2;–2).

Вдповідь: $\{(5+\frac{3}{2}k\ ;k)\}$, $k\in R$

3. Упорядкована пара (a, b) є ***координатами*** точки площини. Множина всіх таких точок, координати яких задовольняють рівняння, є ***графіком рівняння***.

Приклади

1) $x^2 + y^2 = 0$ – *графіком є точка O* (0,0);

2) $x^2 + y^2 = -1$ – порожня множина, (рівняння розв'язків не має).

4. ***Рівняння кола*** з центром у точці *O (a,b),* радіусом R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Рівняння кола з центром у початку координат,радіусом R: $x^2+y^2=R^2$.

Приклади

1) Рівняння кола з центром у точціO(0; 0); $R = 4$,$x^2 +\ y^2 = 16$ (рис. 26);

2) Рівняння кола з центром у точціO (2; –3); $R = 4$, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.

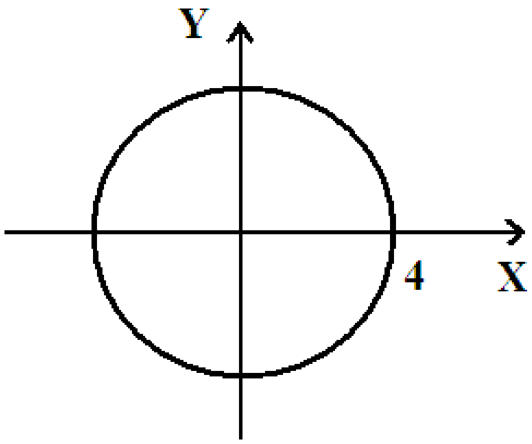


Рис. 26

5. ***Загальне рівняння прямої*** : $Ax + By + C = 0$. A, B и C – будь-які сталі, причому $A^2 + B^2 \neq 0$.

Приклад

Запишемо загальне рівняння прямої, якщо $A = 3$, $B = 4$, $C = 5$. Маємо: $3x + 4y + 5 = 0$.

6. ***Рівняння прямої у відрізках:*** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$) (рис. 27). Пряма перетинає вісь Ox у точці (a,0) і вісь Oy у точці (0,b).

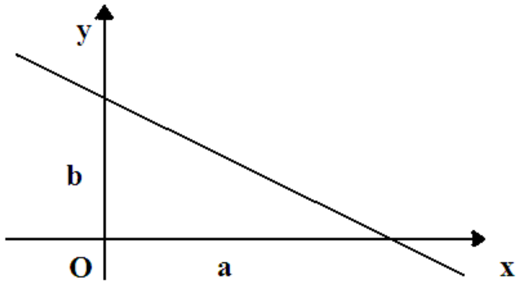


Рис.27

Приклад

Записати рівняння прямої $y=-\frac{1}{4}x+1$ «у відрізках».

Розв'язання

Знайдемо точки перетину прямої з осями, для цього надамо x та y нульового значення. Значенню $y_1 = 0$ відповідає $x_1 = 4$. При $x_2 = 0$ знаходимо $y_2 = 1$. Отже, $a = 4$, $b = 1$і шукане рівняння прямої подається у вигляді

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=1.$$

Пряма перетинає вісь Ox у точці з координатою $x = 4$, а вісь Oy– у точці з координатою $y = 1$.

7. ***Рівняння з кутовим коефіцієнтом:*** $y = kx + b$**.**

$k = tg\,\alpha$ – тангенс кута α (α – кут нахилу прямої до вісі Ox) називають *кутовим коефіцієнтом прямої* (рис. 28).Пряма перетинає вісь Oy в точці $(0, b)$. і утворює кут α з додатним напрямом вісі Ox .

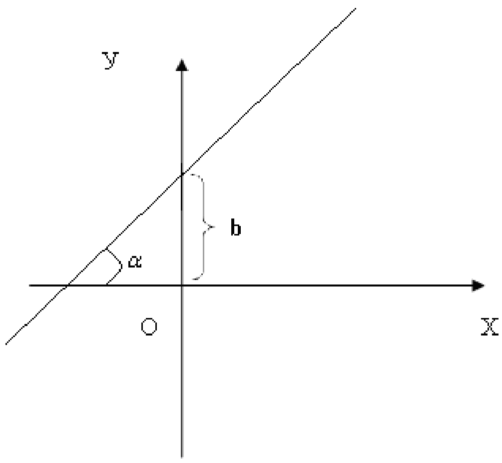


Рис.28

Якщо $b = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Якщо $k = 0$, то пряма набуває вигляду $y = b$ – це пряма, що проходить через точку $(0;b)$ паралельно вісі Ox.

$\boldsymbol{x = a}$ – пряма, що проходить через точку $(a; 0)$ паралельно вісі Oy.

Приклади

1. $x - y = 0$ (рис. 29).

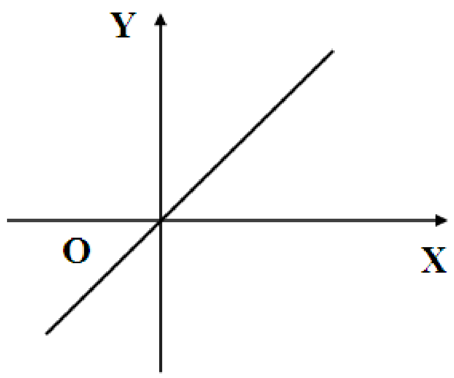


Рис. 29

2. $x = 3$ (рис. 30).

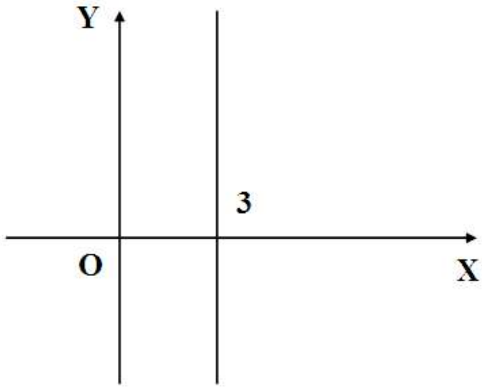


Рис. 30

3. $y = 5$ (рис. 31).

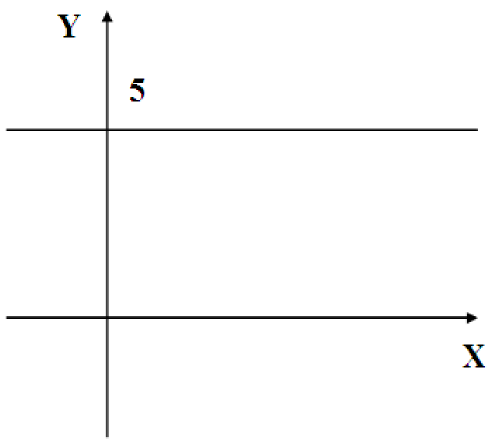


Рис. 31

8. Два рівняння, які мають однакові множини розв'язків або однакові графіки, називаються ***рівносильними***.

Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = 0$ та $5x^2 + 5y^2 = 0$ є рівносильними, бо їх множини розв'язків однакові: $\{(0;0)\}$.

Теореми про рівносильність аналогічні до теорем про рівносильність рівнянь з однією змінною.

9. ***Системою рівнянь з двома змінними*** $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$ називається кон'юнкція цих рівнянь: $f_1(x, y) = 0 \wedge f_2(x, y) = 0$.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називається упорядкована пара чисел (a, b), яка при підстановці в обидва рівняння перетворює їх у істинні числові рівності: $f_1(a, b)$, = 0 і $f_2(a, b) = 0$.

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

10. Основні методи розв'язування систем рівнянь

1) *Метод підстановки.* В одному з рівнянь системи виражають одну змінну через іншу. Отриманий вираз підставляють в інше рівняння системи, в результаті утворюється рівняння з однією змінною, розв'язують це рівняння, а розв'язок підставляють в інше рівняння, розв'язуючи його, знаходять відповідне значення іншої змінної.

2) *Метод алгебраїчного додавання.* При розв'язуванні системи цим методом переходять від даної системи до рівносильної їй системи, виконуючи почленне додавання або віднімання рівнянь, з метою виключення однієї змінної. Це можливо за умови однакових за модулем коефіцієнтів при x чи y .

3) *Графічний метод.* Щоб розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічним способом, потрібно побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат і знайти координати спільних точок цих графіків.

Але цей метод не є основним при розв'язуванні системи рівнянь, тому що він не завжди дає точні результати.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь двома методами (методом підстановки та методом алгебраїчного додавання):

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

Розв'язання

1) <u>Метод підстановки.</u>

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - (1 - x) = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 2x - 1 + x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

$(0,1)$ – розв'язок системи.

2) <u>Метод алгебраїчного додавання.</u>

$$\begin{cases} x + y = 1,^{(1)} \\ 2x - y = -1;^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0,^{(1)+(2)} \\ 2x - y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

$(0,1)$ – розв'язок системи.

2. Розв’язати графічним методом систему $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

Розв’язання

Перше рівняння є рівнянням прямої, друге – рівнянням кола. Побудуємо графіки цих рівнянь. Координати їх точок перетину є розв’язком системи (рис. 48).

$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$.

x	0	3
y	3	0

(0,3), (3,0) – координати точок першої прямої.

$x^2 + y^2 = 9$ – коло з центром у точці (0;0) та радіусом 3. Точки перетину з осями (0,3), (3,0)

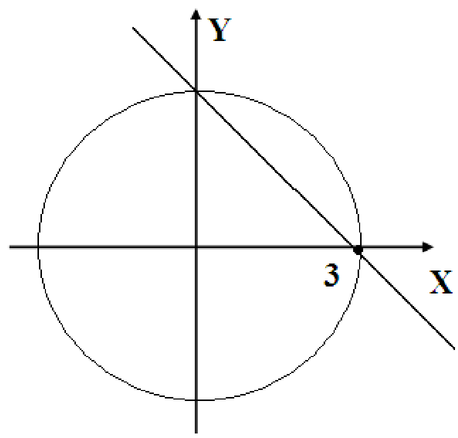


Рис. 32

(0,3), (3,0) – точки перетину ліній.

$\{(0,3),\ (3,0)\}$ – множина розв’язків системи.

11. ***Окремі типи текстових задач, які розв’язуються складанням системи рівнянь з двома змінними***

1)Задачі на знаходження числа за сумою та різницею розв’язуються складанням системи:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = c \end{cases}$$

Задача 1

Фермер засіяв два лани площею 6,5 га пшеницею та гречкою, причому гречкою на 2,5 га менше. Скільки гектарів землі засіяно пшеницею, а скільки гречкою?

Відповідна система:

$$\begin{cases} x + y = 6{,}5 \\ x - y = 2{,}5 \end{cases}$$

Для розв’язання доцільно застосувати метод додавання:

$$\begin{cases} 2x = 9, \\ x - y = 2{,}5; \end{cases} \begin{cases} x = 4{,}5 \\ y = x - 2{,}5 \end{cases} \begin{cases} x = 4{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Арифметичний спосіб розв'язування задачі:

1) 6,5 + 2,5 = 9 (га) – засіяв би фермер, як що площі обох ланів булиб однакові;

2) 9 : 2 = 4,5 (га) – площа лану пшениці;

3) 4,5 – 2,5 = 2 (га) – площа лану гречки.

Відповідь: 4,5 га; 2 га.

2)Задачі на знаходження числа за сумою та кратним відношенням розв'язуються складанням системи:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x : y = c \end{cases}$$

Задача 2.

Фермер засіяв два лани площею 6,3 га пшеницею та гречкою, причому площа, засіяна гречкою, в 2 рази менша, ніж пшеницею. Скільки гектарів землі засіяно пшеницею, а скільки гречкою?

Відповідна система:

$$\begin{cases} x + y = 6{,}3 \\ x : y = 2 \end{cases}$$

Доцільно застосувати метод підстановки:

$$\begin{cases} x + y = 6{,}3 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} 2y + y = 6{,}3 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} 3y = 6{,}3 \\ x = 2y \end{cases} \begin{cases} y = 2{,}1 \\ x = 4{,}2 \end{cases}$$

Арифметичний спосіб розв'язування задачі:

1) 2 + 1= 3 (частини) – складає площа обох ланів;

2) 6,3 : 3 = 2,1 (га) – площа лану гречки;

3) 2,1 ·2 = 4,2 (га) – площа лану пшениці.

Відповідь: 4,2 га; 2,1 га.

3)Задачі на виключення одного з невідомих розв'язуються складанням системи:

$$\begin{cases} kx + ly = a \\ bx + dy = c \end{cases}$$

Задача 3.

Букет, що складається з 3 жовтих та 4 блакитних троянд коштує 64 гривні, а букет з 5 жовтих та 3 блакитних троянд коштує 70 гривень. Скільки коштує жовта і скільки коштує блакитна троянди?

Відповідна система:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 64 \\ 5x + 3y = 70 \end{cases}$$

Доцільно застосовувати метод додавання, попередньо помноживши перше рівняння на 5, а друге на –3 :

$$\begin{cases}15x+20y=320\\ -15x-9y=-210\end{cases}\begin{cases}3x+4y=64\\ 11y=110\end{cases}\begin{cases}3x=24\\ y=10\end{cases}\begin{cases}x=8\\ y=10\end{cases}$$

Відповідь: 8 грн, 10 грн.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* рівняння з двома змінними; розв'язку рівняння з двома зміними; системи рівнянь з двома змінними; розв'язку системи рівнянь з двома змінними.
2. Що є графіком рівняння?
3. Які методи розв'язування системи рівнянь ви знаєте?
4. Які типи текстових задач розв'язуються системою рівнянь з двома змінними?
5. Які лінії є графіками таких рівнянь:

а) $x^2 + y^2 = R^2$; б)$(x – a)^2+(y – b)^2 = R^2$; в) $Ax + By + C = 0$?

6. Записати рівняння прямої у відрізках.
7. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
8. Записати рівняння кола з центром у точці (2; 3) і радіусом 5.
9. Побудувати пряму, рівняння якої $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.
10. Побудувати прямі: $x = 7$; $y = 4$.
11. Побудувати коло $(x –3)^2 + (y –1)^2 = 16$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Скласти рівняння прямої, що має кут нахилу $\alpha=\frac{\pi}{4}$ і початкову ординату $b = –1$.
2. Знайти кут нахилу і початкову ординату прямої $2x – 4y – 3 = 0$
3. Записати рівняння прямої $2x + 3y + 6 = 0$ у відрізках на осях.
4. Записати рівняння кола з центром $C(5; –3)$ і радіусом $R = 5$.
5. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 – 8x + 10y + 5 = 0$ є рівнянням кола. Знайти його центр і радіус.
6. Розв'язати систему рівнянь трьома способами: $\begin{cases}x+y=8,\\ 3x-y=-6.\end{cases}$
7. Розв'язати графічним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ 4x-3y=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+5y=13,\\ 3x-4y=-5.\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-4y=1, \\ 6x-8y=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=81-y^2, \\ x-3y=0. \end{cases}$$

8. Розв’язати задачі:

а) Дві бригади працюючих повинні були виконати роботу за 12 днів. Перші 8 днів бригади працювали разом, а потім працювала лише друга бригада і закінчила всю роботу за 7 днів. За скільки днів могла б виконати всю роботу кожна бригада, працюючи окремо?

б) Якщо двозначне число поділити на добуток його цифр, то часткою буде 1, а остачею – число 16. Якщо ж до квадрата різниці цифр цього числа додати добуток його цифр, то одержимо задане число. Знайти це число.

в) Відстань між двома селами річкою становить 20 км. Човен проплив туди й назад без зупинок за 10 годин. Знайти швидкість течії річки, якщо відомо, що човен проплив 2 км проти течії річки за стільки ж часу, що і 3 кмза течією річки.

г) Два велосипедисти виїхали одночасно і їдуть в одному напрямку по колу, довжина якого 900 м. Велисипедист, який їде швидше, через кожні 18 хвилин наздоганяє іншого. Якщо вони виїдуть одночасно з однієї точки кола назустріч один одному, то будуть зустрічатися через кожні 2 хвилини. Знайти швидкість кожного велосипедиста.

Завдання для самостійної роботи

9. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 – 8x – 6y + 21 = 0$ є рівнянням кола. Знайти його центр і радіус.

10. Навести приклад рівняння прямої з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$. Записати це рівняння у відрізках на осях.

11. Розв’язати систему трьома способами: $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 5x+2y=7. \end{cases}$

12. Розв’язати графічним способом систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=64, \\ x-5y=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 5x+y=11. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2=1+y\ , \\ x-y=0. \end{cases}$

13. Розв'язати задачі:

а) Двом робітникам дано завдання виготовити партію деталей. Після того як перший попрацював 7 годин і другий 4 години, виявилося, що вони виконали $\frac{5}{9}$ всієї роботи. Попрацювавши ще 4 години, вони виявили, що їм залишається виконати $\frac{1}{18}$ всієї роботи. За скільки годин кожний із робітників, працюючи окремо, міг би виконати всю роботу?

б) Сума цифр задуманого двоцифрового числа дорівнює 6. Якщо цифри цього числа переставити, то отримаємо число, яке складає $\frac{4}{7}$ задуманого. Яке число задумали?

в) Якщо довжину прямокутної ділянки зменшити на 20 м, а ширину збільшити на 20 м, то її площа збільшиться на 0,1 га; якщо ж довжину збільшити на 30 м, а ширину зменшити на 10 м, то площа ділянки збільшиться на 0,2 га. Визначити площу земельної ділянки.

г) Першого дня патрульний катер пройшов за 4 години 50 км за течією річки і 24 км проти течії, а другого дня за 6 годин пройшов70 км за течією і 40 км проти течії. Визначити швидкість катера в стоячій воді і швидкість течії річки.

д) Знайти дріб, який перетворюється в $\frac{3}{4}$, якщо до його чисельника і знаменника додати по одиниці і в $\frac{2}{3}$, якщо відняти по одиниці.

6.4. НЕРІВНОСТІ. СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

1. *Означення.* Два числові вирази A і B, сполучені знаком > або <, називаються ***числовою нерівністю*** ($A > B$; $A < B$).

Приклад

$5 - 4 < 2 + 1$ – числова нерівність.

Означення. Число a ***менше*** від числа b (число a ***більше*** від числа b), якщо $a - b < 0$ ($a - b > 0$).

Приклад

$1 < 2$, оскільки $1 - 2 < 0$.

Щоб *порівняти* два числові вирази знаходять їх *числові значення* і *порівнюють*ці значення.

Наприклад, для доведення істинності числової нерівності$5 - 4 < 2 + 1$, знаходимо числові значення виразів, що стоять у правій і лівій частинах, отримуємо істину числову нерівність $1 < 3$.

2. ***Властивості числових нерівностей***

1) Якщо $A < B$ істинна числова нерівність, а C – числовий вираз, що має значення, то нерівність $A + C < B + C$ також є істинною.

2) Якщо $A < B$ − істинна числова нерівність, а C – числовий вираз, що має значення $\delta(C) > 0$ ($\delta(C) < 0$), *то* $A\,C < B\,C$ ($A\,C > B\,C$) – істинна числова нерівність.

3. ***Нерівності з однією змінною.*** Нехай $f_1(x)$ та $f_2(x)$ вирази від змінної x. X_1, X_2 їх області визначення. $X = X_1 \cap X_2$.

Означення. ***Нерівністю з однією змінною*** називається предикат $f_1(x) > f_2(x)$ ($f_1(x) < f_2(x)$), X − область визначення нерівності.

Приклад

Знайти область визначення нерівності: $\frac{2}{x-1} > \frac{x+1}{x^2-1}$.

Розв'язання

Область визначення першого виразу: $X_1 = R \setminus \{1\}$, область визначення другого виразу: $X_2 = R \setminus \{-1;1\}$. Область визначення нерівності: $X = X_1 \cap X_2 = R \setminus \{-1;1\}$.

Означення. ***Розв'язком нерівності з однією змінною*** називається значення змінної з області визначення, при підстановці якої в нерівність утворюється істинна числова нерівність. ***Розв'язати нерівність*** – означає знайти множину її розв'язків.

Приклад

Визначити істинність нерівності $2x + 1 > 3 - x$ при $x = 1$.

Розв'язання

$2 \cdot 1 + 1 > 3 - 1 \Rightarrow 3 > 2$ – істинна числова нерівність, отже $x = 1$ – розв'язок нерівності.

Означення. Дві нерівності називаються ***рівносильними***, якщо їх області визначення збігаються і множини їх розв'язків рівні між собою.

Наприклад, нерівності $x + 1 < 5$ та $3x < 12$ рівносильні, бо мають спільну область визначення R, їх множини розв'язків рівні: $(-\infty; 4)$.

4. При ***розв'язуванні нерівностей*** використовують метод рівносильних перетворень, який ґрунтується на таких *твердженнях*:

1) Якщо з однієї частини нерівності перенести в другу член з протилежним знаком, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.

2) Якщо обидві частини нерівності з однією змінною помножити або поділити на одне і те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

3) Якщо обидві частини нерівності з однією змінною помножити або поділити на одне і те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

4) Якщо обидві частини нерівності з однією змінною помножити або поділити на один і той самий вираз, що при всіх значеннях змінної приймає додатні значення, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

5) Якщо обидві частини нерівності з однією змінною помножити або поділити на один і той самий вираз, що при всіх значеннях змінної приймає від'ємні значення, змінивши при цьому знак нерівності, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Приклади

1) Нерівність $\frac{8x+15}{x-11} < 22x$ рівносильна нерівності $\frac{8x+15}{x-11} - 22x < 0$ ($X = R \mid \{11\}$) (використали твердження 1: перенесли вираз $22x$ з однієї частини в іншу з протилежним знаком).

2) Нерівність $\frac{8x+15}{x-11} < 22x$ рівносильна нерівності $\frac{8x+15}{22(x-11)} < x$ ($X=R|\{11\}$) (використали твердження 2: виконали ділення обох частин нерівності на додатне число 22).

3) Нерівність $\frac{8x+15}{x-11} < 22x$ ($X = R \mid \{11\}$) рівносильна нерівності $-\frac{8x+15}{22(x-11)} > -x$ (використали твердження 3: виконали ділення обох частин нерівності на від'ємне число (–22), змінивши знак нерівності на протилежний).

4) Якщо нерівність $\frac{8x}{x^2+11} < 1$ ($X=R$) помножити на вираз із змінною $f(x) = x^2 + 11$, який набуває додатних значень на всій області визначення $X = R$, то отримаємо нерівність рівносильну даній, а саме: $\frac{8x}{x^2+11} \cdot (x^2+11) < x^2+11$; звідки $8x < x^2 + 11 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 11 > 0$.

5. ***Метод інтервалів***

Метод інтервалів застосовується для розв'язування нерівностей виду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ (відповідно $f(x) \geq 0$ або $f(x) \leq 0$). Функція $f(x)$може бути многочленом або дробово-раціональною функцією $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, де $u(x)$, $v(x)$– многочлени.

Метод інтервалів ґрунтується на такій *властивості*: в інтервалі між двома сусідніми точками, які є нулями функції $f(x)$, функція зберігає свій знак.

Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів

1. Виконавши рівносильні перетворення, записати нерівність у вигляді $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$ (відповідно $f(x) \geq 0$ або $f(x) \leq 0$), де $f(x)$ – деяка дійсна функція змінної x.

2. Знайти область визначення функції $f(x)$і нанести її на координатну вісь.

3. Знайти розв'язки рівняння $f(x) = 0$ (нулі функції), зобразити ці точки на координатній прямій.

4. Знайти знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (інтервалів) і нанести їх на координатну вісь.

5. Вибрати ті проміжки, що мають знак, який збігається зі знаком розглядуваної нерівності.

Приклад

Розв'язати нерівність $\frac{5-x}{2}+4>4x-\frac{3x+2}{6}$.

Розв'язання

Для розв'язання нерівності використаємо *метод інтервалів*:

1. Перенесемо вираз $\frac{3x+2}{6}$ з правої частини нерівності у ліву, отримаємо: $\frac{5-x}{2}+4-4x+\frac{3x+2}{6}>0.$

2. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{5-x}{2}+4-4x+\frac{3x+2}{6}$, її область визначення збігається з усіма дійсними числами, тобто $x\in(-\infty;+\infty)$.

3. Знайдемо нулі функції, для цього замінимо знак „>" на знак „=" та розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{5-x}{2}+4(1-x)+\frac{3x+2}{6}=0,$$

$$3(5–x) + 24(1 – x) + (3x + 2) = 0,$$

$$15 – 3x + 24 – 24x +3x + 2 = 0,$$

$$– 24x + 41 = 0,$$

$$x = \frac{41}{24}=1\frac{17}{24}.$$

4. Відмітимо на координатній прямій корінь розв'язаного рівняння $x=1\frac{17}{24}$, і знаходимо знак в кожному з двох утворених проміжків (рис. 33).

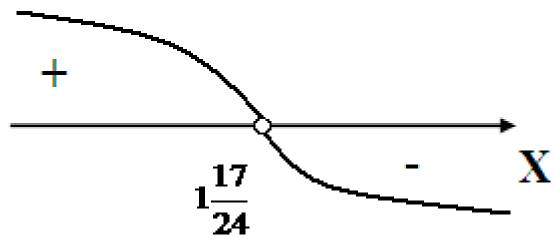


Рис. 33

5. Оскільки знак розглядуваної нерівності „>", то вибираємо проміжок зі знаком „+".

Відповідь: $\left(-\infty;1\frac{17}{24}\right)$.

6. *Означення.* ***Системою нерівностей*** називаємо кон'юнкцію цих нерівностей.

$$f_1(x) > 0 \wedge f_2(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи нерівностей є переріз множин розв'язків нерівностей системи.

Означення. ***Сукупністю нерівностей*** називаємо диз'юнкцію цих нерівностей.

$$f_1(x) > 0 \vee f_2(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) > 0; \\ f_2(x) > 0. \end{array}\right.$$

Розв'язком сукупності нерівностей є об'єднання множин розв'язків нерівностей сукупності.

Приклад

Розв'язати нерівність $\frac{4+x}{x-4} > 5.$

Розв'язання

Виконаємо над нерівністю рівносильні перетворення, для приведення її до виду $\frac{f(x)}{q(x)} > 0$.

$$\frac{4+x}{x-4} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{4+x-5(x-4)}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4+x-5x+20}{x-4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+24}{x-4} > 0$$

Маємо сукупність двох систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4x+24 > 0, \\ x-4 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -4x+24 < 0, \\ x-4 < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

Знайдемо розв'язки першої системи: $\begin{cases} -4x+24 > 0, \\ x-4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x > -24, \\ x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < 6, \\ x > 4. \end{cases}$ $x \in (4;\ 6)$ (рис. 34)

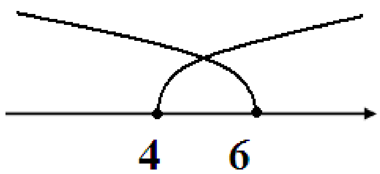


Рис. 34

Знайдемо розв'язки другої системи: $\begin{cases} -4x+24<0, \\ x-4<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x<-24; \\ x<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>6; \\ x<4. \end{cases}$

$x \in \varnothing$ (рис. 35).

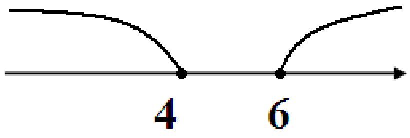


Рис. 35

Отже, $x \in (4; 6) \cup \varnothing = (4; 6)$.

Відповідь: (4; 6).

7. *Означення.* ***Нерівністю з двома змінними*** називається двомісний предикат $f(x, y) < 0$ ($f(x, y) > 0$).

Приклад: $2x + y - 6 > 0$ – двомісний предикат.

Розв'язком нерівності з двома змінними є упорядкована пара чисел (a, b), яка при підстановці у нерівність перетворює її у істинне висловлення.

Приклади

1. Розв'язати нерівність $2x + y - 6 > 0$, зобразити множину розв'язків нерівності на координатній площині.

Розв'язання

Нерівність має безліч розв'язків, так, розв'язками нерівності $2x + y - 6 > 0$ є упорядковані пари (3; 2), (1; 5) і т.д. Таких упорядкованих пар безліч, у загальному вигляді розв'язок нерівності можна записати так $(x;\ y > -2x + 6)$, де $x \in R$.

Графіком нерівності $2x + y - 6 > 0$ є півплощина.

Побудуємо пряму $2x + y - 6 = 0$.

x	0	3
y	6	0

Оскільки $y > -2x + 6$, то заштрихуємо півплощину, розташовану вище від прямої. Координати точок цієї півплощини є множиною розв'язків нерівності (рис. 52).

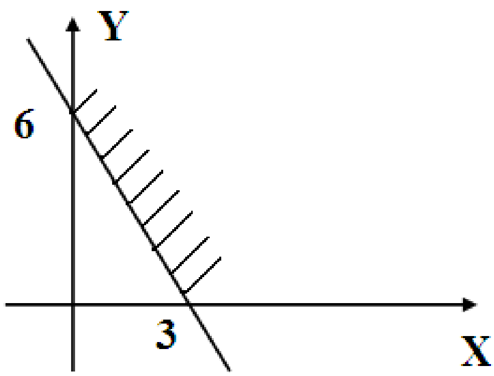


Рис. 52

2. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 < 8x + 6y - 21, \\ x > 5. \end{cases}$

Розв'язання

Систему нерівностей розв'яжемо графічним способом, тобто на координатній площині зобразимо частини площини, що задовільняють першу і другу нерівності, їх переріз і буде розв'язком системи нерівностей.

Для побудови графіку нерівності $x^2 + y^2 < 8x + 6y - 21$ виконаємо тотожні перетворення:

$x^2 + y^2 < 8x + 6y - 21;$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 < 0;$

$(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 21 < 0;$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 - 4 < 0.$

Графіком нерівності $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 < 4$ є внутрішня частина круга з центром у точці (4; 3) і радіусом 2.

Графіком нерівності $x > 5$ є півплощина, розташована праворуч від прямої $x = 5$.

Множиною розв'язків системи є координати точок утвореного сегмента (рис. 36)

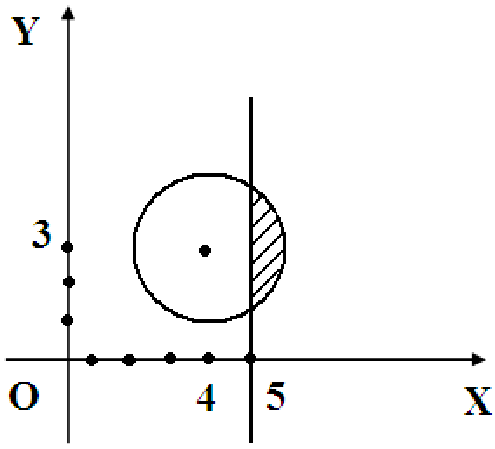


Рис. 36

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення*: числової нерівності; нерівності з однією змінною; розв'язку нерівності з однією змінною; рівносильних нерівностей; системи нерівностей; сукупності нерівностей; нерівності з двома змінними.

2. Що є розв'язком системи нерівностей?

3. Що є розв'язком сукупності нерівностей?

4. Що є розв'язком нерівності з двома змінними?

5. Яка фігура є графіком нерівності $y \le x$?

6. Що означає розв'язати нерівність?

7. Які методи розв'язування нерівностей ви знаєте?

8. Назвати твердження, на яких ґрунтується розв'язування нерівностей методом рівносильних перетворень.

9. Проілюструвати на прикладі алгоритм методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв'язати нерівності:

а) $5 - 2x \le 8x + 7$; б) $0{,}4x - 2(1{,}5x + 1) \ge 5{,}6 + 2x$;

в) $x^2 - 7x + 12 \le 0$; г) $\dfrac{4x-3}{3-2x} \ge 1$;

д) $\dfrac{3x-4}{x+1} - \dfrac{1}{x} \le \dfrac{3x^2-5x-3}{x^2+x}$; е) $\dfrac{-5}{x^2-9} \ge 0$;

є) $\dfrac{x^2-16}{(x-1)^2(x+3)} < 0$; ж) $(x - 8)(8 - 5x)(x - 2) > 0$;

з) $(x + 2)(x + 4)^2(x - 5)(x - 3) > 0$; і) $(2x + 1)^3(3x - 2)(x^2 + 5) < 0$.

2. Розв'язати системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 9x - 8 > 3 + 13x, \\ 34x - 6 > 21x - 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0, \\ x^2 - 2x + 1 > 0. \end{cases}$

3. Розв'язати сукупності нерівностей:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x + 1 > 3x - 4, \\ 5x + 3 < 8x + 21; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x - 1 \ge 2x - 3, \\ 4x + 5 > x + 17. \end{array}\right.$

4. Розв'язати системи нерівностей графічним методом:

а) $\begin{cases} x + 3y > 0; \\ 2x - y < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25, \\ 2x - 3y > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x-3)^2 + (x+2)^2 \le 0, \\ x^2 + y^2 \ge 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x^2 \ge 0; \\ -x + y \ge 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y < 0; \\ 1 + y > 0; \end{cases}$ є) $\begin{cases} 2x - y > 0; \\ 2x - 1 < 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^3 - y > 0; \\ 3x - y < 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25; \\ y < 0; \end{cases}$ і) $\begin{cases} x^2 - y - 1 > 0; \\ -x^2 - y + 1 > 0. \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

5. Розв'язати нерівності:

а) $2 - x > 7x + 3$; б) $x^2 - 3x + 2 < 0$;

в) $\dfrac{x-6}{1+4x} \ge 3$; г) $\dfrac{2x}{x^2-4} \le 0$;

д) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{4}{x+1} \ge \dfrac{4}{x^2-2x-3}$;

е) $\dfrac{2x-5}{x-2} > 0$; є) $\dfrac{x+1}{x+2} > 3$;

ж) $(10 - x)(11 - x)^3(12 - x) > 0$;

з) $(6 - x)^2(x + 5)(x + 3) > 0$.

6. Розв'язати системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 2-4x<5+7x, \\ 1+2x>13x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-7x+12\geq 0, \\ x^2-16>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x^2+8x<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x}>-3, \\ x<4. \end{cases}$

7. Розв'язати сукупності нерівностей:

а) $\left[\begin{array}{l} 5x-2>3x, \\ 1-7x<5x-2; \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} x^2-9\leq 0, \\ x-5>0; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} 0{,}2(2x-3)<x-2, \\ 5x-7>x-6. \end{array}\right.$

Завдання підвищеної складності.

8. Розв'язати нерівності:

а) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}\geq 0;$ б) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x}>0;$ в) $x^2-|5x+6|<0.$

9. Розв'язати системи та сукупності нерівностей:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x}>x+1; \\ (x-0{,}5)x<0: \\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}>\dfrac{0{,}4}{x^3-1} \end{cases}.$

б) $\begin{cases} x+1<\dfrac{x^2+1}{x}; \\ x^2+17x-8>(x-1)(x-2); \\ x-4<0{,}6x-13. \end{cases}$

в) $\left[\begin{array}{l} (x-2)(x+5)<0; \\ x-2>\dfrac{x^2-1}{x} \\ x^2-5x+6\geq 0. \end{array}\right.$;

г) $\left[\begin{array}{l} 0{,}5x-8>3(x-7); \\ 17x-3<18x+4; \\ (x-6)(x^2-9)\geq 0. \end{array}\right.$

6.5. ФУНКЦІЇ

1. Якщо кожному елементу x числової множини X за правилом f відповідає єдине число y, то говорять, що на множині X задано ***числову функцію f (x)*** і пишуть $y = f(x)$, $x \in X$. (x – аргумент функції, y – значення функції, X – область визначення функції (*позначається* $D(f)$), $f(X)$ – множина значень функції(*позначається* $E(f)$), $E(f) = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$). Функція вважається заданою, якщо задано правило f.

2. ***Способи задання функції*:**

- *аналітичний* – функція задається формулою ($y=\dfrac{2}{x^2-1}$);

- *графічний* – графіком (*Означення*. ***Графіком функції*** $y = f(x)$, $x \in X$ називається множина точок (x,y) координатної площини, де $x \in X$, а $y = f(x)$);

- *табличний* – значення аргументу і відповідного значення функції подано у таблиці.

3. *Властивості функції*

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо для будь-якого значення x з її області визначення, значення $(-x)$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Графік *парної* функції симетричний відносно вісі Oy.

Приклад

Функція $y = x^2$ – парна, тому, що виконується умова парності функції: $f(x) = x^2$; $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Графік функції $y = x^2$ – парабола, симетрична відносно вісі Oy (рис. 37).

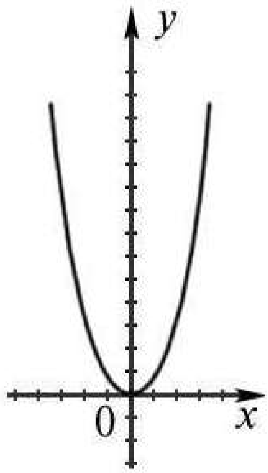


Рис. 37

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо для будь-якого значення x з її області визначення, значення $(-x)$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Графік *непарної* функції симетричний відносно початку координат O (0;0).

Приклад

Функція $y = x^3$ – непарна, тому, що виконується умова непарності функції:$f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Графік функції $y = x^3$симетричний відносно початку координат, називається – *кубічна парабола* (рис. 38).

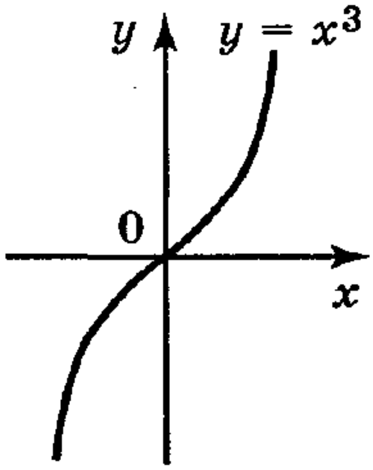


Рис.38

Якщо не виконуються умови парності та непарності, то функція називається ***ні парною, ні непарною.***

Приклад

Дослідити на парність функцію$y = f(x) = (x+1)^2 + 1$.

$f(-x) = (-x+1)^2 + 1 = (1 - x)^2 + 1 \neq -f(x)$; $f(-x) \neq f(x)$ – функція ні парна, ні не парна. Графік функції зображено на рисунку 39 .

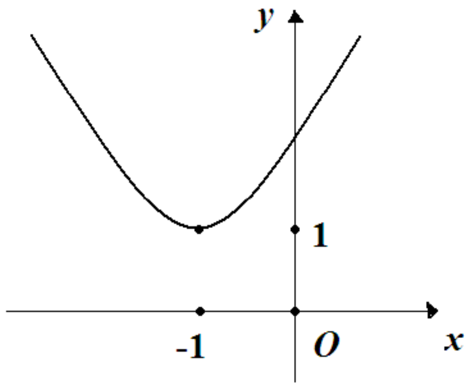


Рис.39

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо для будь-якого значення x з області визначення виконується умова $f(x) = f(x+T) = f(x - T)$, де T – період функції.

Приклад. Функція $y = f(x) = sinx$ (рис. 40) – періодична, оскільки виконується умова періодичності:$y = f(x) = sinx = sin(x+2\pi)$, $T = 2\pi$.

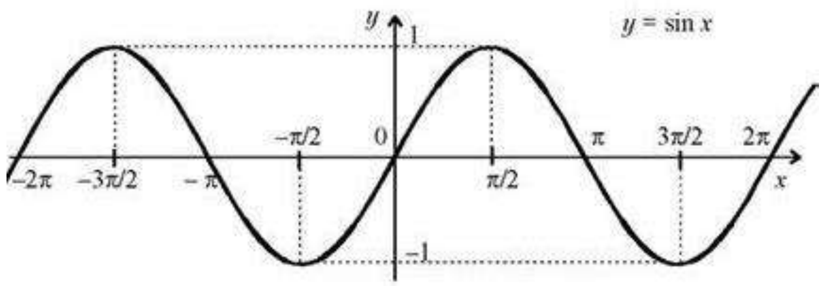


Рис. 40

Означення. Функція називається ***зростаючою*** на множині X, якщо зі збільшенням аргумента ($x_2 > x_1$) збільшується і значення функції ($y_2 > y_1$). *На проміжку зростання функції похідна її додатня* ($y' > 0$).

Приклад

Функція $y = x$ (рис. 58) – зростаюча функція, тому що, зі збільшенням аргументу x збільшується значення функції y, ($y' = 1 > 0$).

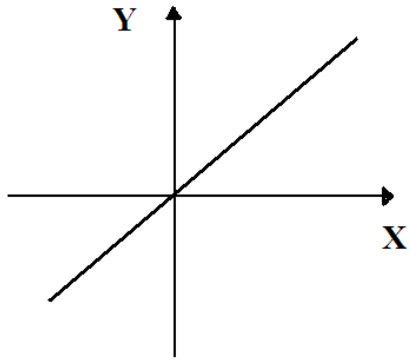


Рис.58

Означення. Функція називається ***спадною*** на множині X, якщо зі збільшенням аргумента ($x_2 > x_1$) значення функції зменшується ($y_2 < y_1$).

На проміжку спадання $y' < 0$.

Приклад

Функція $y = -x$ (рис. 41) – спадна тому, що зі збільшенням аргументу x значення функції yзменшується ($y' = -1 < 0$).

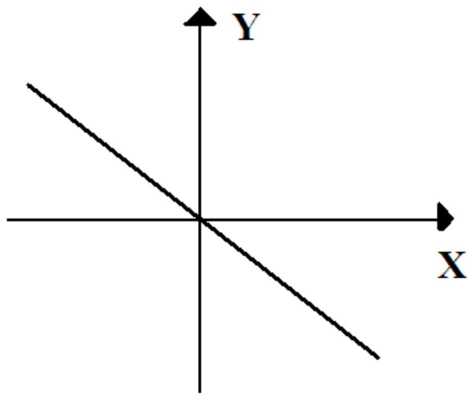


Рис.41

4. ***Лінійна функція***

Означення. ***Лінійною функцією*** називається функція виду $y = ax + b$, де a та b – числа (a – кутовий коефіцієнт, b– початкова ордината).

Властивості лінійної функції

1. Область визначення функції: $D(f) = R$.
2. Множина значень функції: $E(f) = \begin{cases} R, \text{якщо } a \neq 0; \\ \{b\}, \text{якщо } a = 0. \end{cases}$
3. Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, то функція є ні парною, ні непарною.

Якщо $a = 0$, то функція $y = b$ є парною.

Якщо $a \neq 0$, $b = 0$, то функція є непарною.

4. $y' = b$. При $a > 0$ лінійна функція зростає (рис. 42), при $a < 0$ – спадає, при $a = 0$ – є сталою.
5. *Графіком лінійної функції* є пряма лінія, що перетинає вісь Oy в точці з ординатою b і нахилена до вісі Ox під кутом φ, тангенс якого дорівнює a: $tg\varphi = a$. При $a = 0$ пряма паралельна вісі Ox.

Для побудови прямої, що є графіком лінійної функції, достатньо знати координати двох точок, що належать прямій.

При $b=0$ лінійна функція набуває вигляду $y=ax$. *Графіком функції* $y=ax$ є пряма, що проходить через початок координат під кутом φ до осі Ox. При $a>0$ пряма розташована в I та III квадрантах (кут φ гострий), при $a<0$ вона розташовується в II та IV квадрантах (кут φ тупий), при $a=0$ пряма збігається з Ox (рис. 43).

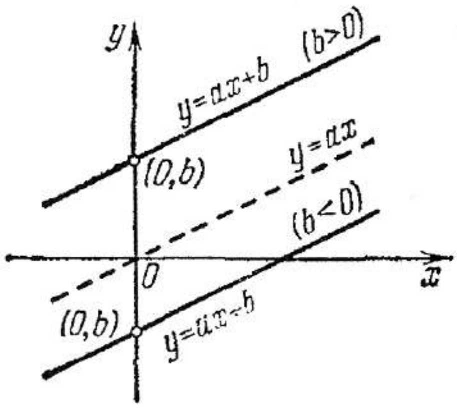


Рис.42

Функція $y=ax$ задає пряму пропорційну залежність між x та y. Говорять, що y прямо пропорційно x (з коефіцієнтом пропорційності a).

Для прямої пропорційності відношення двох довільних значень аргументу, що існує, дорівнює відношенню відповідних значень функцій. Дійсно, для відповідних значень функцій $y_1= ax_1$ і $y_2=ax_2$ маємо $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{ax_1}{ax_2}$, звідки $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{x_1}{x_2}$.

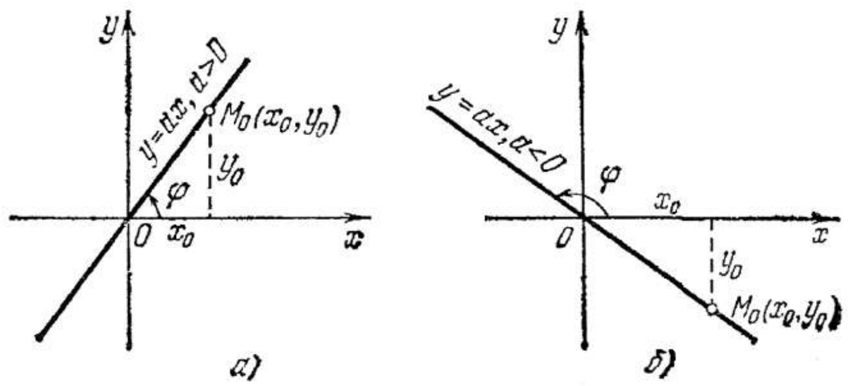


Рис. 43

4. ***Квадратична функція***

Означення. Функція $y=ax^2+bx+c$, де a, b, c – дійсні числа, $a\neq 0$, називається ***квадратичною функцією***.

Теорема. Точка $A\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$, де $D=b^2-4ac$, належить графіку квадратичної функції, який є *параболою* і називається *вершиною параболи*. Пряма, що проходить через точку A паралельно осі ординат, є *віссю симетрії параболи*.

Властивості функції

1. Область визначення функції: $D(f) = R$

2. Знайдемо множину значень функції $E(f)$.

У квадратному тричлені виділимо квадрат двочлена:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

При $x = -\frac{b}{2a}$ перший додаток перетворюється в нуль, функція набуває свого найменшого значення $-\frac{D}{4a}$ при $a > 0$ і найбільшого $-\frac{D}{4a}$ при $a < 0$.

Отже, $E(f) = \left(-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$ при $a > 0$; $E(f) = \left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right)$ при $a < 0$.

3. Похідна функції $y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$.

		$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$	$-\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
$a>0$	y'	$-$	0	$+$
	y	$\searrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\nearrow$
$a<0$	y'	$+$	0	$-$
	y	$\nearrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\searrow$

4. При $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ є парною, при $b \neq 0$ функція $y = ax^2 + bx + c$ є ні парною, ні непарною.

Розташування параболи $y = ax^2 + bx + c$ ***відносно вісі абсцис в залежності від знака дискримінанту*** $D = b^2 - 4ac$ ($D < 0$, $D = 0$, $D > 0$).

Позначимо вершину параболи як точку A з координатами (m, l).

1) Випадок $D < 0$

Якщо $D < 0$, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь абсцис, причому при $a > 0$ вона лежить вище цієї вісі, а при $a < 0$ – нижче.

Графіки парабол для випадку $D < 0$ зображено на рисунку 62.

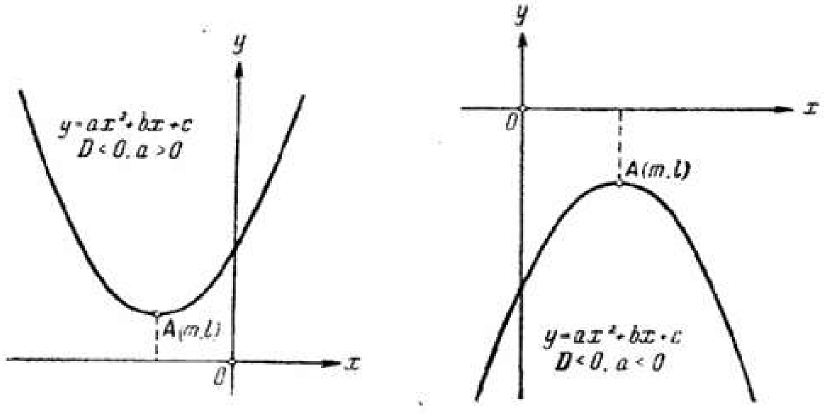


Рис. 44

2) Випадок $D = 0$

У цьому випадку $l = 0$, тобто вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ лежить на вісі абсцис. Розташування параболи в залежності від знаку числа a показано на рисунку 45.

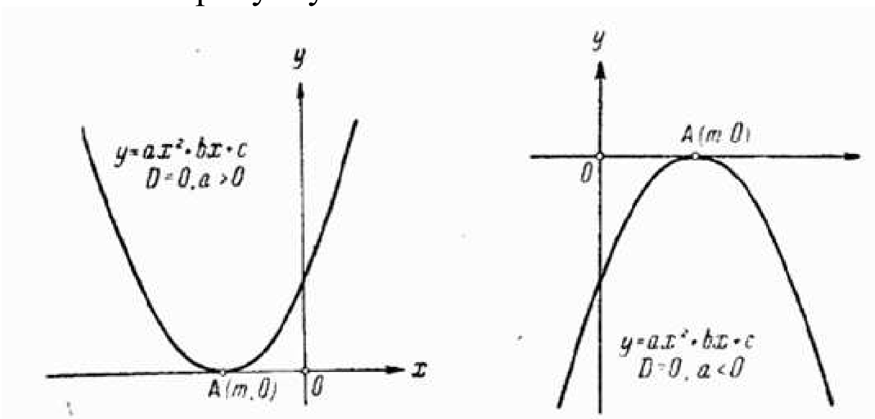


Рис. 44

3) Випадок $D > 0$

Якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь абсцис у двох точках A_1 та A_2 (рис.64). Якщо $a > 0$, то $l < 0$, тобто вершина розташована нижче вісі *Ox*, а гілки параболи направлені вгору, оскільки $a > 0$.

Якщо $a < 0$, то $l > 0$. Вершина параболи розташована вище вісі *Ox,* гілки направлені вниз.

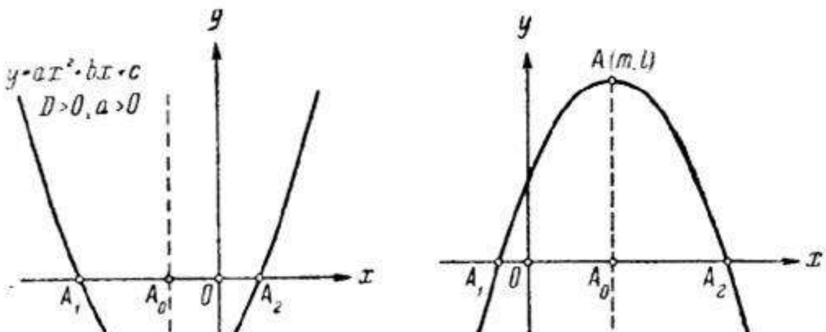


Рис.45

5. *Обернена пропорційність*

Означення. Функція виду $y=\frac{m}{x}$, $m\neq 0$ називається ***оберненою пропорційністю.*** Число m називають коефіцієнтом оберненої пропорційності.

Властивостіфункції $y=\frac{m}{x}$

1. Область визначення функції: $D\,(f)=R\backslash\ \{0\}$(множина всіх дійсних чисел, крім числа $x=0$).

2. Множина значень функції: $E(f)=R\backslash\ \{0\}$.

3. Функція $y=\frac{m}{x}$ є непарною функцією $\left[f(-x)=\frac{m}{-x}=-\frac{m}{x}=-f(x)\right]$, її графік симетричний відносно початку координат.

4. Функція $y=\frac{m}{x}$ є монотонно спадною на всій області визначення при $m>0$ і зростаючою при $m<0$ $\left[y'=-\frac{m}{x^2}\right]$.

5. Графік функції $y=\frac{m}{x}$ – рівнобічна *гіпербола*. Гіпербола складається з двох окремих частин, що називаються гілками гіперболи; якщо $m>0$, гілки гіперболи розміщуються у І та ІІІ координатних кутах; якщо $m<0$ – у ІІ і IV. Гіпербола має вісі симетрії, що збігаються з бісектрисами координатних кутів; центр симетрії, що збігається з центром координат, та дві асимптоти – вісі координат (*асимптота* – пряма, до якої необмежено наближається точка, рухаючись по кривій у нескінченість) (рис.46).

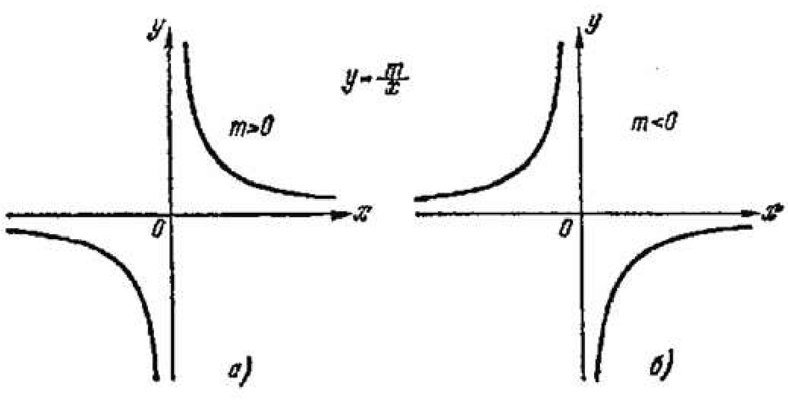


Рис. 46

6. *Перетворення графіків*

1) Графік функції $\boldsymbol{y = mf(x)}$ утворюєтьсяз графіка функції $y = f(x)$ *розтягуванням* від вісі *Ох* з коефіцієнтом *m,* якщо *m*>1, і *стискуванням* до вісі *Ох*, якщо 0 < *m* <1.

2) Графік функції $\boldsymbol{y = -f(x)}$ утворюєтьсяз графіка функції $y = f(x)$ *перетворенням симетрії останнього відносно вісі X.*

3) Графік функції $\boldsymbol{y = f(x-m) + n}$ утворюється з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням на $|\boldsymbol{m}|$ одиниць по вісі Ox (праворуч, якщо $\boldsymbol{m} > \mathbf{0}$ і ліворуч, якщо $\boldsymbol{m} < \mathbf{0}$) та на $|\boldsymbol{n}|$ одиниць по вісі Oy (вгору, якщо $\boldsymbol{n} > \mathbf{0}$ і вниз, якщо $\boldsymbol{n} < \mathbf{0}$).

Інший спосіб побудови графіка функції $\boldsymbol{y = f(x - m) + n}$**:**

– виконати паралельне перенесення площини, вибравши початком нової системи координат $x'O'y'$ точку $O'(m,n)$;

– *в площині* $x'O'y'$ побудувати графік функції $y' = f(x')$.

4) Графік функції $\boldsymbol{y = f(kx)}$ утворюється з графіка функції $y = f(x)$ *стиском до* вісі Oy з коефіцієнтом k, *якщо* $k > 1$(якщо $0 < k < 1$, *то отримуємо розтяг від вісі Oy з коефіцієнтом* $\frac{1}{k}$).

5) Графік функції $\boldsymbol{y = f(-x)}$ утворюється з графіка функції $y = f(x)$ *перетворенням симетрії останнього відносно вісі Oy.*

Приклад

1) Графік функції $y = 2x - 3$ отримується з графіка $y = 2x$ за допомогою паралельного перенесення його вздовж вісі Oy вниз на відрізок довжини 3.

Якщо переписати $2x - 3$ у вигляді $2(x - \frac{3}{2})$, можно помітити, що графік функції $y = 2(x - \frac{3}{2})$ можна одержати з графіка функції $y = 2x$ за допомогою паралельного перенесення його вздовж вісі Ox управо на відрізок довжини $\frac{3}{2}$ (рис. 47).

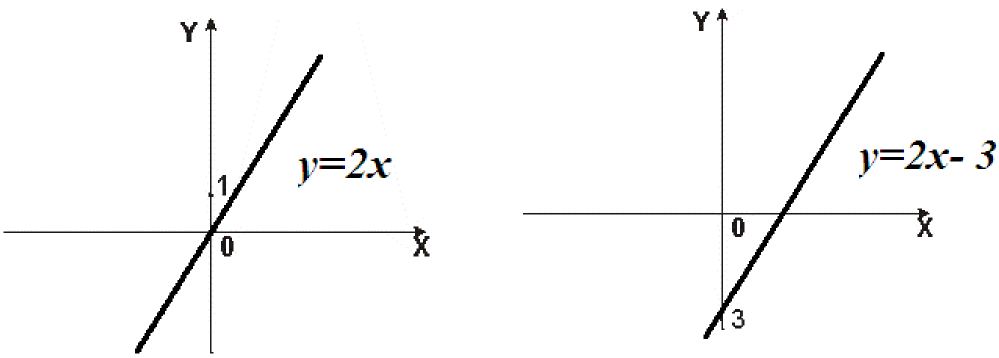


Рис. 47

2) Графік функції $y = 4x^2$ утворюється із графіка функції $y = x^2$ розтягуванням останнього у 4 рази уздовж вісі Oy відносно осі Ox. Переписавши $4x^2$ у вигляді $(2x)^2$, помічаємо, що графік функції $y = (2x)^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ стискуванням останнього в 2 рази уздовж осі Ox до вісі Oy (рис. 48).

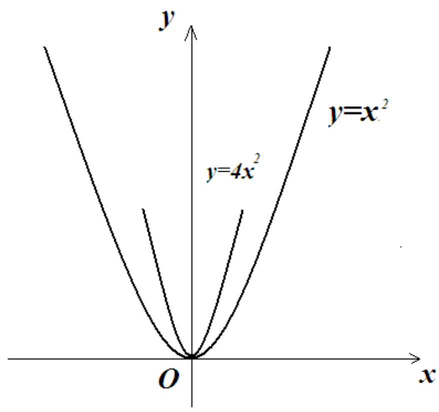


Рис. 48

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* функції; області визначення функції; графіку функції; парної функції; непарної функції; періодичної функції; зростаючої функції; спадної функції.
2. Які способи задання функції ви знаєте?
3. Яка функція задає пряму пропорційність (обернену пропорційність)?
4. Яка функція називається лінійною?
5. Яка функція називається квадратичною?
6. Які існують перетворення графіків функцій?
7. Сформулювати алгоритм побудови графіка функції $y = f(x - m) + n$ із графіка функції $y = f(x)$.
8. Задано графік функції $y = \dfrac{1}{x}$. Які перетворення потрібно виконати над цим графіком, щоб отримати графік функції $y = \dfrac{3}{x-1} + 2$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Кожному числу із множини $X = \{3, 4, 5\}$ поставлено у відповідність його дільник із множини натуральних чисел. Чи є ця відповідність функцією?
2. Функція задана рівнянням $y = 2x - 4$. Область її визначення – множина $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайти множину значень цієї функції та побудувати графік.
3. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = 5x - 2$; б) $f(x) = \dfrac{6}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$; г) $f(x) = \dfrac{8x^2}{(x+1)(x-7)}$;

д) $f(x) = \sqrt{x-3}$; є) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+3}}$; ж) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{5-x}} - 8$.

4. Побудувати графіки функцій в одній системі координат:

а) $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = -(x-2)^2$; $y = -(x-2)^2 + 3$;

б) $y = \dfrac{2}{x}$; $y = \dfrac{2}{x+3}$; $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$.

5. Побудувати графіки функцій зручним способом:

а) $y = x^2 - 7x + 12$; б) $y = \frac{x-3}{x+4}$; в) $y = \frac{2x}{1-x}$.; г) $y = x^2 + x + 3$; д) $y = \frac{3x-1}{x+2}$.

6. Серед перерахованих функцій вказати парні й непарні:

а) $y = x^6$; б) $y = x^5$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = x^2 + x$; д) $y = |x|$; є) $y = x|x|$.

Завдання для самостійної роботи

7. Функція $y = x^2 - 3$ задана на множині $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Знайти її множину значень та побудувати графік.

8. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 3x + 5$; б) $y = x^2 - 3x + 2$; в) $y = \frac{1}{x+4} - 2$; г) $y = \frac{2x+5}{x-1}$; д) $y = (x + 2)^2 - 2$.

9. Встановити вид залежності, в якій знаходяться змінні x та y, якщо:

а) x − довжина сторони квадрата, y − його периметр;

б) x − довжина сторони квадрата, y – його площа;

в) x − число сторінок, які друкарка друкує за одну годину; y − число годин, за які друкарка надрукує рукопис у 35 сторінок.

10. Пояснити, чому функції будуть ні парними, ні непарними:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^5 + |x|$; в) $y = \frac{1}{x+3}$; г) $y = x^2 + x + 1$.

Завдання підвищеної складності

11. Побудувати графіки функцій, заданих на множині дійсних чисел:

а) $f(x) = \begin{cases} x, x < 0, \\ -2x, x \ge 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x-1, x \ge 1, \\ -3x+3, x < 1; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} x-2, x \le 0, \\ \frac{4}{x}, x > 0. \end{cases}$

г) $y = |x|$; д) $y = |x-2| + 1$; ж) $y = |x-3| + |x+2|$; з) $y = 2\frac{1}{|x|} + 5$; і) $y = \frac{-1}{|x+2|} - 1$.

РОЗДІЛ VII. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ. ВЕЛИЧИНИ

7.1. АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ГЕОМЕТРІЇ (ПЛАНІМЕТРІЯ)

1. *Зміст* ***аксіоматичного методу*** *побудови геометрії* полягає утому, що:

- виділяється система первісних понять (фігур та відношень між ними);
- формулюється система аксіом (тверджень, які приймаються без доведення), аксіоми є неявними означеннями первісних понять;
- кожне нове поняття означується через первісне та вже означене поняття;
- кожне нове твердження доводиться на основі аксіом та вже доведених тверджень (теорем).

Первісними поняттями є: точка, пряма, площина, належність, лежати між, довжина, міра кута.

Вимоги до системи аксіом: незалежність, повнота, несуперечливість.

2. ***Геометрична фігура*** – це множина точок.

Прикладами геометричних фігур є відрізок, трикутник, паралелограм, призма, конус тощо.

Точка і пряма є основними геометричними фігурами на площині й не означуються через інші поняття.

Для позначення точок використовуються великі літери латинського алфавіту: A, B ..., Z, а для прямих – рядкові літери: a, b ..., z.

Про точку A, що належить прямій a, говорять, що точка A ***лежить на прямій а*** $(A \in a)$ (рис. 72).Так само буде правильно, якщо скажуть, що ***пряма а містить точку А або пряма а проходить через точку А.***

Про точку ***В,*** що ***не належить прямій а,*** говорять, що ***точка В не лежить на прямій а*** $(B \notin a)$(рис.49)

Аксіома1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій і точки, що їй не належать.

Аксіома2. Через дві довільні точки можна провести пряму, причому тільки одну.

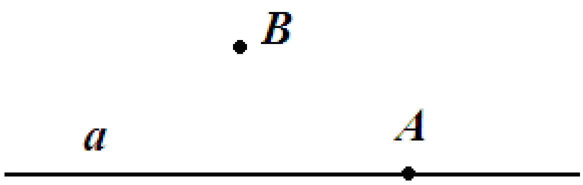


Рис. 49

Дві ***прямі перетинаються***, якщо вони мають спільну точку. Якщо прямі не мають жодної спільної точки, то говорять, що ***прямі не перетинаються.***

Теорема. Дві різні прямі не перетинаються або перетинаються в одній точці (рис. 50).

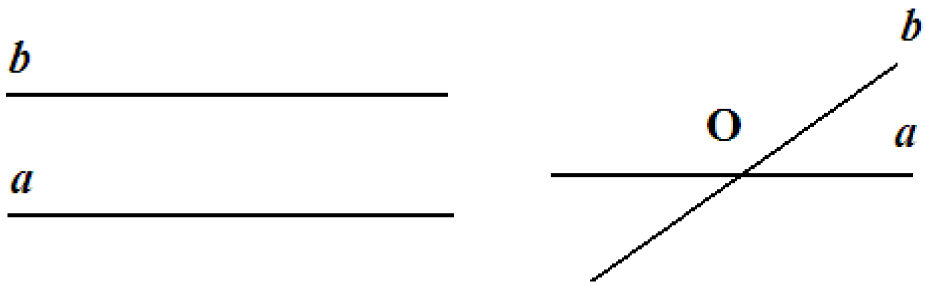


Рис. 50

3. *Відрізок, промінь, кут*

Означення. ***Відрізком АВ*** називається множина точок прямої, які лежать між точками A і B (рис. 51).

Рис. 51

Означення. ***Промінь*** – це частина прямої, що складається із усіх точок цієї прямої, які лежать по один бік від даної її точки – початку променя.

Різні промені однієї прямої зі спільним початком називаються ***доповняльними*** (*AB* і *AC*) (рис. 52).

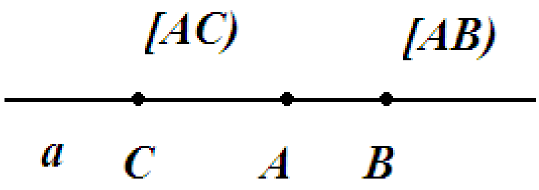


Рис.52

Означення. ***Кут*** – це фігура, яка складається з точки – *вершини кута* і двох різних променів, що виходять з цієї точки – *сторін кута*.

Позначення: $\angle AOB$– кут з вершиною в точці *O* і сторонами *OA* та *OB*.

Кути вимірюються в градусах.

Означення. ***Розгорнутим кутом*** називається кут, сторони якого доповняльні промені (рис. 53).

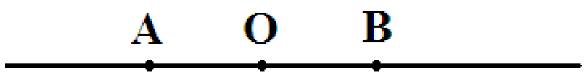


Рис.54

Два кута називаются ***суміжними***, якщо у них одна сторона спільна, а інші сторони є доповняльні промені (рис.55).

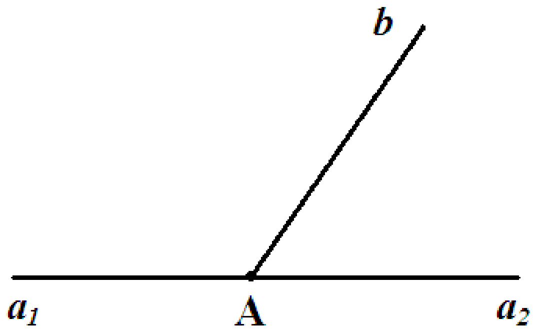


Рис.55

Теорема1. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Теорема2. Якщо два кути рівні, то рівні й суміжні їм кути.

Кут називається ***прямим***, якщо його величина дорівнює 90°. Кут, менший 90°, называется ***гострим***; більший 90°, але менший 180° – ***тупим*** (рис.56).

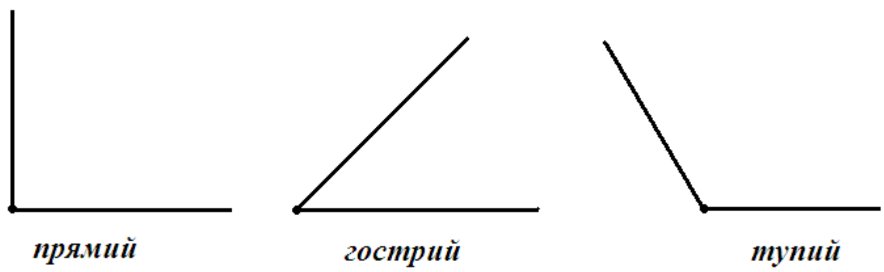


Рис.57

Означення. ***Бісектрисою*** кута називається промінь, що проходить між його сторонами і поділяє кут навпіл (рис.58).

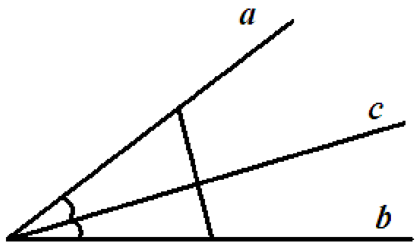


Рис. 58

Означення. Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого кута (рис.59).

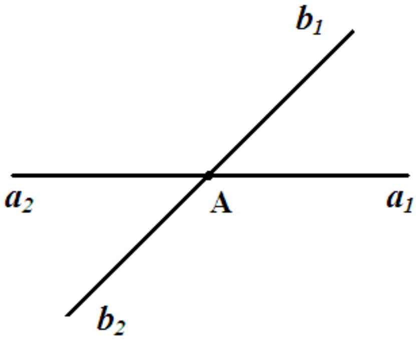


Рис.59

Теорема 3. Вертикальні кути рівні.

Дві прямі a і bназиваються ***перпендикулярними*** ($a \perp b$), якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Теорема. Через кожну точку прямої можно провести перпендикулярну їй прямую і тільки одну.

Дві прямі a і b називаються ***паралельними*** ($a \| b$), якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Аксіома. Через точку, що не лежить на даній прямій, можно провести не більше однієї прямої, паралельної заданій.

Ознаки паралельних прямих

1) Якщо при перетині двох прямих січною (рис. 60) $\angle 1 = \angle 2$, або $\angle 2 = \angle 4$, або $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, то прямі a і b паралельні.

2) Якщо $a \perp c$, $b \perp c$ (рис. 61) , то $a \| b$.

3) Якщо $a \| c$, $b \| c$ (рис. 62), то $a \| b$.

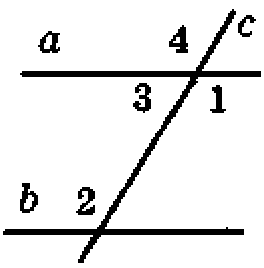


Рис. 61

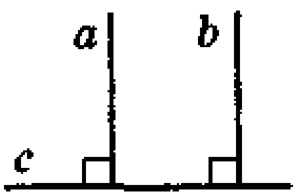


Рис. 62

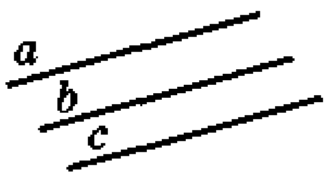


Рис. 63

Властивості паралельних прямих

1) Якщо $a \parallel b$ і c– січна (рис. 81), то $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

2) Якщо $a \parallel b$, $c \perp a$ (рис. 82), то $c \perp b$.

4. *Означення.* ***Колом*** називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки площини. Ця точка називається ***центром кола***. Відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з її центром, а також його довжина, називається ***радіусом кола*** (рис.64).

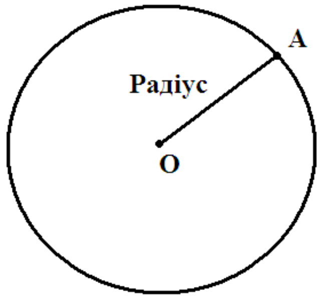


Рис.64

Означення. ***Відрізок***, що сполучає дві точки кола, називається ***хордою***. Хорда, що проходить через центр кола, називається ***діаметром*** (рис.65).

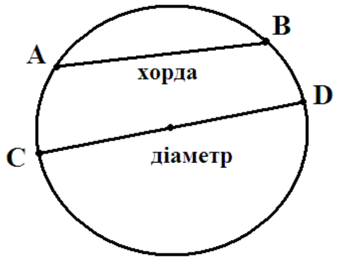


Рис.65

Означення. Пряма, що має єдину спільну точку з колом, називається ***дотичною***, а їх спільна точка – ***точкою дотику*** (рис.66).

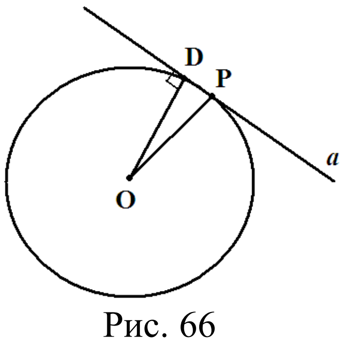


Рис. 66

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:*відрізка; променя, доповняльного променя; кута (гострого, тупого, прямого, розгорнутого); паралельних прямих; перпендикулярних прямих; кола, хорди, радіуса, діаметра.
2. Назвати неозначувані поняття?
3. У чому полягає зміст аксіоматичного методу?
4. Що називають аксіомою?
5. Назвати вимоги до системи аксіом?

7.2. МНОГОКУТНИКИ

1. *Означення.* ***Ламаною*** $A_1A_2... A_n$ називається фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, ... , A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, ... , A_{n-1}A_n$, що їх попарно з'єднують. Точки $A_1, A_2, ... , A_n$ – ***вершини*** ламаної, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, ... , A_{n-1}A_n$ – її ***ланки***.

Ламана називається ***простою***, якщо вона не має самоперетину, та ***замкненою***, якщо її кінці збігаються (рис. 67 – а) проста ламана; б), в), г) – ламані з самоперетином).

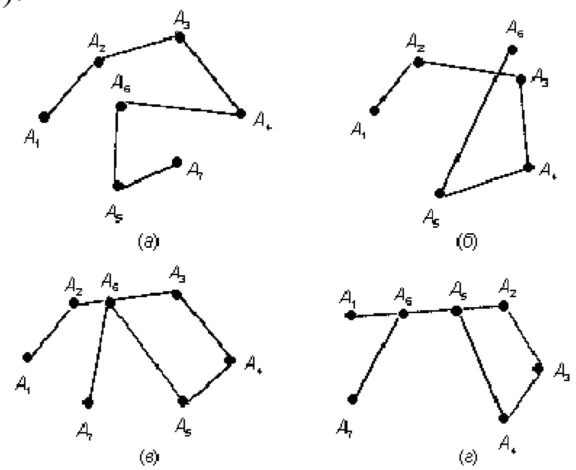
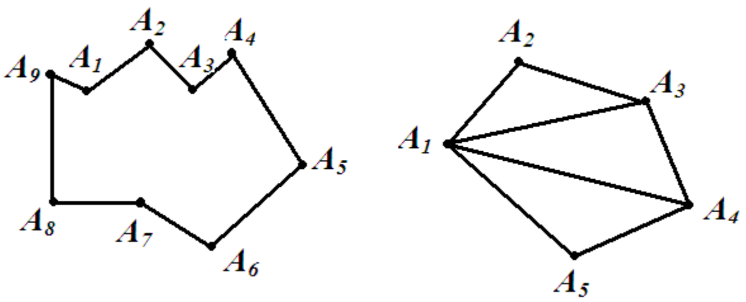


Рис. 67

Проста замкнена ламана називається ***многокутником***, якщо її сусідні ланки не лежать на одній прямій. Вершини ламаної називаються ***вершинами многокутника***, а ланки ламаної – ***сторонами***. ***Діагоналями многокутника*** називаються відрізки, що сполучають несусідні вершини многокутника.

Означення. ***Плоским многокутником*** називається скінченна частина площини, обмежена многокутником.

Многокутник називається ***опуклим***, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 88 б). A_1A_3, A_1A_4 – його діагоналі. Неопуклий многокутник (рис. 88 а).



а) б)

Рис. 68

Теорема. Сума кутів опуклого многокутника дорівнює $\mathbf{180^0\,(n–2)}$, де $\boldsymbol{n}$ – кількість сторін многокутника.

2. *Означення.* ***Трикутником*** називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно з'єднують ці точки. Точки називаються ***вершинами***, а відрізки – ***сторонами*** трикутника.

Кутом трикутника *ABC* (трикутник позначається Δ *ABC*) при вершині *A* (або кутом між сторонами *AB* і *AC*) *називається* кут, утворений променями *AB* і *AC*; $\angle A = \angle BAC = \angle CAB$.

Зовнішнім кутом трикутника при даній вершині називається кут, суміжний з кутом трикутника при цій вершині (рис. 69).

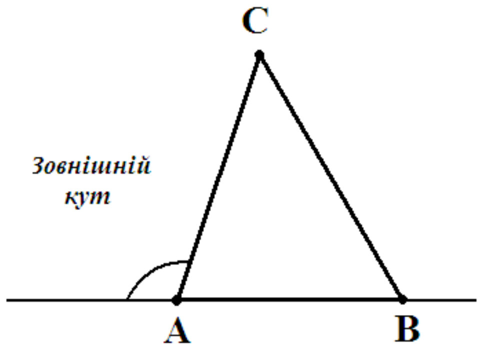


Рис. 69

Трикутник називається ***різностороннім***, якщо будь-які його дві сторони не рівні. Трикутник, всі сторони якого рівні, називається ***рівностороннім***.

Трикутник називається ***гострокутним***, якщо всі його кути гострі. Трикутник називається ***тупокутним***, якщо один з його кутів тупий.

Два трикутники називаються ***рівними*** ($\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$), якщо у них відповідні сторони рівні $\left(AB = A_1B_1; AC = A_1C_1; BC = B_1C_1\right)$ і відповідні кути рівні $\left(\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1\right)$.

Означення. ***Висота*** трикутника – це перпендикуляр, опущений з даної вершини до прямої, яка містить протилежну сторону трикутника.

Означення. ***Бісектриса*** трикутника – це відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину з точкою на протилежній стороні.

Означення. ***Медіана*** трикутника – це відрізок, що сполучає вершину з серединою протилежної сторони трикутника.

Означення. ***Середня лінія трикутника*** – це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

Теорема. Середня лінія трикутника паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

3. Ознаки рівності трикутників

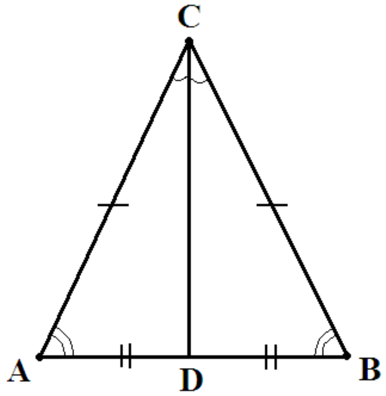
Перша ознака рівності трикутників. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Друга ознака рівності трикутників. Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника рівні відповідно стороні і прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників. Якщо три сторони одного трикутника рівні відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

4. Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо будь-які його дві сторони рівні. Ці сторони називаються ***бічними***, а третя сторона – ***основою*** (рис. 70).

Властивості рівнобедреного трикутника



Теорема 1. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Теорема 2. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.

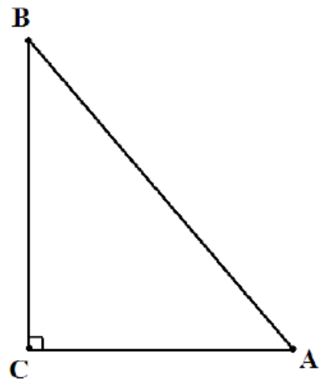
<u>*Ознаки рівнобедреного трикутника*</u>

*Теорема 1***.** Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Рис.70

Теорема 2. Якщо в трикутнику медіана є і висотою, то такий трикутник рівнобедрений.

5. Трикутник називається ***прямокутним***, якщо у нього є прямий кут (рис. 71).



Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту, називається ***гіпотенузою***, дві інші сторони – ***катетами***.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

Теорема 1. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно рівні гіпотенузі і катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Рис. 71

Теорема 2. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно рівні гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема 3. Якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно рівні катету і протилежному куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи рівний сумі квадратів катетів.

За допомогою теореми Піфагора можна довеститвердження.

Якщо до прямої із однієї точки проведені перпендикуляр і похилі, то:

- будь-яка похила більше перпендикуляра;
- рівні похилі мають рівні проекції;
- із двох похилих більша та, в якої проекція більша.

6. *Означення.* ***Чотирикутником*** називається многокутник, який має чотири вершини.

Несусідні вешини називаються ***протилежними***.

Відрізки, що сполучають протилежні вершини, називаються ***діагоналями***.

Означення. ***Паралелограмом*** називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

Означення. ***Висотою паралелограма***, проведеною до даної його сторони, називається перпендикуляр, опущений з довільної точки протилежної сторони, до прямої, що містить дану сторону.

Властивості паралелограма

Теорема. У паралелограма протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні, діагоналі точного перетину діляться навпіл.

Ознаки паралелограма

Теорема 1. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник – *паралелограм* (рис. 92).

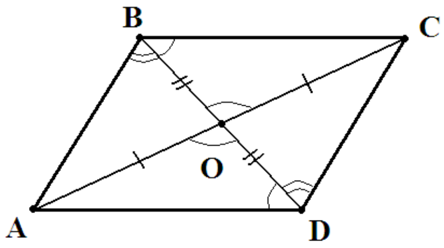


Рис. 72

Теорема 2. Якщо у чотирикутника дві протилежні сторони паралельні й рівні, то чотирикутник – *паралелограм* (рис. 73).

Теорема 3. Якщо у чотирикутника протилежні сторони попарно рівні, то чотирикутник – *паралелограм* (рис. 74).

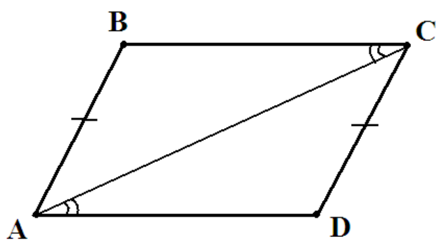


Рис. 73

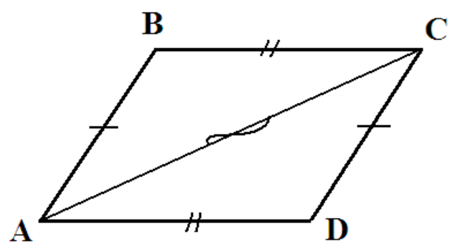


Рис. 74

Теорема 4. Якщо в чотирикутнику протилежні кути попарно рівні, то чотирикутник – *паралелограм* (рис. 75).

Означення. ***Прямокутником*** називається паралелограм, у якого всі кути прямі (рис. 76).

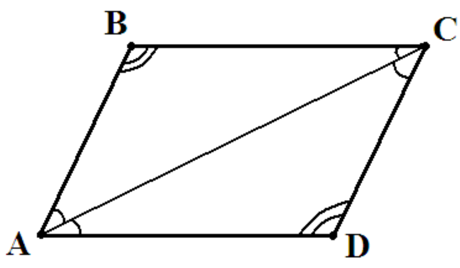


Рис. 75

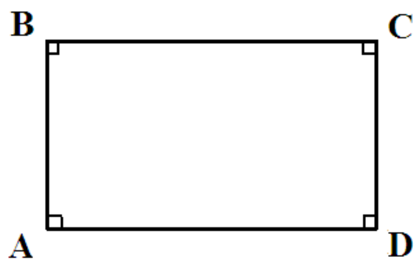


Рис. 76

Теорема. Діагоналі прямокутника рівні.

Означення. ***Ромбом*** називається паралелограм, у якого всі сторони рівні (рис. 77).

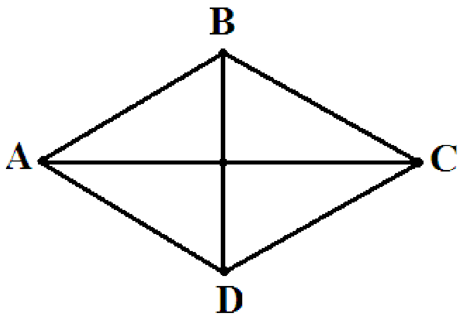


Рис. 77

Властивості ромба

Теорема 1. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

Теорема 2. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Ознаки ромба

Теорема 1. Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то паралелограм – ромб.

Теорема 2. Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то паралелограм – ромб.

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні. Квадрат є також окремим випадком ромба.

Властивості квадрата

Теорема 1. У квадрата всі кути прямі.

Теорема 2. Діагоналі квадрата рівні.

Теорема 3. Діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом і є бісектрисами його кутів.

Трапецією називається чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні. Паралельні сторони називаються основами, а дві інші – бічними сторонами.

Рівнобічною називається трапеція, бічні сторони якої рівні.

Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін.

Висотою трапеції називається перпендикуляр, опущений з довільної точки основи на пряму, що містить іншу основу. Іноді висотою називається довжина цього перпендикуляра.

Теорема. Середня лінія трапеції паралельна основам трапеції і рівна їх півсумі.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. ***Дати означення:*** ламаної, простої, замкненої; многокутника та його елементів; опуклого многокутника; трикутника та його елементів; чотирикутника; трапеції; паралелограма; прямокутника; ромба; квадрата.

2. Сформулювати властивість середньої лінії трикутника (трапеції)?

3. Який трикутник називається прямокутним, як називаються його сторони?

4. Описати види трикутників.

5. Сформулювати ознаки рівності трикутників.

6. Назвати властивості та ознаки рівнобедреного трикутника.

7. Сформулювати ознаки рівності прямокутних трикутників.

8. Сформулювати теорему Піфагора та наслідки з неї.

9. Сформулювати властивості та ознаки паралелограма.

10. Назвати властивості та ознаки ромба.

11. Назвати властивості та ознаки квадрата.

Завдання для аудиторної роботи

1. У паралелограмі *ABCD* на сторонах *AB* і *CD* відкладено рівні відрізки *AE* і *CM*, а на сторонах *BC* і *AD* – рівні відрізки *BK* і *DH*. Довести, що чотирикутник *EKMH* є теж паралеограмом.

2. Довести, що медіани трикутника перетинаються в точці, яка ділить їх у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.

3. Довести, що відрізки дотичних, проведених з точки поза колом до точки дотику, рівні.

4. Довести, що у прямокутному трикутнику з катетами a,b та гіпотенузою c радіусвписаного кола обчислюється за формулою $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

5. Довести, що бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки, пропорційні двом іншим його сторонам.

6. Якщо дві сторони і медіана, проведені з однієї вершини, одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і медіані, проведених з однієї вершини другого трикутника, то такі трикутники рівні. Довести це.

Завдання для самостійної роботи

7. Довести, що в будь – якому чотирикутнику , описаному навколо кола, суми протилежних сторін рівні.

8. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і рівний їх піврізниці.

9. Довести властивість середньої лінії трапеції.

Завдання підвищеної складності

10. Довести, що довжина сторони трикутника обчислюється за формулою $a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b{}^2+m^2{}_c)-m^2{}_a}$, де m_a, m_b, m_c – довжини медіан трикутника.

11. Два кола дотикаються зовнішньо і до них проведена зовнішня дотична. На відрізку дотичної, обмеженому точками дотику, як на діаметрі, побудовано третє коло. Довести,що коло дотикається до лінії центрів.

12. Рівні відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *M* так, що *AM* = *MC*. Довести, що точки *A,B,C* і D лежать на одному колі.

7.3. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ НА ПЛОЩИНІ

1. Під ***геометричними побудовами*** на площині розуміють креслення фігур, необхідних для розв'язування задач, доведення теорем. Розглянемо розв'язування задач на побудову класичними засобами: *циркулем та лінійкою*.

Під ***задачею на побудову*** розуміють задачу, в якій вимагається побудувати фігуру за її заданими або шуканими елементами, які перебувають у певних зв'язках із заданими фігурами.

Приклади

Задача 1. Побудувати трикутник за двома сторонами та кутом між ними.

Задача 2. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі кільця між двома заданими концентричними колами.

Задача 3. Дано два кола і відрізок AB. Побудувати відрізок рівний і паралельний AB з кінцями на заданих двох колах.

2. ***Задачі на побудову*** розв'язують за планом:

1) <u>Аналіз.</u> Припускаємо, що задача розв'язана, виконуємо схематичне креслення. Аналізуємо умову задачі, знаходимо план побудови шуканої фігури.

2) <u>Побудова.</u> За складеним планом здійснюємо побудову циркулем та лінійкою. Описуємо побудову.

3) <u>Доведення.</u> Доводимо, що побудована фігура є шуканою.

4) <u>Дослідження.</u> Встановлюємо умови, при яких задача має розв'язки та кількість розв'язків.

Розв'язування задач на побудову зводять до деякого числа відомих побудов, які називаємо основними.

3. ***Основні побудови на площині циркулем та лінійкою***

До основних побудов, які використовуються при розв'язуванні задач на побудову, відносимо такі:

Побудова 1. Поділ відрізка AB на дві рівні частини.

- Проводимо дуги кіл рівних радіусів з центрами в точках A і B до перетину. C і D – точки перетину (рис.78).
- Проводимо пряму CD.
- Шукана точка O – перетин прямих AB і CD. $AO = OB$.

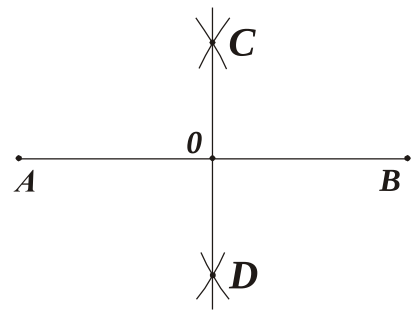


Рис. 78

Побудова 2. Проведення прямої, яка перпендикулярна до прямої a і проходить через задану точку O.

Випадок 1. $O \notin a$.

- Проводимо дугу кола з центром у точці O і радіусом, більшим за відстань до прямої a. Одержуємо точки A і B на прямій a (рис. 79).
- Цим же розхилом циркуля проводимо дуги кіл з центрами в точках A і B. Одержуємо в перетині точку C.
- OC – шукана пряма,$OC \perp a$.

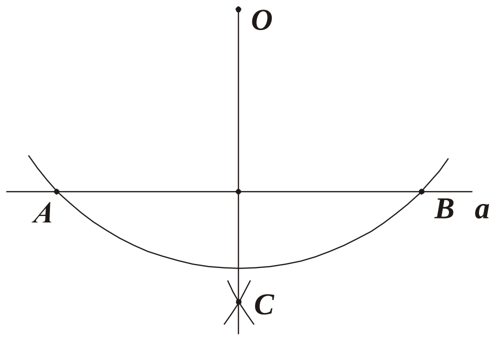


Рис. 79

Випадок 2. $O \in a$.

- З точки O довільним розхилом циркуля проводимо дуги. На прямій a одержуємо точки A і B (рис. 80).
- З точок A і B розхилом циркуля більшим за AO проводимо дуги до перетину в точціC.
- OC – шукана пряма, $OC \perp a$.

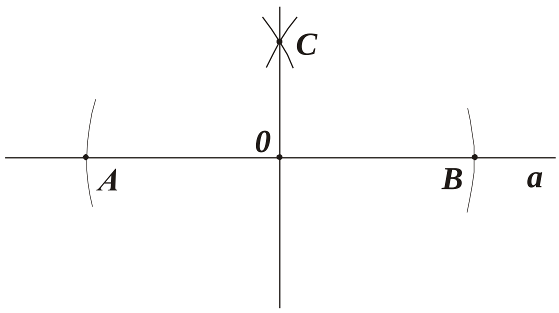


Рис. 80

Побудова 3.Проведення бісектриси кута (поділ кута навпіл).

- Проводимо дугу кола з центром у вершині кута $\angle(a,b)$ до перетину зі сторонами кута. Одержимо точки A і B (рис. 81).

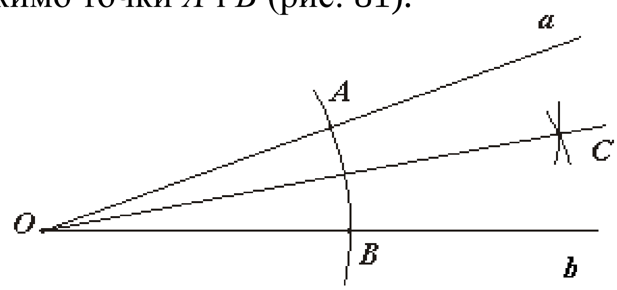


Рис. 81

- З точок A і B, як із центрів, проводимо дуги кіл з тим же радіусом до перетину в точці C.
- OC – шуканий промінь, OC – бісектриса кута $\angle(a, b)$.

Побудова 4. Побудова кута рівного даному.

- Якщо $\angle(a, b)$ – даний, то проводимо дугу кола з центром у вершині кута і довільним радіусом. Одержимо точки M, N на сторонах заданого кута (рис. 82).

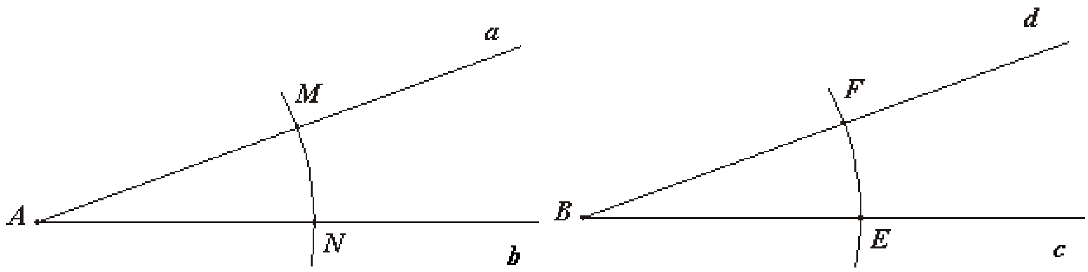


Рис. 82

- Проведемо промінь c з початком у точці B.
- З центром у точці B тим же радіусом проводимо дугу. Одержимо точку E на промені c.
- З точки E, як із центра, проводимо дугу кола з радіусом NM, одержимо точку F.
- Проводимо промінь BF.
- BF – друга сторона кута $\angle(c,d)$, який рівний $\angle(a,b)$, $\angle(c,d)=\angle(a,b)$.

Побудова 5. Побудова прямої, яка проходить через точку A ($A \notin a$) і паралельна прямій a.

- Через точку A проводимо довільно пряму c до перетину з прямою a в точці B (рис. 83).

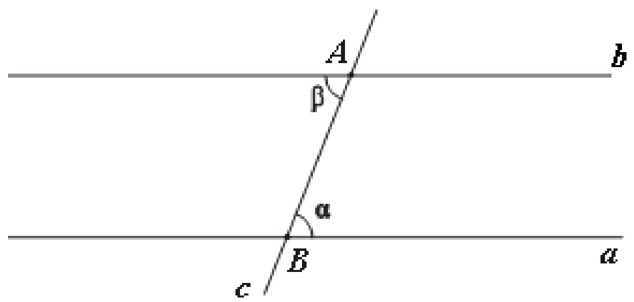


Рис. 83

- Від променя AB відкладаємо кут β з вершиною A, який рівний α (побудова 4).
- Продовжуємо сторону кута β. Маємо пряму b, $b \| a$.

4. *Методи розв'язування задач на побудову:* ***<u>Метод геометричних місць точок</u>***

Означення. ***Геометричним місцем*** точок площини називається фігура, яка складається з усіх точок площини, що мають певну властивість.

Приклади геометричних місць точок

1. ***Коло*** – геометричне місце точок (г. м. т.), рівновіддалених від даної точки – центра кола. (O, r) – позначення кола з центром O, радіусом r.

2. ***Серединний перпендикуляр до відрізка*** – г. м. т., рівновіддалених від кінців відрізка.

$(M \in a)$ $(AM = BM)$ (a– серединний перпендикуляр) (рис. 84).

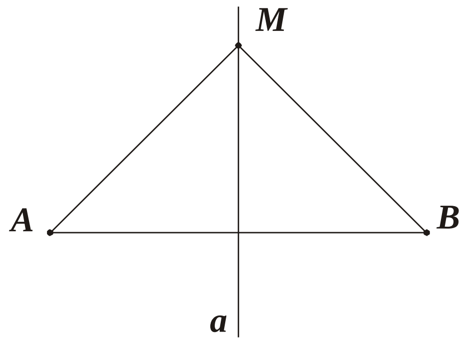


Рис. 84

3. ***Бісектриса кута*** – г. м. т., рівновіддалених від сторін кута.

Якщо позначити відстань від точки $M(M \in \ell)$ до прямої a $\rho(M, a)$, то $\rho(M, a) = \rho(M, b)$ (рис.85).

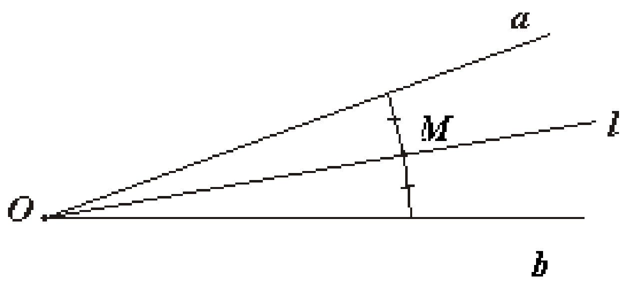


Рис. 85

4. Г. м. т. рівновіддалених від даної прямої на відстань h є ***пара паралельних прямих***.

$(\forall M \in \ell_1)$ $(\forall N \in \ell_2)$ $(\rho(M,a) = \rho(N,a) = h)$ (рис. 86).

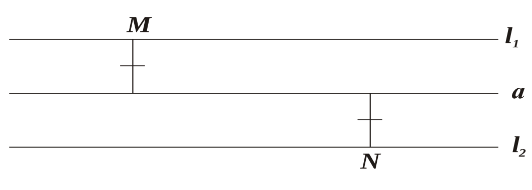


Рис. 86

5. Методи розв'язування задач на побудову: <u>Метод геометричних перетворень</u>

Геометричним перетворенням площини називається відображення площини на себе.

Зміст методу геометричних перетворень полягає в тому, що при розв'язувані задачі в аналізі поряд з даними та шуканими фігурами розглядаються інші фігури, які одержують із даних або шуканих фігур, або їх частин, за допомогою того чи іншого геометричного перетворення.

У залежності від того, яке геометричне перетворення застосовувалося, говоримо про різновидність методу геометричних перетворень (*метод паралельного перенесення, метод симетрії, метод подібності тощо).*

Означення. ***Паралельним перенесенням*** фігури *F* на вектор $\vec{a}$ називається відображення, при якому для будь-якої точки *M* фігури та її образу *M'* виконується умова: $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ (рис. 85). Позначається паралельне перенесення $T_{\vec{a}}$, отже, $T_{\vec{a}}(M) = M', T_{\vec{a}}(F) = F'$ означає паралельне перенесення точки *M* (фігури *F*) на вектор $\vec{a}$.

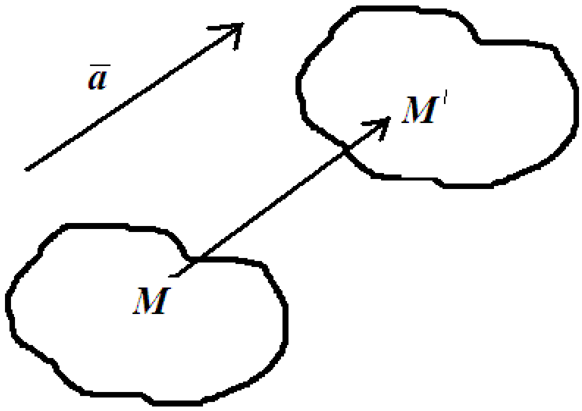


Рис.85

Означення. ***Поворотом фігури*** *F* навколо точки *O* кут *α* називається відображення, при якому для будь-якої точки *M* фігури *F* та її образу *M'* виконуються умови:

1) $OM = OM'$;
2) $\angle MOM' = \alpha$ і однаково з ним орієнтований (рис. 86).

$$R_0^\alpha(M)=M'$$
$$R_0^\alpha(F)=F'$$

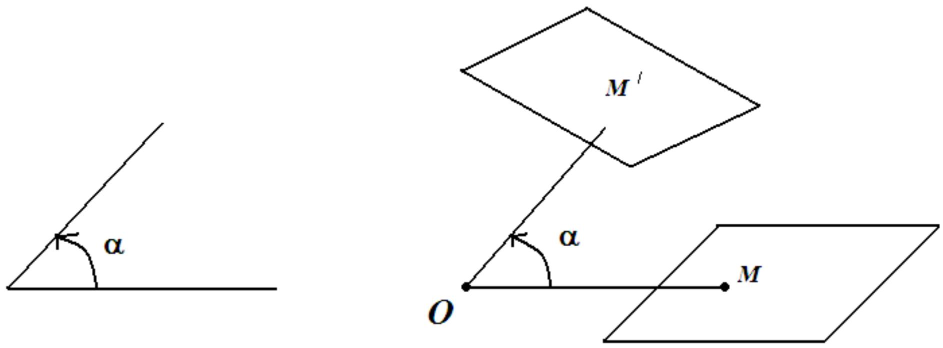


Рис. 86

Означення. ***Осьовою симетрією з віссю l*** називається перетворення площини, при якому для будь-якої точки M площини та її образу M' виконується умова: відрізок $MM' \perp l$ і точкою перетину з l ділиться навпіл (рис. 87).

$$S_l(M)=M'$$

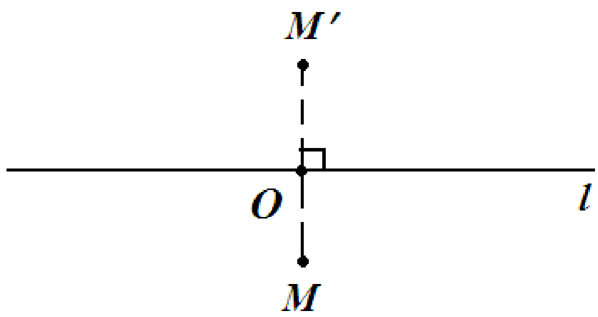


Рис. 87

Означення. Гомотетією з центром O і коефіцієнтов k називається перетворення площини, при якому $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ (рис. 88)

$$H_0^k(M)=M'$$

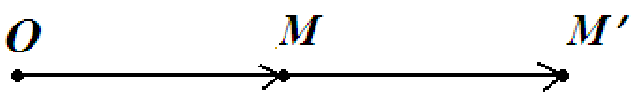


Рис. 88

Центральна симетрія

$R_O^{180^\circ} = Z_O$ – центральна симетрія

$Z_O(M) = M' \Rightarrow MO = OM'; O \in MM'$ (рис. 89)

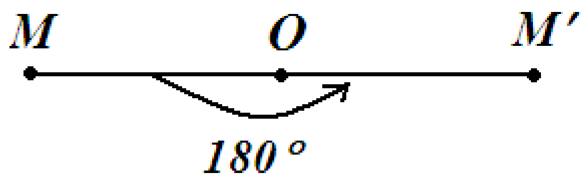


Рис. 89

Задача. Земельна ділянка квадратної форми була огороджена. Від загороди залишилися два стовпи на паралельних сторонах квадрата та стовп у центрі квадрата. Поновити межі земельної ділянки.

Розв'язання

Аналіз

Припустимо, що квадрат поновлено, відомі точки M, N і центр квадрата O – центр його симетрії (рис. 90).

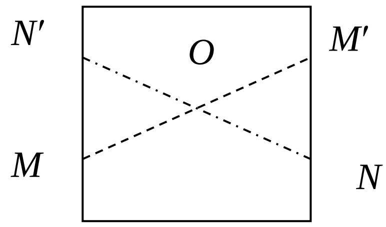


Рис. 90

Точки $M'=Z_0(M), N'=Z_0(M)$ лежатимуть теж на сторонах квадрата. Таким чином, можна знайти прямі MN' та $M'N$, на яких лежать сторони квадрата. Це дасть можливість знайти інші дві сторони, які лежать на образах прямої MN', одержаних поворотом прямої MN' навколо точки O на кут 90°та – 90°.

6. Класичні старовинні задачі, які не розв'язуються циркулем та лінійкою

Уже в стародавній Греції вчені зустрічалися із задачами, які не піддавалися розв’язуванню циркулем і лінійкою. Виникнення цих задач пов'язано із цілим рядом легенд. Наведемо одну із них:

«Цар Мінос наказав побудувати пам’ятник своєму синові Главку. Архітектори побудували пам’ятник у формі куба, ребро якого дорівнювало 100 метрів. Але Міносу пам’ятник не сподобався, він здався йому малим, і цар наказав його подвоїти, але архітекторам це не вдалося. Вони звернулися до вчених-геометрів, але і вони не розв’язали цієї задачі».

Задача про подвоєння куба. Побудувати сторону куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба.

Розв'язання

Нехай a – сторона даного куба, x – шуканого.

Тоді $x^3 = 2a^3$ і $x = \sqrt[3]{2}a$. За такою формулою відрізок циркулем та лінійкою побудувати не можна.

Задача про трисекцію кута. Довільний кут поділити на 3 рівні частини.

Розв’язання

Розв’язування цієї задачі зводиться до кубічного рівняння $x^3 - 3x - b = 0$, яке не завжди розв’язується в квадратних радикалах, а отже задача в загальному випадку не має розв’язку за допомогою циркуля та лінійки.

Трисекція кута можлива для значень кута $\alpha = \frac{90^\circ}{2^n}$, $n \in N$.

Поділ кута на три рівні частини можна виконати циркулем та лінійкою (спосіб Архімеда).

Нехай дано кут α з вершиною в точці O. Візьмемо відрізок AB довільної довжини r та відмітимо точки A і B на лінійці. Проведемо коло (O, r), яке перетинає сторону кута в точці C (рис.91). Прикладаємо лінійку так, щоб вона проходила через точку C і підбираємо таке положення лінійки, щоб точка A належала прямій, що містить другу сторону кута, а точка B– колові. Тоді $\angle BAO = x = \frac{\alpha}{3}$

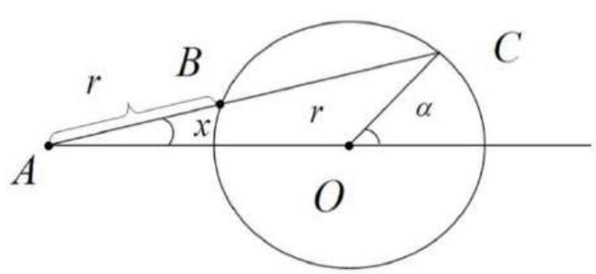


Рис. 91

Задача про квадратуру круга. Побудувати квадрат рівновеликий даному кругу.

Розв'язання

Нехай x – сторона квадрата, r – радіус круга, тоді $x^2 = \pi r^2$, а $x = \sqrt{\pi r^2}$. Оскільки π – число ірраціональне, то задачу не можна розв'язати циркулем та лінійкою. Задача розв'язку не має.

8. Золота пропорція

Золота пропорція – це такий пропорційний гармонійний поділ відрізка на нерівні частини, при якому менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього відрізка, тобто $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ (рис. 92).

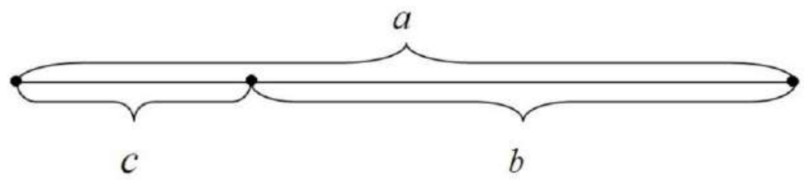


Рис. 92

Задача

Здійснити «золотий поділ» відрізкуAB.

Розв'язання

«Золотий поділ» називають ще поділом у середньому та крайньому відношенні: якщо $b = x$, то $c = a - x$ і маємо $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$. З цієї пропорції знайдемо формулу для побудови відрізка x. Одержимо рівняння: $x^2 + ax - a^2 = 0$, звідки $x = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2}$.

Виконаємо перетворення для кореня $x = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2}$: $x = \frac{\sqrt{5}a - a}{2} = \sqrt{5}\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \sqrt{4+1} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$. Позначимо $y = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, $z = \frac{a}{2},$ тоді відрізок $x = y - z$. Відрізок yбудуємо як гіпотенузу прямокутного трикутника з катетами a і $\frac{a}{2}$ (рис. 93).

Побудова

1. *AB=a;* $BD = \frac{a}{2} = z$;

2. $y = AD = \sqrt{5}\dfrac{a}{2}$;

3. $DK = \dfrac{a}{2}, AK = \dfrac{\sqrt{5}a}{2} - \dfrac{a}{2} = x$;

4. $AC=x$.

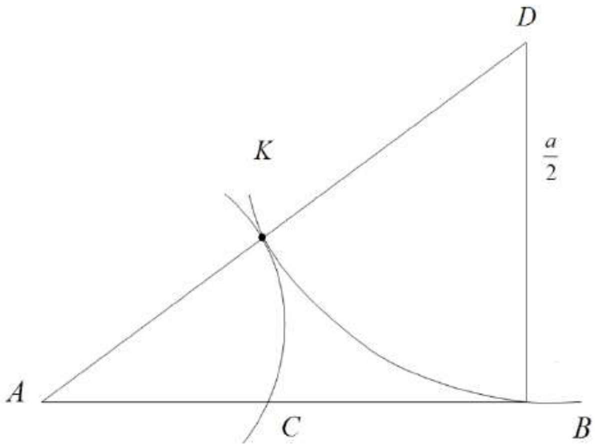


Рис. 93

Отже, точка C здійснює золотий поділ відрізка AB. Якщо покласти $AB = 1$, то $\dfrac{AC}{CB} \approx \dfrac{0{,}618}{0{,}382} \approx 1{,}6$. Найдавніші відомості про золоту пропорцію відносяться до часів розквіту античної культури. Про неї згадували Піфагор, Платон, Евклід. Золота пропорція – поняття математичне, але вона, як засіб гармонії і краси, використовується у живописі, архітектурі, існує в природі.

Грецькі скульптори Фідій, Поліктет, Мірон, Пракситель при створенні своїх творінь використовували принцип золотої пропорції, як еталон краси людського тіла, зразок гармонічної тілобудови. Так, лінія талії ділить тіло на дві нерівні частини у золотій пропорції, аналогічно довжини фаланг кожного пальця відносяться один до одного за правилом золотої пропорції, така пропорція існує і на обличчі людини. Золота пропорція займає чільне місце в художніх творіннях Леонардо да Вінчі та Дюрера.

Дослідження вчених показали, що у людини та у інших ссавців є оптимальна (золота) частота серцебиття, при якій довжина систоли, діастоли та повного серцевого циклу співвідноситься між собою у пропорції. 0,382 : 0,618 : 1, яка є золотою.

Дослідження музичних творів геніальних авторів показало, що межі зміни структури мелодії, кульмінаційні пункти, зміна тональності тощо ділять твір на частини, як правило, за законом золотого поділу.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення*:задачі на побудову; геометричного місця точок площини; геометричного перетворення площини.

2. Які задачі на побудову відносяться до основних?

3. У чому полягає зміст методу геометричних місць точок?

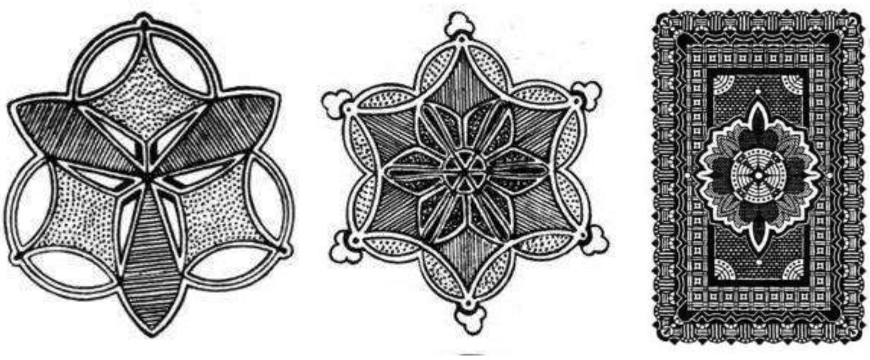
4. Які геометричні місця точок знаєте?

5. Назвати види перетворень фігури.

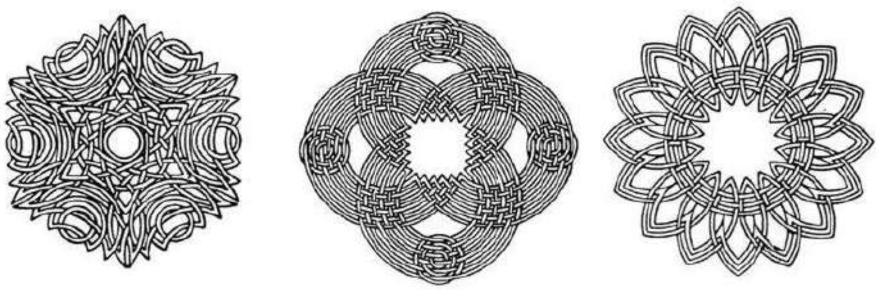
6. Розкрити зміст алгебраїчного методу розв’язування задач на побудову.

7. Виконати завдання:

1) На рисунках знайти фігури, одержані поворотом. Знайти для цих фігур центри і кути повороту (рис. 94).



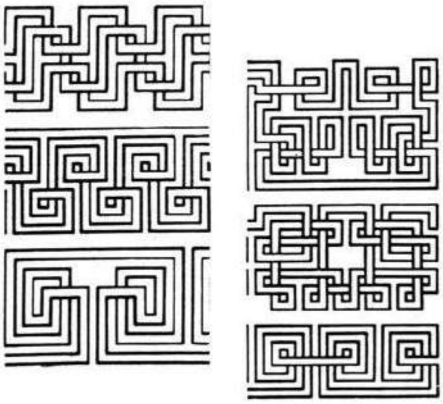
а) б) в)



г) д) є)

Рис. 94

2) Визначити перетворення площини, які переводять бордюри в себе (рис. 95).



а) б)

Рис. 95

3) Знайти центри симетрії фігур, зображених на рисунку (рис. 96).

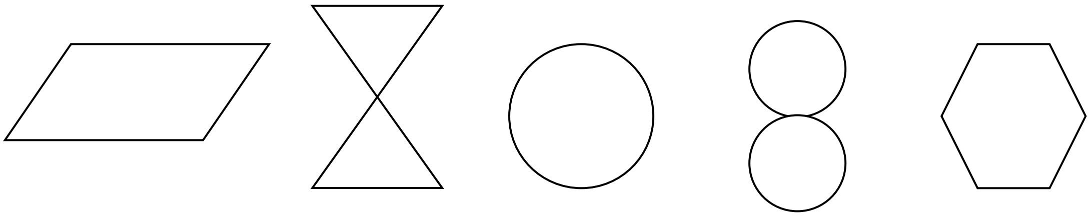


Рис. 139

4) При паралельному перенесенні точка A переходить у точку A'. Побудувати образ квадрата $ABCD$ при цьому перетворенні (рис. 97).

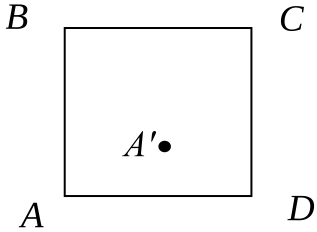
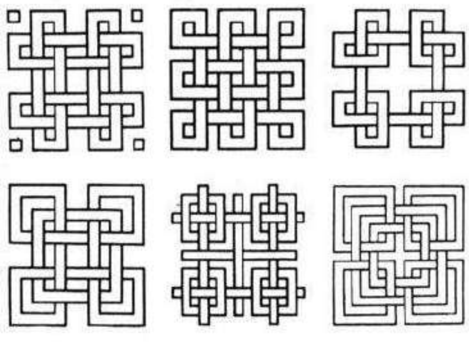


Рис. 98

5) Визначити, які перетворення суміщають самі з собою зображені фігури (рис.99).



а) б) в)

Рис.99

Завдання для аудиторної роботи

1. Побудувати кут, рівний даному кутові.

2. Через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій.

3. Побудувати дотичну до заданого кола, яка проходить через задану точку зовні кола.

4. Побудувати коло, яке проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій.

5. Дано дві паралельні прямі a, b та точку A. Побудувати коло, яке дотикається до прямих і проходить через точку A.

6. Побудувати точку на відстані h від заданої прямої a так, щоб вона знаходилась на відстані m від заданої точки B.

7. Дано пряму, коло та відрізок. Побудувати відрізок, рівний і паралельний даному так, щоб кінці його належали б відповідно прямій та колові.

8.Дано три прямі a, b, c. Побудувати відрізок AB з серединою на прямій b так, щоб $A \in a$, $B \in c$, $AB \perp b$.

9. У даний квадрат вписати рівносторонній трикутник так, щоб його вершини лежали на різних сторонах квадрата, причому одна з них – у даній точці.

10. Побудувати трикутник за даним кутом A, висотою h_a і відношенням сторін $b : c = m : n$.

11. У даний трикутник вписати ромб із заданим гострим кутом.

12. Побудувати відрізки за формулами: $x = \sqrt{2ab}$, $x = \sqrt{bc - a^2}$.

13. Площу даного прямокутника поділити прямою, паралельною діагоналі, у відношенні 1 : 3.

14. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, рівновеликий даному трикутнику.

15. Побудувати квадрат, рівновеликий різниці площ даних прямокутника та трикутника.

16. Побудувати круг, рівновеликий сумі площ двох даних кругів.

Завдання для самостійної роботи

17.Через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.

18. Поділити заданий кут навпіл.

19. Побудувати коло, вписане у заданий трикутник.

20. Дано дві паралельні прямі a, b та дві точки A і B. Побудувати точку, яка рівновіддалена від заданих прямих та рівновіддалена від заданих точок.

21. Дано два кола та відрізок. Побудувати відрізок, рівний і паралельний даному так, щоб кінці його належали б відповідно даним двом колам.

22. Дано два кола та між ними пряму. Побудувати квадрат так, щоб одна діагональ лежала на прямій, кінці іншої належали б відповідно двом заданим колам.

23. Через дану точку M, що лежить всередині даного кута, провести пряму так, щоб її відрізок, обмежений сторонами кута, ділився в точці M навпіл.

24. Побудувати трикутник за даним кутом A, медіаною m_a і відношенням сторін $b : c = m : n$.

25. У даний трикутник вписати прямокутник із заданим відношенням сторін.

26. Побудуйте відрізки за формулами: $x=\sqrt{3}a$, $x=\sqrt{b^2 - ab}$.

27. Площу даного прямокутника поділити прямою, паралельною діагоналі, у відношенні 1 : 5.

28. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, рівновеликий даному прямокутнику.

29. Побудувати квадрат, рівновеликий сумі площ двох даних прямокутників .

30. Побудувати круг, рівновеликий різниці площ двох даних кругів.

Завдання підвищеної складності

31.Побудувати відрізки за формулами: $x = \dfrac{ab^2}{c^2}$, $x = \sqrt{\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}}$.

32. На основі трикутника ABC побудувати рівновеликий йому трикутник з найменшим периметром.

33. Дано пряму a і дві точки A і B в одній з півплощин. Знайти на прямій a точку X таку, щоб сума відрізків AX і BX була найменшою.

34. У середині даного кута BAC лежить точка M. Побудувати трикутник MNK найменшого периметра так, щоб $N \in AB$, $K \in AC$.

7.4. ЕЛЕМЕНТИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

1. *Означення*. ***Многогранником*** називається тіло скінченних розмірів, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників, які називаються гранями (рис.100).

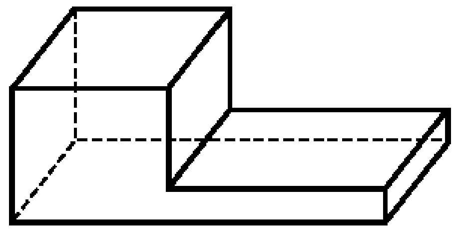


Рис.100

Означення. ***Опуклим*** називається многогранник, розташований по один бік площини кожного многокутника на його поверхні.

Грані опуклого многогранника – опуклі многокутники. Сторони многокутника називаються ***ребрами***, а їх вершини – ***вершинами многогранника*** (рис.101).

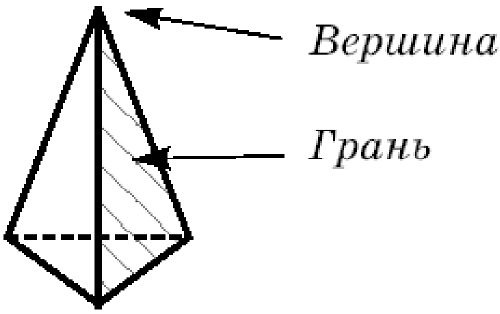


Рис.101

Означення. ***Діагональ многогранника*** – це відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані (рис.102).

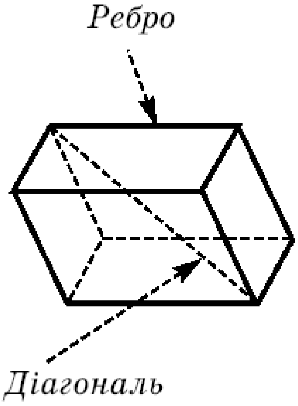


Рис. 102

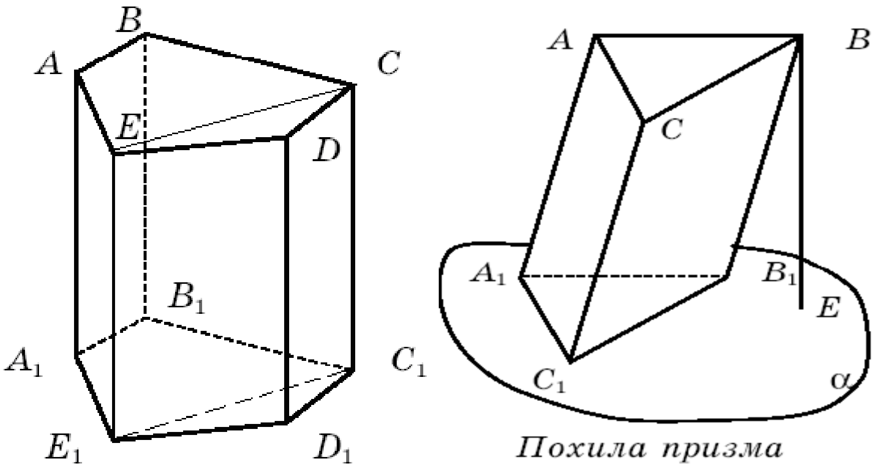
2. *Означення*. ***Призма*** – це многогранник, який складається з двох плоских многокутників (***основ призми***), які лежать у різних площинах і які можна сумістити паралельним перенесенням, та всіх відрізків, які з'єднують відповідні точки цих многокутників.

Відрізки, що сполучають відповідні вершини основ називаються ***бічними ребрами*** призми.

Висота призми – це відстань між площинами її основ.

Діагональний переріз призми – це переріз її площиною, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані.

Означення. ***Пряма призма*** – це призма, у якої бічні ребра перпендикулярні основам, якщо ця умова не виконується, то призма називається ***похилою*** **(**рис. 103**)**.



Пряма призма

Похила призма
BE — висота призми

ECC_1E_1 – діагональний переріз

Рис. 103

Властивості призми

1. Основи призми – рівні многокутники.
2. Бічні грані призми – паралелограми.
3. Бічні ребра призми рівні.

Означення. ***Правильна призма*** – пряма призма, основами якої є правильні многокутники.

Властивості правильної призми

1. Основи правильної призми – правильні многокутники.
2. Бічні грані правильної призми є рівними прямокутниками.
3. Бічні ребра правильної призми рівні.

4. У перетині правильної призми площиною, що проходить через два не сусідні бічні ребра, утворюється прямокутник, у деяких випадках може утворитися квадрат.

5. Центр симетрії при парному числі сторін основи – точка перетину діагоналей правильної призми (рис. 104).

Рис. 104

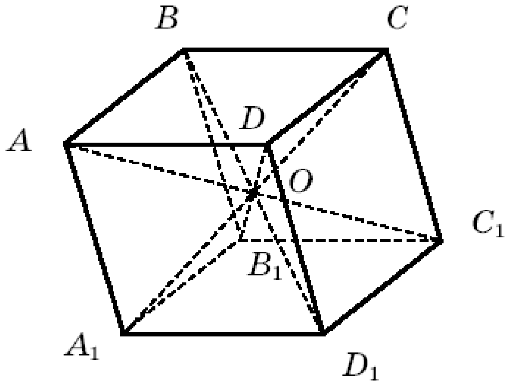
3. *Означення*. ***Паралелепіпедом*** називається призма, основи якої – паралелограми.

Властивості паралелепіпеда

1) Середина будь-якої діагоналі паралелепіпеда є центром його симетрії.

2) Протилежні грані паралелепіпеда рівні і паралельні.

3) Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл (рис.105).



O — центр симетрії

Рис. 105

Означення. ***Прямокутним паралелепіпедом*** називається паралелепіпед у якого всі грані прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його ***вимірами***.

Теорема. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його лінійних вимірів $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (рис. 106):

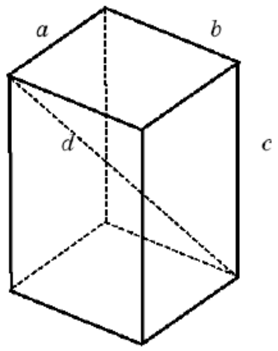


Рис. 106

Означення. ***Кубом*** називається прямокутний паралелепіпед з рівними ребрами.

Центр симетрії куба – точка перетину діагоналей куба (рис. 107).

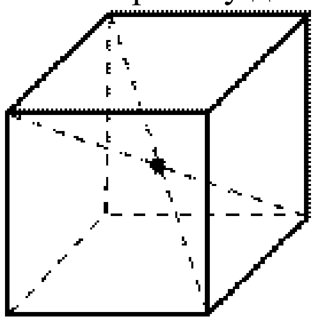
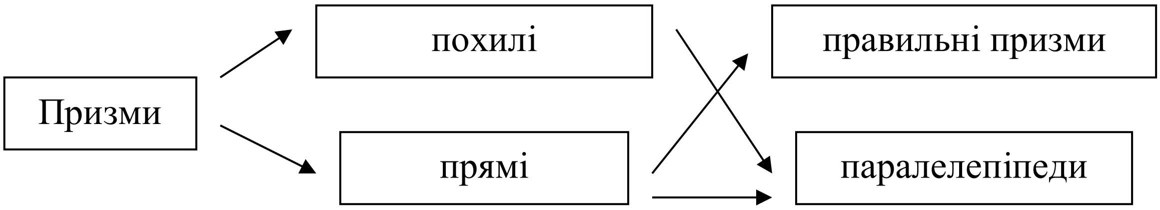


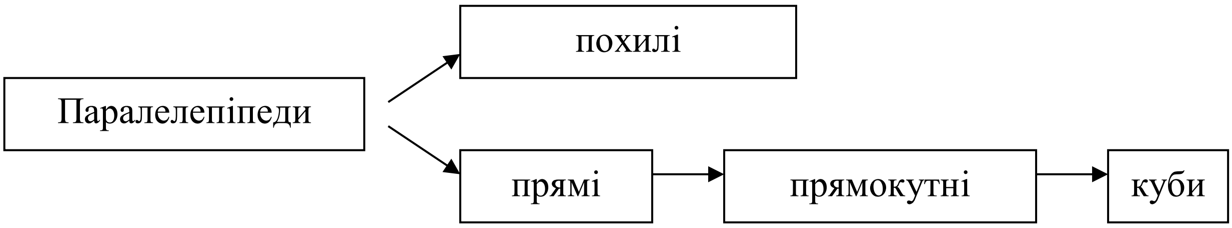
Рис.107

4. *Класифікація призм і паралепіпедів*

Класифікація призм



Класифікація паралелепіпедів



5. *Означення.****Піраміда*** – це многогранник, який складається з плоского многокутника (*основи* піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (*вершини піраміди*) і всіх відрізків, що з'єднують вершину з точками основи (рис.108).

Висота піраміди – це перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи.

Діагональний переріз піраміди – це переріз площиною, що проходить через вершину і діагональ основи.

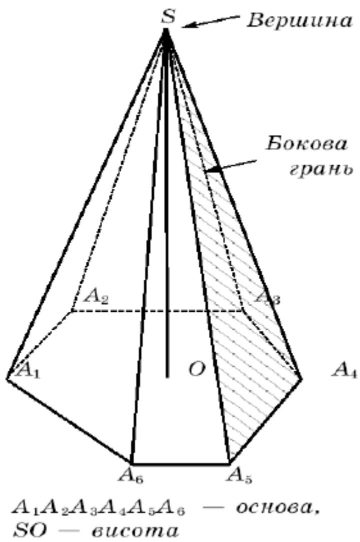
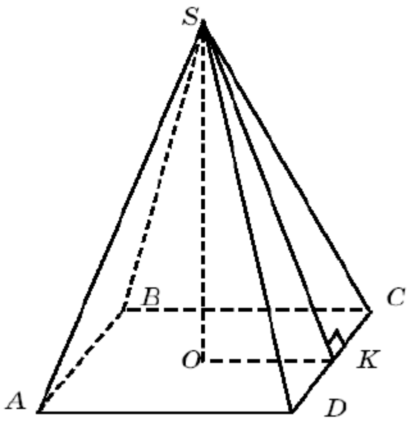


Рис. 108

Означення. ***Правильна піраміда*** –піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник і всі бічні ребра рівні.

Апофема – це висота бічної грані правильної піраміди (рис. 109).



SK — *апофема*

Рис.109

Властивості правильної піраміди

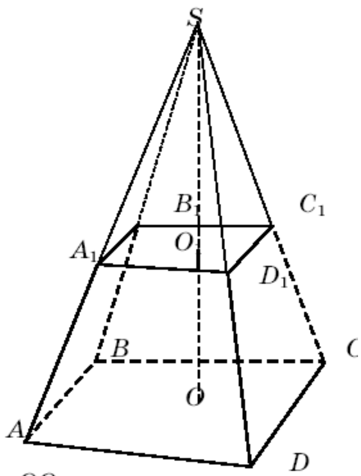
1. Основа правильної піраміди – правильний многокутник.

2. Бічні грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники.

3. Бічні ребра правильної піраміди рівні.

4. У перетині правильної піраміди площиною, що проходить через два не сусідні бічні ребра утворюється рівнобедрений трикутник. У деяких випадках може утворитися рівносторонній трикутник.

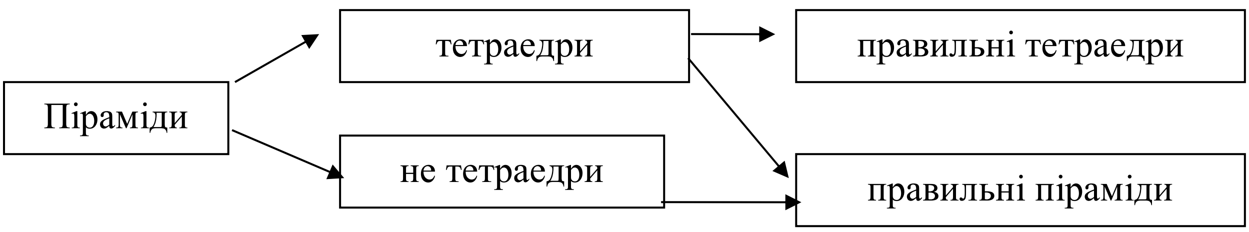
Площина, що перетинає піраміду і паралельна її основі, ділить її на дві частини: піраміду, подібну до даної ($SA_1B_1C_1D_1$) і так звану ***зрізану піраміду*** ($ABCDA_1B_1C_1D_1$). Основи зрізаної піраміди – подібні многокутники, а бічні грані – трапеції (рис.110).



OO_1 — *висота*

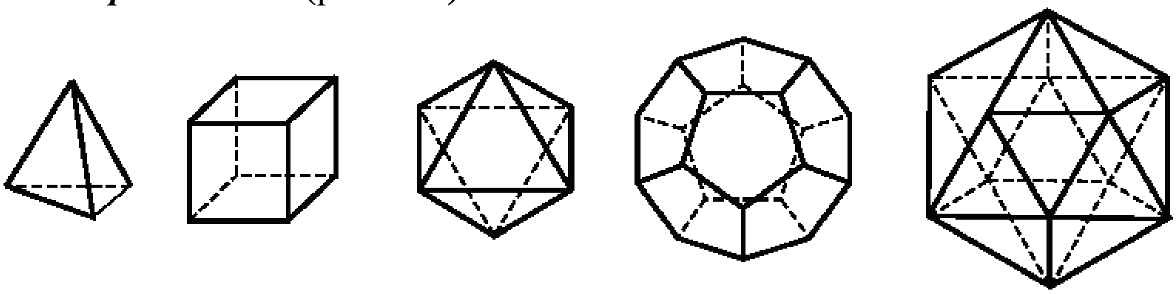
Рис. 110

Класифікація пірамід



Об’єднання граней, що не є основами многогранника називається його ***бічною поверхнею,*** а об’єднання всіх граней ***повною поверхнею многогранника***.

6. Опуклі многогранники, грані яких рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одне і теж число ребер, називаються ***правильними многогранниками*** (рис. 111).



а) б) в) г) д)

Рис. 111 (а – правильний тетраедр; б – куб (правильний гексаедр); в – правильний октаедр; г – правильний додекаедр; д – правильний ікосаедр).

Теорема Ейлера. У кожному опуклому многограннику з числом граней Г, числом вершин В і числом ребер Р сума числа верщин і граней перевищує число ребер на 2, тобто В + Г = Р + 2.

Терема Ейлера дає можливість показати, що існує лише 5 типів правильних многогранників, встановити кількість граней, вершин і ребер, визначити форму кожного правильного многогранника.

6. *Означення*. ***Циліндр*** – тіло, яке складається з двох кругів (основ циліндра), які не лежать в одній площині та суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що з’єднують відповідні точки цих кругів.

Циліндр називається ***прямим***, якщо його твірні перпендикулярні площинам основ (рис. 112). *Циліндр утворюється при обертанні прямокутника навколо сторони.*

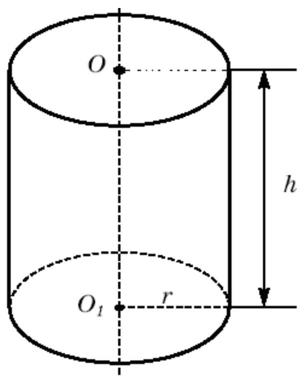


Рис. 112

Висота циліндра– це відстань між площинами основ (відрізок OO_1) (рис. 154).

Радіус циліндра – це радіус його основи.

Вісь циліндра – пряма, яка проходить через центри основ (пряма OO_1) (рис. 154).

Осьовий переріз циліндра – прямокутник, що проходить через вісь циліндра.

8. ***Конус (****прямий круговий конус****)*** – тіло, яке складається з круга – основи конуса, точки, що не лежить в площині цього круга, – вершини конуса і всіх відрізків, що з'єднують вершину конуса з точками основи, причому вершина ортогонально проектується в центр основи.

Конус утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо катета (рис. 113).

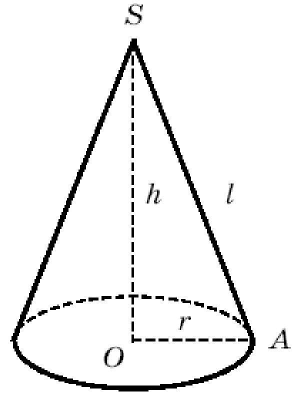


Рис. 113

Точка S – *вершина конуса*,круг (O,OA) – *основа конуса*, SA – *твірна конуса.*

Відрізок SO – *висота конуса*. Пряма SO – *вісь конуса.*

Властивості конуса

1) Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник.

2)Перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину є рівнобедрений трикутник.

3)Перерізом конуса площиною, перпендикулярно осі симетрії є круг.

Частина конуса, обмежена його основою і січною площиною, паралельно основі, називається ***зрізаним конусом***. Висотою зрізаного конуса називається відрізок перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки верхньої основи на нижню (OO_1 – висота зрізаного конуса). (рис. 114).

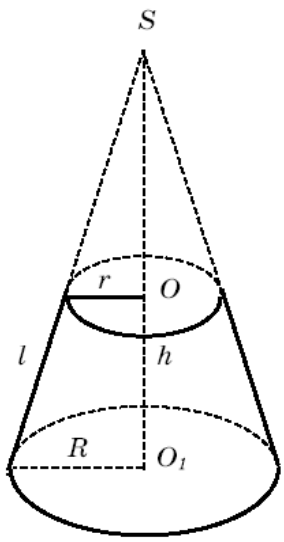


Рис. 114

7. *Означення*. ***Куля*** – тіло, яке складається з усіх точок простору, що знаходяться від даної точки на відстані не більше за задану відстань (рис. 115).

Означення. ***Сфера*** – межа кулі (рис. 116). Задана точка – центр кулі (сфери); задана відстань – радіус кулі (сфери).

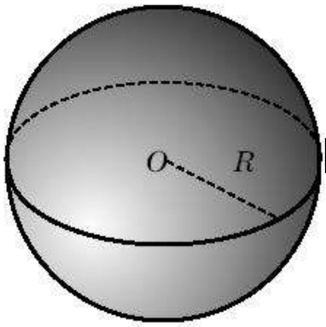


Рис. 115

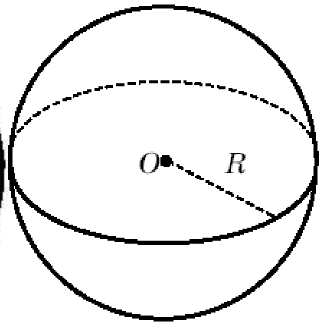


Рис. 116

Куля утворюється при обертанні півкруга навколо його діаметра як осі.

Відрізок, що з'єднує центр сфери з будь-якою її точкою, називається ***радіусом сфери.***

Площина α, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається ***дотичною до кулі*** (рис.117), а та, що має більше ніж одну спільну точку, – ***січною площиною***.

Всякий перетин кулі площиною – *круг*, центром якого є основа перпендикуляра, опущеного з центру кулі на січну площину.

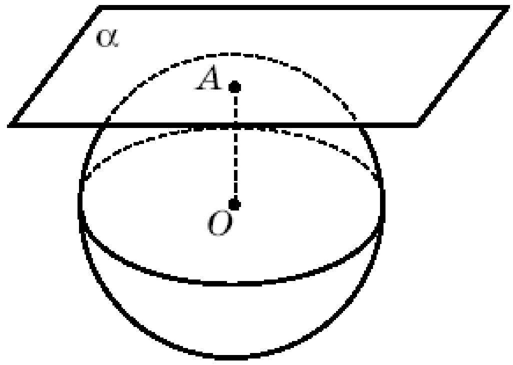


Рис. 117

Означення. ***Кульовий сегмент*** – це частина кулі, що відтинається січною площиною (рис. 118).

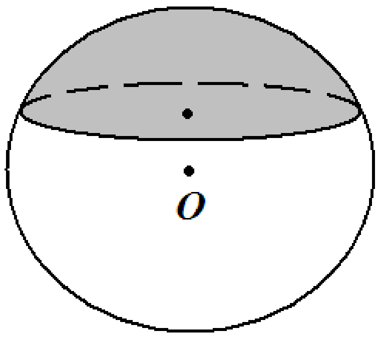


Рис. 118

Оновні формули стереометрії розміщено у додатку Б.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. *Дати означення:* многогранника, опуклого многранника та його елементів; призми, прямої призми, правильної призми; паралелепіпеда, прямого паралелепіпеда, прямокутного паралелепіпеда, куба; піраміди, правильної піраміди; правильних могогранників; циліндра, конуса; кулі, сфери.
2. Яка фігура утворюється при осьовому перерізі циліндра, конуса?
3. При обертанні яких фігур утворюються циліндр, конус, куля, сфера?
4. Яка площина називається дотичною до кулі, сфери?
5. Що є перерізом площиною кулі, сфери?
6. Чим відрізняється куля від сфери?
7. Скільки існує типів правильних многогранників?
8. Що називається апофемою?
9. Який многокутник лежить в основі призми, якщо вона має 5 граней? 6 граней? *n* граней?
10. Скільки вершин, ребер і граней має 4-кутна піраміда? 5-кутна? *n*-кутна?
11. Навести приклади об’єктів з навколишнього середовища, що мають форму призми, прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди.

12. Навести приклади об’єктів з навколишнього середовища, що мають форму циліндра, конуса, кулі.

13. Зобразити правильну чотирикутну піраміду, прямокутний паралелепіпед, зрізаний конус, зрізану трикутну піраміду.

14. Поставити куб так, щоб жодна грань не була вертикальною. Чи будуть тоді у нього горизонтальні грані?

15. Порівняти терміни: «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр». Чи можна стверджувати, що вони визначають одне і те ж?

Завдання для аудиторної роботи

1**.** Опуклий многогранник має B вершин. З кожної вершини виходить m ребер. Скільки плоских кутів і скільки ребер має такий многогранник?

2. Опуклий многогранник має $Г$ граней, кожна грань має n сторін. Скільки плоских кутів і скільки ребер має такий многогранник?

3. Правильний многогранник має: 1) 6 вершин, 12 ребер; 2) 20 вершин, 30 ребер. Визначити кількість граней цих многогранників. Як вони називаються?

4. Побудувати точку перетину прямої a з площинами граней тетраедра $SABC$, якщо пряма перетинає грані ASB та BSC.

5. Побудувати зображення правильного чотирикутника, вписаного в коло.

6. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через 3 точки, взяті на її бічних ребрах (бічних гранях).

Завдання для самостійної роботи

7. Правильний многогранник має: 1) 8 вершин, 12 ребер; 2) 12 вершин, 30 ребер. Визначити кількість граней цих многогранників. Як вони називаються?

8.Довести, що паралелограм не може бути зображенням трапеції.

9. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, взяті на її бічних ребрах (на бічних гранях).

10. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через 3 точки, взяті на трьох її бічних гранях.

Завдання підвищеної складності

11. Довести, що центри граней правильного октаедра є вершинами куба. Знайти довжину ребра куба, якщо ребро октаедра дорівнює $\boldsymbol{a}$.

12. Довести, що центри граней куба є вершинами правильного октаедра.

13. Побудувати переріз правильної шестикутної призми (піраміди) площиною, яка проходить через три точки, що лежать: а) на різних ребрах; б) на різних гранях; в) дві – на різних гранях, третя – на ребрі.

14. Дано правильну шестикутну призму, сторона основи якої дорівнює $\boldsymbol{a}$, бічні грані – квадрати. Побудувати переріз цієї призми площиною, що проходить через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи. Обчислити площу перерізу.

15. Побудувати зображення комбінації конуса і правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює висоті конуса.

16. Побудувати зображення конуса, вписаного в кулю, якщо діаметри основи конуса і кулі рівні.

17. Побудувати зображення комбінації конуса і правильної трикутної піраміди, вписаної в конус, висота якої дорівнює висоті конуса.

18. Побудувати зображення конуса, вписаного в кулю, якщо висота конуса дорівнює $\frac{2}{3}$ діаметра кулі.

7.5. ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

1. *Величиною* називається властивість предметів, явищ або процесів, яка в якомусь відношенні може бути більшою або меншою (за О.Д. Александровим).

Величини, які виражають одну і ту ж властивість об'єктів, називаються *однорідними.* Наприклад, усі маси тіл, усі площі фігур тощо.

Величини, для характеристики елементів яких цілком достатньо їх чисельного значення, називаються ***скалярними величинами***.

Величини, для характеристики елементів яких, крім чисельного значення, необхідно враховувати ще і напрям їх у просторі чи площині називаються ***векторними величинами.***

Приклади

1. Довжина, площа, об’єм, маса, робота, ціна, вартість – *скалярні величини*
2. Швидкість, прискорення, сила – *векторні величини.*
3. Довжина кімнати і довжина столу – *величини одного роду*.

Однорідні скалярні величини можна додавати, їх називають *адитивно-скалярними* величинами.

2. *Властивості однорідних адитивно-скалярних величин*

1) Для однорідних величин мають місце відношення ***"дорівнює", "більше" і "менше"***, причому для величин A і B має місце тільки одне з відношень $\boldsymbol{A<B}$, $\boldsymbol{A = B}$ **або** $\boldsymbol{A > B}$.

2) Відношення ***"менше"*** транзитивне: **(*A*<*B*) і (*B*<*C*), то (*A* < C).**

3) При додаванні однорідних величин одержують величину того ж роду, яку називають ***сумою*** вихідних величин. Додавання величин комутативне і асоціативне.

4) Величини одного роду можна віднімати, в результаті чого одержують величину того ж роду, яку називають ***різницею***вихідних величин. Різниця величин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ існує тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{A \geq B}$.

5) Величини одного роду можна множити на додатне дійсне чисто, в результаті чого одержують величину того ж роду. Для будь-якої величини $\boldsymbol{A}$ і числа $\alpha \in \boldsymbol{R}$. існує єдина величина $\boldsymbol{B}$, така що $\boldsymbol{B = \alpha A}$, яку називають ***добутком***величини $\boldsymbol{A}$ на число α.

6) Величини одного роду можна ділити, в результаті чого одержують

число. ***Часткою*** величин ***А*** і ***В*** називають таке дійсне число $\alpha = A{:}B$, що $A = \alpha B$.

3. Якщо задана величина ***А*** і вибрана одиниця величини ***Е*** (того ж роду), то ***виміряти величину А***– це означає знайти таке дійсне додатне число α. Що $A = \alpha E$.

Число α називають ***числовим значенням*** величини ***А*** при одиниці величини ***Е***. Воно показує, у скільки раз величина ***А*** більше (або менше) величини ***Е***, що прийнята за одиницю вимірювання, наприклад: 2,7кг = 2,7 ·1кг; 16см = 16 ·1см.

1. В геометрії ***довжина*** – це величина, яка характеризує протяжність відрізка, а також інших ліній (ламаної, кривої).

Основною одиницею вимірювання довжини в метричній системі мір є метр. За **метр** прийнято довжину 1 650 763, 73 хвилі оранжевої лінії криптона 86.

Одиниці довжини: 1м; 1см = 10^{-2}м; 1мм=10^{-3}м; 1км=1000 м.

Старовинні міри довжини:

1 верста = 500 сажень (1,067 км);

1сажень = 3 аршинам (2,134 м);

1 аршин = 16 вершкам (71,12 см);

1 вершок = $\frac{7}{48}$ фута (44,5 мм);

1 фут = 12 дюймів (30, 48 см);

1дюйм = 25, 40 мм;

1 географічна миля = 6,9569 версти (7.4217 км);

1 морська миля = 1,7362 версти (1.8522 км).

*Властивості **довжини відрізка***:

1) рівні відрізки мають рівні довжини;

2) якщо відрізок складається з двох відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин його частин;

3) існує відрізок, довжина якого дорівнює 1.

Число, яке одержують при вимірюванні довжини відрізка називають числовим значенням довжини або мірою відрізка. Воно має задовольняти ряд вимог:

1) рівні відрізки мають рівні числові значення довжин;

2) якщо відрізок x складається з відрізків x_1 і x_2, то числове значення його довжини дорівнює сумі числових значень довжин відрізків x_1 і x_2;

3) при заміні одиниці довжини числове значення довжини даного відрізка збільшується (зменшується) у стільки раз, у скільки нова одиниця менше (більше) старої;

4) числове значення довжини одиничного відрізка дорівнює одиниці.

Нехай *а* – довільний відрізок, *е* – одиничний відрізок. Можливі випадки:

1. $a = ne$, де $n \in N$. Наприклад, $a = 3e$. 3 – міра відрізка a. Відрізок e є спільниою мірою відрізків a і e (a і e – сумірні відрізки).

2. $a=me_1$, $e_1=\dfrac{e}{n}$, де m, n є N. Тоді $a=\dfrac{m}{n}e$. Наприклад, $a=\dfrac{2}{3}e$. $\dfrac{2}{3}$ – міра відрізка a, число раціональне. Відрізки a і e – сумірні. Спільною мірою є відрізок e_1 .

3. $a = ke$, де k – число ірраціональне. Відрізки a і e не мають спільної міри (несумірні).

5. ***Площа фігури*** – це додатна величина, яка має такі властивості:

1) рівні фігури мають рівні площі;

2) якщо фігура складається з кількох частин, то її площа дорівнює сумі площ цих частин;

3) існує квадрат, площа якого дорівнює одиниці; це квадрат зі стороною, рівною одиниці довжини.

Числове значення площі має задовольняти вимогам, аналогічним до числового значення довжини.

Теорема. Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін.

Одиниці площі: 1м^2; 1см^2 = 10^{-4}м^2; 1мм^2=10^{-6}м^2; 1км^2=10^{6}м^2. 1ар(сотка)=100м^2; 1 га(гектар)=100ар=10000м^2.

6. ***Рівноскладеність та рівновеликість многокутників***

Означення. Два многокутники називаються рівноскладеними, якщо їх можна розкласти на однакову кількость відповідно рівних многокутників.

Означення. Два многокутники називаються рівновеликими, якщо їх площі рівні.

Теорема. Якщо многокутники рівноскладені, то вони рівновеликі, і навпаки, якщо многокутники рівновеликі, то вони рівноскладені.

Властивості площ, зв'язок рівноскладеності та рівновеликості використовується при виведенні формул площ прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції.

Оновні формули планіметрії розміщено у додатку А.

7. Об'єм тіла (місткість)– це додатна величина обмеженої частини простору, яку займає це тіло і має такі властивості:

1) рівні тіла мають рівні об'єми;

2) якщо тіло розбито поверхнею на дві частини, то об'єм цього тіла дорівнює сумі об'ємів утворених частин;

3) існує тіло, об'єм якого дорівнює одиниці; це куб, ребро якого рівне одиниці довжини.

Основна одиниця вимірювання об'єму – один літр (1л = 1 дм^3).

Одиниці вимірювання об'єму:1 м^3= 1000 дм^3, 1 дм^3 = 1000 см^3, 1 см^3 = 1000 мм^3.

Старовинні міри місткості:

1 бочка = 4, 9196 гектолітра;

1 відро = 12, 299 літра;

1 штоф = 1,2299 літра;

1 пляшка = 0,3074 літра;

1 сотка (чарка) = 0,123 літра.

8. Рівноскладеність та рівновеликість многогранників

Означення. Два многогранники називаються рівноскладеними, якщо їх можна розкласти на однакову кількість відповідно рівних многогранників.

Означення. Два многогранники називаються рівновеликими, якщо їх об'єми рівні.

Теорема. Якщо многогранники рівноскладені, то вони рівновеликі. Обернена теорема не існує. Властивості об'єму, зв'язок рівноскладеності та рівновеликості, метод границь використовуються для виводу формул об'ємів многогранників.

8. Час – величина, яка характеризує послідовність зміни явищ і станів матерії, тривалість їх буття.Час – основна величина Міжнародної системи.

Основна одиниця вимірювання часу – секунда. *Секунда* рівна 9 192 631 770 періодам випромінювання, відповідного переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія – 133.

Одиниці вимірювання часу:

1 хв = 60 с, 1 год = 60 хв = 3600 с, 1 доба = 24 год = 1440 хв = 86 400 с.

Доба – проміжок часу обертання Землі навколо своєї осі. Широко використовуються одиниці часу: *тиждень, місяць, рік, століття, тисячоліття* тощо. *Місяць* – проміжок часу обертання Місяця навколо Землі, *рік* – проміжок часу обертання Землі навколо Сонця.

9. Маса – одна із основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, яка є мірою його інертності та гравітації.

Основною одиницею маси є *кілограм*. Еталоном кілограма маси є маса платино-іридієвої копії міжнародного кілограма.

Одиниці маси: 1 кг = 1000 г; 1 ц = 100 кг; 1т = 1 000 кг; 1 міліграм (мг) = 0, 001 г.

Старовинні міри маси:

1 пуд = 16, 380 496 кг;

1 фунт = 409, 51241 г;

1 лот = 12, 797 263 г;

1 золотник = 4, 2657543 г;

1 доля = 44, 4349 мг.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. ***Дати означення:*** величини; числового значення величини; довжини відрізка; площі фігури.
2. Які величини називаються однорідними?
3. Які величини називаються векторними (скалярними)?

4. Які основні одиниці вимірювання довжини (площі)?

5. Навести приклади однорідних величини.

6. Сформулювати властивості однорідних величин.

7. Які з величин векторні, а які скалярні: площа; маса; швидкість; вартість; ціна; прискорення; сила тертя; сила опору; час; об'єм; довжина.

Завдання для аудиторної роботи

Довжина

1. У прямокутнику $ABCD$ $AB = a$, $\angle BAC$ дорівнює 60^0. Знайти периметр прямокутника та діагоналі.

2. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12 см. Знайти катети трикутника.

3. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його сторону на відрізки довжиною m і n. Визначити діагоналі ромба.

4. У прямокутний трикутник з катетами a і b вписано квадрат, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр квадрата.

5. Навколо кола з діаметром 15 см описана рівнобічна трапеція з бічною стороною, рівною 17 см. Знайти основи трапеції.

6. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобічної трапеції з основами 20 смі 12 см, якщо відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції.

7. Точка P віддалена на 7 см від центра кола радіуса 11 см. Через цю точку проведена хорда довжиною 18 см. Яка довжина відрізків, на які ділиться хорда точкою P ?

Площа

8. У квадраті, сторона якого a, середини двох суміжних сторін сполучені між собою і з протилежною вершиною квадрата. Знайти площу утвореного трикутника.

9. Площа прямокутника рівна 9 см^2, а величина одного із кутів, утвореного діагоналями, рівна 120^0. Знайти сторони прямокутника.

10. Висота ромба 12 см, а одна із його діагоналей рівна 15 см. Знайти площу ромба.

11. У рівнобедрену трапецію вписано круг. Одна із бічних сторін ділиться точкою дотику на відрізки довжиною m і n. Визначити площу трапеції.

12. Круг радіуса R поділено двома концентричними колами на три рівновеликі частини. Визначити радіуси цих кіл.

13. У правильній трикутній піраміді сторона основи – 6 см, висота піраміди – 14 см. Визначити площу повної поверхні піраміди.

14. У якого тіла поверхня більша: у куба з ребром 3,0 дм чи у кулі з діаметром 3,3 дм і на скільки?

15. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут 60^0. Знайти повну поверхню циліндра, якщо радіус основи рівний R.

16. Показати, що: 1) довільний паралелограм рівноскладений з прямокутником, одна сторона якого збігається зі стороною паралелограма, а інша дорівнює висоті паралелограма, опущеної на цю сторону; 2) довільна трапеція рівноскладена з прямокутником, одна із сторін якого дорівнює середній лінії трапеції, а інша сторона – висоті трапеції; 3) довільний трикутник рівноскладений з прямокутником, одна сторона якого збігається зі стороною трикутника, а інша дорівнює половині висоти трикутника, опущеної на цю сторону.

17. Вивести формули площ паралелограма, трапеції, трикутника, якщо площа прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін.

Об'єм

16.Скільки землі вийняли, риючи канал довжиною 200 м, глибиною 1,5 м, якщо поперечний розріз каналу – рівнобічна трапеція, верхня основа якої 2 м, а нижня основа на 30 % менша верхньої основи?

17. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α. Знайти об'єм конуса, якщо висота конуса дорівнює h.

18. Зовнішній діаметр порожнистої кулі 18 см, товщина стінок 3 см. Знайти об'єм стінок.

19. Кожне із бічних ребер піраміди дорівнює 10 см. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайти об'єм піраміди.

20. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною 15 см. Знайти об'єм циліндра.

Маса. Час

21. Скільки потрібно часу, щоб відрахувати мільйон пір'їн , якщо кожну хвилину відраховувати по 50 пір'їн і займатися цим 8 год у добу.

22. Маса зайця на 3 кг більша за масу кроля. Маса двох зайців така сама, як маса 5 кролів. Яка маса зайця, а яка – кроля?

23. З 24 кг бавовняного насіння одержали 6 кг олії. Скільки потрібно бавовняного насіння для одержання 5 кг олії?

24. Чи може людина підняти 1 м^3 пробки (питома вага пробки 0,2 г/см^3)?

25. Зустріч друзів почалася о 10 год 30 хв, а закінчилася о 13 год 15 хв. Скільки часу тривала зустріч?

26. Є бідони місткістю 3 л і 5 л. Як можна за допомогою цих бідонів набрати з річки 1 л води?

Завдання для самостійної роботи

Довжина

27. Два кола дотикаються зовнішньо. Знайти відстань від точки дотику до їх спільної дотичної, якщо радіуси кіл 3 см та 1 см.

28. У сектор AOB з радіусом R і кутом 90^0 вписано коло, яке дотикається до відрізків OA, OB та дуги AB. Знайти радіус кола.

29. Основа рівнобедреного трикутника рівна $4\sqrt{2}$ см, а медіана бічної сторони 5см. Знайти довжини бічних сторін.

30. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, рівна m і ділить прямий кут у відношенні 1:2. Знайти сторони трикутника.

31. У ромб, який ділиться своєю діагоналлю на два рівносторонніх трикутника, вписано коло радіуса 2 см. Знайти сторону ромба.

Площа, об'єм

32. Знайти площу правильного трикутника, вписаного в квадрат зі стороною a , якщо одна з вершин трикутника збігається з вершиною квадрата.

33. Периметр ромба рівний $2p$,довжини діагоналей відносяться як $m : n$. Обчислити площу ромба.

34. Обчислити площу прямокутної трапеції, якщо її гострий кут рівний 60^0, менша основа рівна a і більша бічна сторона рівна b.

35. Площа кругового кільця – S. Радіус більшого кола рівний довжині меншого кола. Визначити радіус меншого кола.

36. Чи вистачить 20 г фарби для фарбування 10 м'ячів діаметром 40 см, якщо на 1дм^2 йде 0,01 г фарби?

37. Скільки квадратним метрів жерсті треба для виготовлення 10 відер циліндричної форми, якщо висота відра 0,4 м, а діаметр основи 0,3 м?

38. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 30^0, радіус основи 15 см. Визначити бічну поверхню конуса.

39. Основою прямої призми є ромб з діагоналями 6 см і 8 см, висота призми 12 см. Обчислити площу повної поверхні та об'єм призми.

40. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, висота h. Знайти площу повної поверхні та об'єм цієї піраміди.

41. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α . Знайти об'єм конуса, якщо діаметр основи дорівнює d.

42.Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут α . Знайти об'єм циліндра, радіус основи якого R.

Маса. Час

43. У 1 л морської води міститься в середньому 0, 00001мг золота. Скільки золота міститься в 1 км^3 морської води?

44. Маса краплі води в середньому 0,08 г. Скільки крапель у 1 кг води?

45. Якої довжини утвориться лінія, якщо 1 км^3 розрізати на м^3 і викласти їх в один ряд?

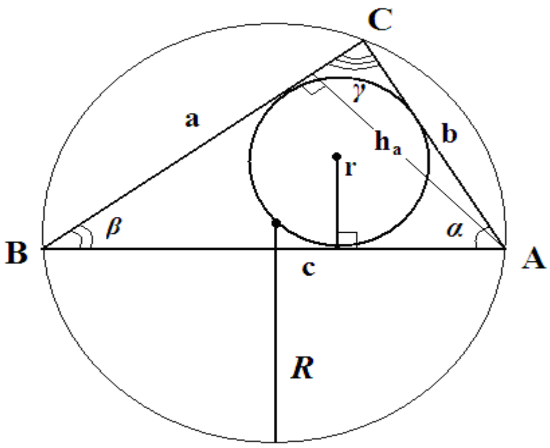
46. Рухаючись орбітою навколо Сонця, Земля за 1 с проходить 29 км 800 м. Яку відстань пройде Земля за 10 хв?

47. Батькові 39 років, а синові 14. Скільки років дочці, якщо через 16 років синові та дочці разом буде стільки ж років, скільки батькові?

48. З 23 га зібрали 506 ц гречки. Скільки центнерів рису зібрали з 18 га, якщо врожайність рису в два рази вища , ніж гречки ?

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ПЛАНІМЕТРІЇ

1. ***Довільний трикутник*** (довжини сторін, що лежать проти вершин ***A, B*** и ***C***, дорівнюють ***a, b, c*** відповідно; α , β , γ – величини кутів ***A, B*** і ***C; p*** – півпериметр; ***R*** – радіус описаного кола; ***r*** – радіус вписаного кола; ***S*** – площа; h_A – висота, що проведена з вершини ***A***):



$$S = \frac{1}{2} h_a a \qquad S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

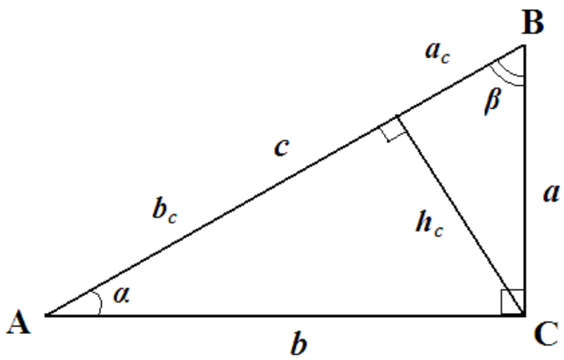
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos\alpha$ – теорема косинусів;

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ – теорема синусів.

2. ***Прямокутний трикутник*** (a, b – катети; c – гіпотенуза; a_c, b_c – проекції катетів на гіпотенузу):



$$S = \frac{1}{2} ab \quad S = \frac{1}{2} c \cdot h_a$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{c}{2}$$

$a^2+b^2=c^2$ – теорема Піфагора.

$\dfrac{a_c}{h_c} = \dfrac{h_c}{b_c}$; $\dfrac{a_c}{a} = \dfrac{a}{c}$;

$\dfrac{b_c}{b} = \dfrac{b}{c}$;

$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\beta}$

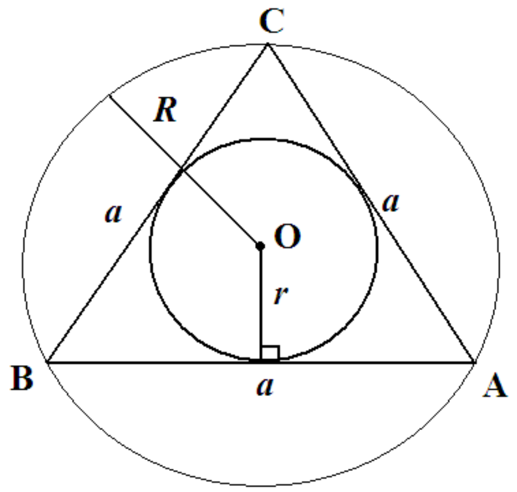
.

3. ***Рівносторонній трикутник***:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

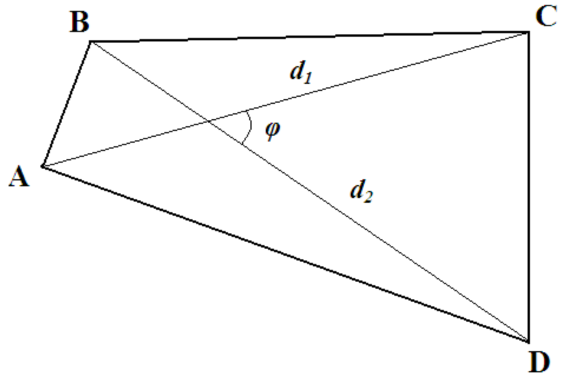
$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



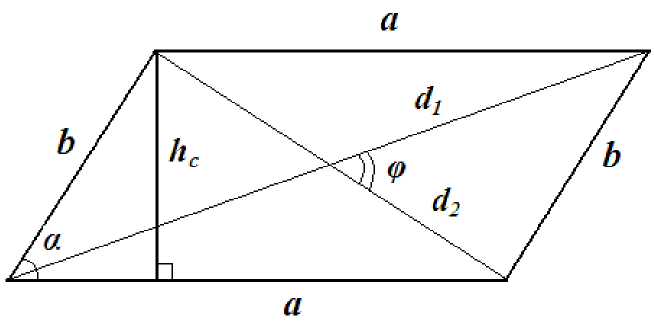
4. ***Довільний чотирикутник*** (d_1 *і* d_2 – діагонали; φ – кут між ними; S – площа):

$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$



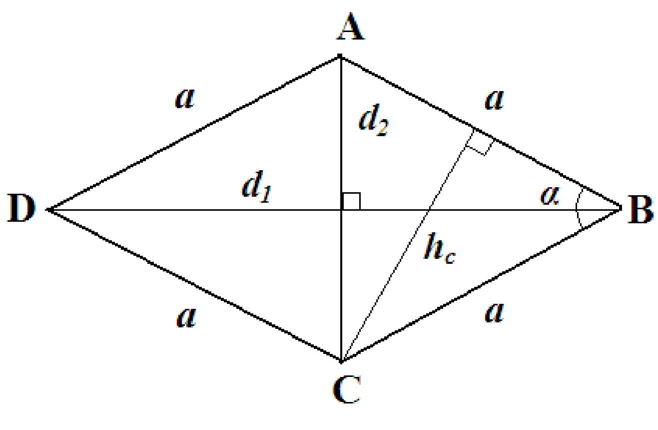
5. ***Паралелограм*** (a і b – суміжні сторони; α – кут між ними; h_a – висота, проведена до сторони a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$



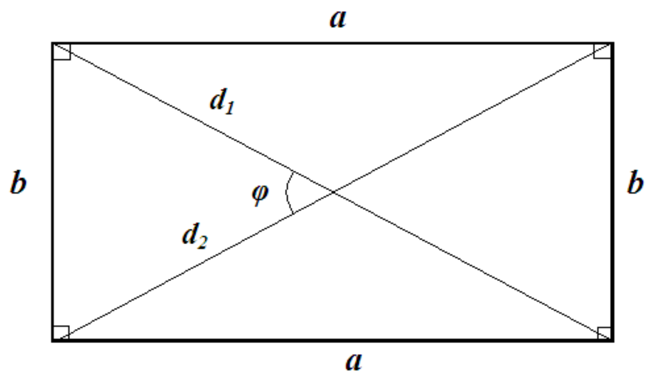
6. ***Ромб***:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1 d_2.$$



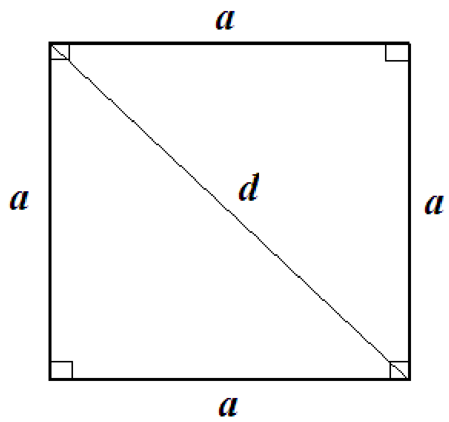
7. ***Прямокутник***:

$$S = ab = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi; \ d_1 = d_2.$$



8. ***Квадрат*** (*d* – діагональ):

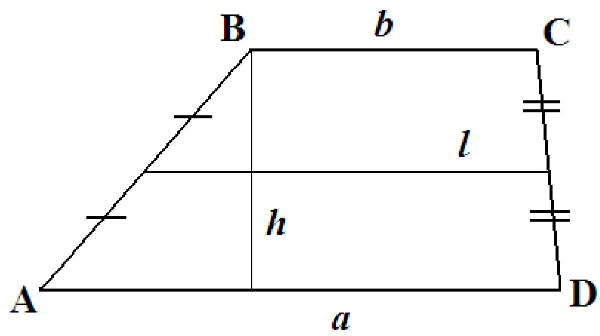
$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$



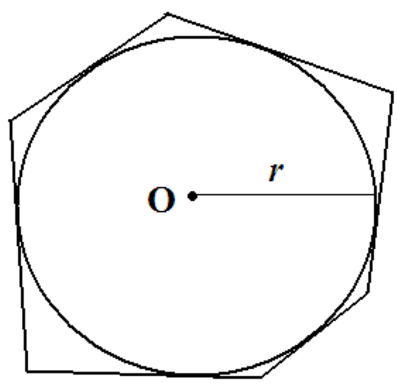
9. ***Трапеція*** (*a* і *b* – основи; *h* – відстань між ними; *l* – средня лінія):

$$l = \frac{a+b}{2};$$

$$S = \frac{a+b}{2}h = lh.$$



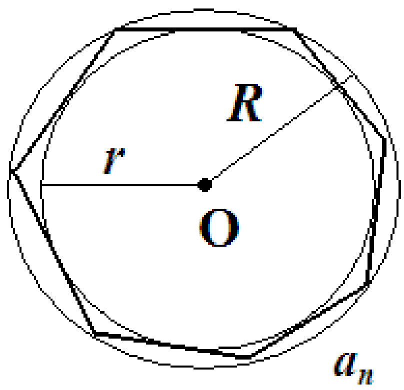
10. ***Описаний многокутник*** (*p* – півпериметр; *r* – радіус вписаного кола):
S=*pr*.



11. ***Правильний многокутник*** (a_n – сторона правильного n–кутника; R – радіус описаного кола; r – радіус вписаного кола):

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n};$$

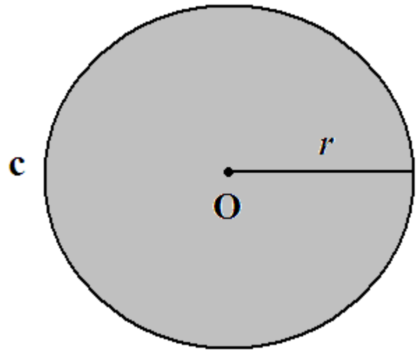
$$S = \frac{na_n r}{2}.$$



12. ***Коло, круг*** (r – радіус; c – довжина кола; S – площа круга):

$$c = 2\pi r;$$

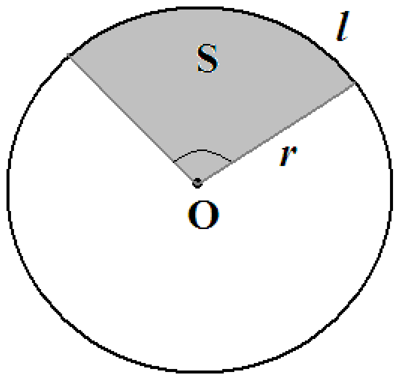
$$S = \pi r^2.$$



13. ***Сектор*** (l - довжина дуги, що обмежує сектор; n^o – градусна міра відповідного центрального кута; α– радіанна міра центрального кута):

$$l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = r\alpha;$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^0} = \frac{1}{2}r^2\alpha.$$



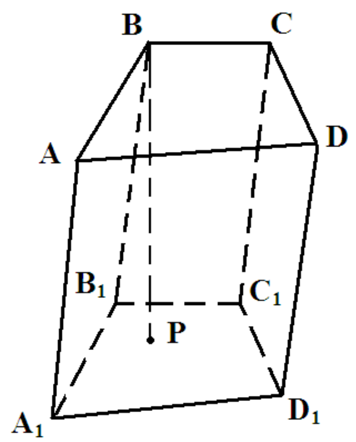
ОСНОВНІ ФОРМУЛИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Призма

Площа поверхні: $S_{пов} = 2S_{осн} + S_{біч}$, де $S_{осн}$ — площа основи призми; $S_{біч}$ — площа бічної поверхні призми;

$S_{біч} = Pl$; P — периметр перпендикулярного перерізу; l — довжина бічного ребра.

Об'єм: $V = QH$, $V = Q_1 l$, де Q — площа основи; H — висота призми, Q_1 — площа перпендикулярного перерізу.



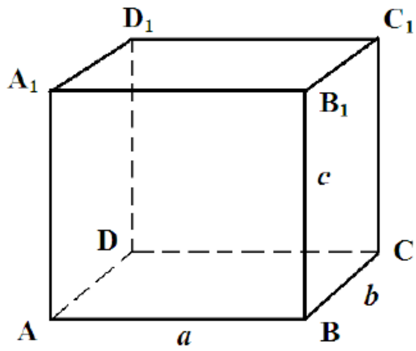
Прямокутний паралелепіпед

Властивості діагоналей: $AC_1 = BD_1 = CA_1 = DB_1 = d$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Всі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл.

Площа поверхні: $S = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = abc$.

Зокрема, для **куба** $a=b=c$, $d=\sqrt{3}a$, $S=6a^2$, $V=a^3$.



Піраміда

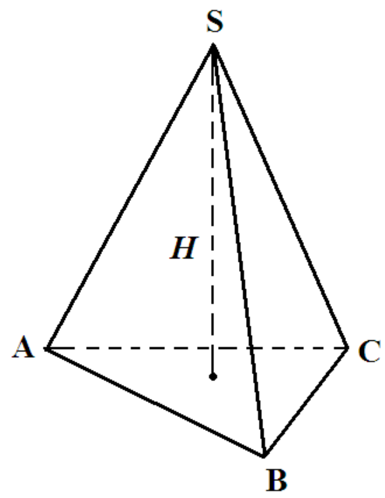
Довільна піраміда

Об'єм: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$,де S — площа основи; H — висота.

Правильна піраміда

Площа поверхні: $S_{біч} = \frac{1}{2} Ph_{біч}$, де P — периметр основи; $h_{біч}$ — висота бічної грані.

$Q = S_{біч} \cos \alpha$, де α — кут між бічною гранню і площиною основи.

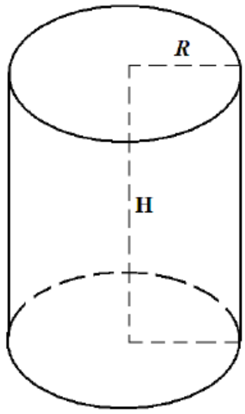


Зрізана піраміда

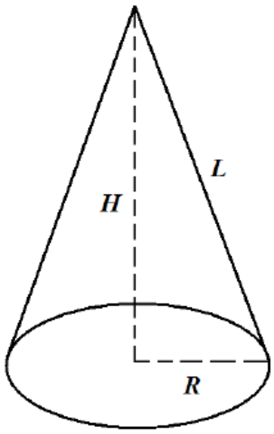
Об'єм: $V = \frac{h}{3}\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right)$,

де h — висота; Q_1, Q_2 — площі основ. Для *правильної зрізаної піраміди:* $S_{біч} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)h_{біч}$, де p_1, p_2 периметри основ; $h_{біч}$ — висота бічної грані.

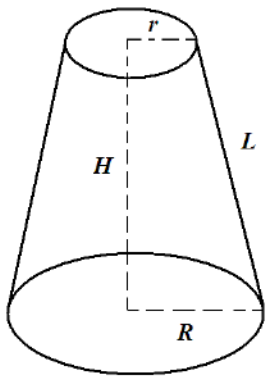
Циліндр
Площа бічної поверхні: $S_{біч} = 2\pi RH$.
Площа повної поверхні: $S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2$.
Об'єм: $V = \pi R^2 H$.



Конус
Площа бічної поверхні: $S_{біч} = \pi RL$.
Площа повної поверхні: $S_{кон} = \pi RL + \pi R^2$.
Об'єм: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

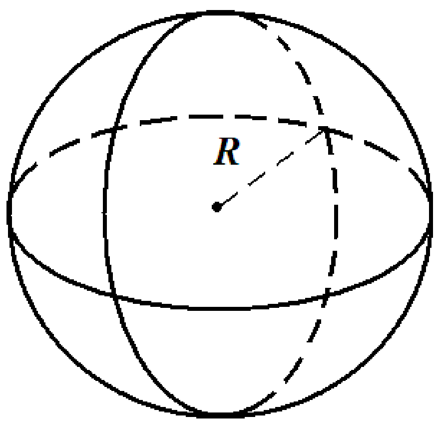


Зрізаний конус
Площа поверхні $S_{біч}=\pi(R + r)l$,
$S_{кон}=\pi R^2+\pi r^2+\pi(R + r)l$,
Об'єм: $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$.



Куля
Площа поверхні: $S = 4\pi R^2$.
Об'єм: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
Площа сферичного сегменту: $S = 2\pi RH$ (H – висота сегменту).

Об'єм кульового сегменту: $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$.
Об'єм кульового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.



ЛІТЕРАТУРА

1. Боровик В.Н. Курс математики / В. Н. Боровик, М. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко – К.: Вища шк., 1995. – 346 с.

2. Боровик В. Н. Математика. Посібник для педінститутів / В. Н. Боровик Л. М. Вивальнюк, В. М. Костарчук, Ю. В. Костарчук , З. Г. Шефтель – К.: Вища шк., 1980

3. Вивальнюк Л. М. Елементи дискретної математики. – Ч.1. Методичний лист / Л. М. Вивальнюк – К.: Рад. шк., 1970. – 47 с.

4. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко – К.: Вища шк., 1988. – 272 с.

5. Вивальнюк Л. М. Математика. Методичні вказівки до вивчення курсу для студентів-заочників спец. "Педагогіка і методика початкового навчання"/ Л. М. Вивальнюк, В. Н. Боровик, З. Г. Шефтель – К.:Вища шк.,1975. – 76 с.

6. Гібалова Н.В., Карапузова Н.Д., Ржеко В.А. Математика: навчальний посібник.Полтава:АСМІ,2017.360с.

7. Завало С.Т. Математика. Елементи теорії множин і комбінаторики. Елементи математичної логіки і деякі алгебраїчні поняття. Методичні вказівки до вивчення курсу для студентів-заочників спец. "Педагогіка і методика початкового навчання"/ С. Т. Завало, Л. М. Вивальнюк – К.: Вища шк., 1973. – 72 с.

8. Кухар В. М Теоретичні основи початкового курсу математики / В. М. Кухар, В. М. Білий – К.: Вища шк. 1980. – 350 с.