Міністерство освіти і науки України
Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка

Ю. Д. Москаленко, О. А. Москаленко, О. В. Коваленко

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Полтава – 2021

УДК 512.64(075.8)
М82

Рецензенти:

Л. О. Флегантов, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії;

Т. О. Кононович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та інформатики Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка

Затверджено та рекомендовано до друку вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка. Протокол № 13 від 17 червня 2021 року

М82 Москаленко Ю. Д., Москаленко О. А., Коваленко О. В.

Лінійна алгебра : метод. рек. до проведення практ. занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2021. 91 с.

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи з дисципліни "Лінійна алгебра" є системою методично-дидактичних матеріалів, які розкривають різні аспекти алгебраїчної підготовки студентів. Структура і зміст рекомендацій дозволяють індивідуалізувати навчання студентів, реалізувати ефективні підходи до вивчення дисципліни, належно організувати самостійну роботу майбутніх учителів математики.

Для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

ПЕРЕДМОВА

Пропоновані методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи написані відповідно до робочої навчальної програми дисципліни "Лінійна алгебра".

Мета вивчення дисципліни:

✓ оволодіння студентами ґрунтовною математичною підготовкою з теорії об'єктів трьох типів, що тісно пов'язані між собою – лінійних просторів, матриць та алгебраїчних форм;

✓ застосування методів і теоретичних положень лінійної алгебри в процесі опису просторових форм навколишнього світу.

Посібник містить 6 параграфів відповідно до змістових модулів робочої навчальної програми дисципліни, яку опановують студенти першого курсу предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) в Полтавському національному педагогічному університеті імені В. Г. Короленка. Кожний параграф складається із кількох тематичних підпунктів, що містять приклади розв'язань типових задач та вправи для самостійної роботи.

Перед тим, як користуватися посібником, студент має опрацювати відповідний теоретичний матеріал (див. список рекомендованої літератури).

Вивчаючи курс лінійної алгебри, студенти мають виконати протягом кожного семестру дві контрольні роботи та одне індивідуальне навчально-дослідне завдання. Наведені приклади розв'язань задач і розв'язування студентами завдань для самостійної роботи сприяють формуванню необхідних знань та вмінь для успішного проходження поточного і підсумкового контролю.

§ 1. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Приклади розв'язань задач

Задача № 1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 8, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -10. \end{cases}$

Розв'язання.

а) Запишемо розширену матрицю заданої системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -29 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-0,25) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, початкова система рівносильна системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ \qquad 7x_2 + x_3 = 17, \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

Звідки

$$x_3 = 3;\; x_2 = \frac{17 - x_3}{7} = 2;\;\; x_1 = 10 - x_3 - 3x_2 = 1.$$

Відповідь: (1, 2, 3).

б) Запишемо розширену матрицю заданої системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}(-2)(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Одержали, що ступінчаста система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad 5x_2 + x_3 = -1, \\ \qquad\qquad\quad 0 = -7 \end{cases}$$

рівносильна даній системі і містить несумісне рівняння $0 = -7$. Отже, система несумісна.

Відповідь: система не має розв'язку.

в) Розширену матрицю заданої системи за допомогою елементарних перетворень зведемо до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & -4 & 7 & 8 \\ 1 & -8 & 5 & -5 & -10 \end{array}\right)\begin{matrix}(-2)\;(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & 6 & -8 & -12 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ (-0,5) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 6 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, початкова система рівносильна ступінчастій системі

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ \quad -5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -6. \end{cases}$$

Із останнього рівняння виразимо x_2 через невідомі x_3 та x_4, зробивши їх вільними змінними. Підставимо знайдений вираз замість x_2 у перше рівняння та виразимо x_1 через невідомі x_3 та x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ - \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ \quad - \ 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ - \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ \quad x_2 = \dfrac{3x_3 - 4x_4 + 6}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot \dfrac{3x_3 - 4x_4 + 6}{5} \ - \ \ x_3 + 3x_4 = 2, \\ \quad x_2 = \dfrac{3x_3 - 4x_4 + 6}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 7x_4 + 2}{5}, \\ x_2 = \dfrac{3x_3 - 4x_4 + 6}{5}. \end{cases}$$

Відповідь: $X = \left\{ \left(-\dfrac{x_3 + 7x_4 + 2}{5},\ \dfrac{3x_3 - 4x_4 + 6}{5},\ x_3,\ x_4 \right) \middle| \, x_3, x_4 \in R \right\}.$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати методом Гаусса системи лінійних рівнянь у полі R:

1.1.1. $\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ 1.1.2. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + \ x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 16, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -7; \end{cases}$

1.1.3. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 18, \\ -2x_1 + 3x_2 - \ x_3 = -13, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 27; \end{cases}$ 1.1.4. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 26, \\ 4x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 13, \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10; \end{cases}$

1.1.5. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=-1, \\ -3x_1+5x_2-2x_3=10, \\ 4x_1-3x_2+x_3=-13; \end{cases}$ 1.1.6. $\begin{cases} -5x_1+2x_2+3x_3=-11, \\ -3x_1-x_2+4x_3=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1; \end{cases}$

1.1.7. $\begin{cases} 6x_1+2x_2-3x_3=-4, \\ 7x_1+3x_2-4x_3=-2, \\ -4x_1-2x_2+3x_3=0; \end{cases}$ 1.1.8. $\begin{cases} 2x_1-7x_2+x_3=6, \\ 5x_1-4x_2+2x_3=27, \\ -3x_1+2x_2-2x_3=-19; \end{cases}$

1.1.9. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_4=3, \\ 3x_1+5x_2-4x_3-7x_4=3, \\ -x_1+x_2+4x_3+x_4=3, \\ x_1+x_2-4x_3-4x_4=0; \end{cases}$

1.1.10. $\begin{cases} -4x_1+4x_2+5x_3+3x_4=5, \\ 3x_1+7x_2-6x_3-4x_4=5, \\ -7x_1-3x_2+11x_3+7x_4=0, \\ -2x_1-18x_2+7x_3+5x_4=-15; \end{cases}$

1.1.11. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+6\mathrm{x}_3-2x_4=5, \\ -6x_1+6x_2-4x_3-4x_4=3, \\ -10x_1+10x_2-16x_3=-7, \\ -4x_1+4x_2+2x_3-6x_4=8; \end{cases}$

1.1.12. $\begin{cases} 3x_1+x_3-4x_4=7, \\ 5x_1+8x_2+7x_3=-1, \\ 4x_1+4x_2+4x_3-2x_4=3, \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4=-4; \end{cases}$

1.1.13. $\begin{cases} x_1+7x_2-8x_3-2x_4=6, \\ -2x_1+7x_2+x_3-4x_4=4, \\ -21x_2+15x_3+8x_4=-16, \\ x_1-14x_2+7x_3+6x_4=-10; \end{cases}$

1.1.14. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 2, \\ 17x_2 + 16x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 2x_4 = -2; \end{cases}$

1.1.15. $\begin{cases} 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -2, \\ -6x_1 + 7x_2 - x_3 = 5, \\ -6x_1 + 15x_2 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -9; \end{cases}$

1.1.16. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 4, \\ -5x_1 + 3x_3 = -2, \\ -9x_1 + 16x_2 - 9x_3 + 14x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 - 15x_3 + 14x_4 = -6. \end{cases}$

1.2. Підстановки. Визначники n-го порядку

Приклади розв'язань задач

Задача № 2. Визначити парність підстановки

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1 спосіб. За означенням підстановка φ буде парною, якщо має парну кількість неправильних пар (інверсій). Тому порахуємо кількість інверсій у даній підстановці. Серед пар (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) інверсіями будуть: (1, 2), (1, 3), (1, 4), оскільки різниці $i-k$ та $\varphi(i)-\varphi(k)$ мають різні знаки.

Отже маємо 3 інверсії, φ – непарна підстановка.

2 спосіб. Скористаємося властивістю підстановок, зокрема тим, що транспозиція є непарною підстановкою. Підрахуємо кількість транспозицій, які переводять φ у тотожну підстановку. Нехай $\sigma(i,k)$ транспозиція елементів i та k. Тоді

$$\sigma(1,4)\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\varphi_1,$$

$$\sigma(4,2)\varphi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=\varphi_2,$$

$$\sigma(3,4)\varphi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\varepsilon.$$

Отже, $\sigma(3,4)\sigma(4,2)\sigma(1,4)\varphi=\varepsilon$.

Звідки $\operatorname{sgn}\varphi=\operatorname{sgn}\sigma(3,4)\operatorname{sgn}\sigma(4,2)\operatorname{sgn}\sigma(1,4)=(-1)^3=-1$, φ – непарна підстановка.

Відповідь: непарна.

Задача № 3. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix}2&2&3\\3&1&2\\4&-3&-1\end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

1 спосіб (за означенням). Визначник обчислюємо як суму 3! доданків за формулою

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-$$
$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot(-3) + 2\cdot 2\cdot 4 - 4\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot 3\cdot(-1) =$$

$$= -2 - 27 + 16 - 12 + 12 + 6 = -7.$$

2 спосіб (розклад за елементами рядка/стовпця). Скористаємося формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-1+6) - 2\cdot(-3-8) + +3\cdot(-9-4) = 10 + 22 - 39 = -7.$$

3 спосіб (за властивостями). Зводимо визначник до визначника матриці трикутної форми за допомогою властивостей визначників. Визначник трикутної матриці обчислюємо як добуток діагональних елементів.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2)(3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 11 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-7)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 11 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-7)\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} (5) = 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1\cdot 1\cdot(-1) = -7.$$

Відповідь: -7.

Завдання для самостійної роботи

Визначити парність підстановки:

1.2.1. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;   1.2.2. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

1.2.3. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;   1.2.4. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

1.2.5. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;   1.2.6. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

1.2.7. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;   1.2.8. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

1.2.9. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;   1.2.10. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Обчислити визначник:

1.2.11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;   1.2.12. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & -4 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

1.2.13. $\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;   1.2.14. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$;

1.2.15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;   1.2.16. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

1.2.17. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$;   1.2.18. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

1.2.19. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & -7 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;   1.2.20. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за правилом Крамера

Приклади розв'язань задач

Задача № 4. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Якщо число рівнянь дорівнює числу невідомих n і матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь має визначник, відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{|A_{(1)}|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_{(2)}|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_{(n)}|}{|A|},$$

де A – *матриця коефіцієнтів системи,* $A_{(i)}$ – матриця, яка одержується з A шляхом заміни i-го стовпця на стовпець вільних членів.

У нашому випадку

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot(-1) -$$

$$-(-3)\cdot 3\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 1 = 10,$$

$|A| \neq 0$, отже, систему можна розв'язати за правилом Крамера.

$$|A_{(1)}| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 20; \ |A_{(2)}| = \begin{vmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 10; \ |A_{(3)}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_1 = \frac{|A_{(1)}|}{|A|} = \frac{20}{10} = 2; \ x_2 = \frac{|A_{(2)}|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1; \ x_3 = \frac{|A_{(3)}|}{|A|} = \frac{0}{10} = 0.$$

На практиці визначник матриці $A_{(3)}$ можна не обчислювати, а знайдені x_1 та x_2 підставити в одне з рівнянь, що містить змінну x_3 з ненульовим коефіцієнтом, та відшукати x_3.

Відповідь: (2, 1, 0).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

1.3.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -8; \end{cases}$

1.3.2. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -16, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -23, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10; \end{cases}$

1.3.3. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 36, \\ 4x_2 + x_3 = 14, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 30; \end{cases}$

1.3.4. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 28, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 = -16, \\ 4x_1 - 3x_3 = -7; \end{cases}$

1.3.5. $\begin{cases} 3x_1+3x_2-2x_3=7, \\ x_1-x_2-5x_3=22, \\ x_1+x_2-x_3=4; \end{cases}$ 1.3.6. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=16, \\ x_1-2x_3=6, \\ 4x_1+x_2-5x_3=24; \end{cases}$

1.3.7. $\begin{cases} 5x_1+7x_2+3x_3=-22, \\ 2x_1+\quad+3x_3=-14, \\ 5x_1+x_2+7x_3=-34; \end{cases}$ 1.3.8. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+5x_3=22, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=13, \\ 2x_1-3x_2-3x_3=-12; \end{cases}$

1.3.9. $\begin{cases} 4x_1-2x_2-x_3=25, \\ 4x_1-2x_3=18, \\ 5x_1+2x_2-3x_3=12; \end{cases}$ 1.3.10. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=3, \\ 7x_1+5x_2=2, \\ x_1+4x_2+2x_3=6. \end{cases}$

1.4. Обернена матриця. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним способом

Приклади розв'язань задач

Задача № 5. Обчислити матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1 спосіб (за допомогою визначників). Відомо, що обернена матриця існує в тому і лише в тому випадку, коли задана матриця має визначник, відмінний від нуля. Оскільки

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

то існує A^{-1}, що знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ik}.

Для заданої матриці A знаходимо

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 11 \\ -6 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -2 & 11 \\ -6 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2 спосіб (за допомогою елементарних перетворень). Нехай E – одинична матриця порядку 3. Тоді $(A|E)$ – здвоєна матриця порядку

3×6. Цю матрицю за допомогою рядкових елементарних перетворень зводимо до вигляду $\left(E|B\right)$. Тоді $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)(-7)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 11 \\ -6 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 11 \\ -6 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача № 6. Розв’язати систему рівнянь матричним способом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}(2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

Отже, $|A| \neq 0$, тому система визначена (має єдиний розв'язок), і її можна розв'язати матричним способом. Система рівносильна матричному рівнянню $A \cdot X = B$, а розв'язок знаходиться за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Знайдемо A^{-1} за допомогою визначників:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Отже,

$$A^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -7 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

За формулою $X = A^{-1} \cdot B$ одержуємо

$$X = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -7 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 \\ -21 \\ -63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: (–1, 1, 3).

Завдання для самостійної роботи

Обчислити матрицю, обернену до матриці A:

1.4.1. $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$;

1.4.2. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -5 & 11\end{pmatrix}$;

1.4.3. $A=\begin{pmatrix}7 & -7\\ 1 & 6\end{pmatrix}$;

1.4.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}$;

1.4.5. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

1.4.6. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -3 & -3 & -3\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$;

1.4.7. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

1.4.8. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

1.4.9. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

1.4.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Розв’язати системи рівнянь матричним способом:

1.4.11. $\begin{cases}3x_1-4x_2=2,\\ 4x_1-5x_2=3;\end{cases}$

1.4.12. $\begin{cases}4x_1+5x_2=1,\\ 7x_1+8x_2=1;\end{cases}$

1.4.13. $\begin{cases}7x_1+4x_2=11,\\ 3x_1-x_2=2;\end{cases}$

1.4.14. $\begin{cases}13x_1+20x_2=6,\\ 11x_1-x_2=23;\end{cases}$

1.4.15. $\begin{cases}14x_1+3x_2=20,\\ 10x_1+7x_2=24;\end{cases}$

1.4.16. $\begin{cases}-3x_1+4x_2=1,\\ 13x_1+6x_2=19;\end{cases}$

1.4.17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 11; \end{cases}$ 1.4.18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -25, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2; \end{cases}$

1.4.19. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases}$ 1.4.20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_3 = -25; \end{cases}$

1.4.21. $\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 10, \\ 5x_1 + 3x_2 = -10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -14; \end{cases}$ 1.4.22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

1.4.23. $\begin{cases} -4x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6; \end{cases}$ 1.4.24. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 15, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12; \end{cases}$

1.4.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$ 1.4.26. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -12, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

§ 2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

2.1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Приклади розв'язань задач

Задача № 7. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа

$$z = \frac{(1+i)(3+i)}{2-i} + \frac{(1-i)(3-i)}{2+i}.$$

Розв'язання.

Запишемо кожний із доданків $z_1 = \frac{(1+i)(3+i)}{2-i}$ і $z_2 = \frac{(1-i)(3-i)}{2+i}$ у вигляді $z_k = a_k + b_k i$, де $k = 1, 2$. Тоді

$$z_1 = \frac{(1+i)(3+i)}{2-i} = \frac{3+i+3i+i^2}{2-i} = \frac{3+4i-1}{2-i} = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{4+2i+8i+4i^2}{4-i^2} = \frac{4+10i-4}{4+1} = 2i,$$

$$z_2 = \frac{(1-i)(3-i)}{2+i} = \frac{3-i-3i+i^2}{2+i} = \frac{3-4i-1}{2+i} = \frac{(2-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{4-2i-8i+4i^2}{4-i^2} = \frac{4-10i-4}{4+1} = -2i.$$

Оскільки $z = z_1 + z_2 = 2i - 2i = 0 + 0i$, то $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 0.$

Відповідь: $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 0.$

Задача № 8. Розв'язати рівняння $z^2 - z\overline{z} + 18 - 6i = 0$.

Розв'язання.

Нехай $z = x + yi$, де $x, y \in R$. Тоді

$$(x+yi)^2 - (x+yi)(x-yi) + 18 - 6i = 0,$$

$$-2y^2 + 2xyi + 18 - 6i = 0,$$

$$-2y^2+18+(2xy-6)i=0.$$

Застосуємо умову рівності нулю комплексного числа, записаного в алгебраїчній формі. Одержимо:

$$\begin{cases}-2y^2+18=0,\\ 2xy-6=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}y^2=9,\\ x=\dfrac{3}{y};\end{cases} \qquad \begin{cases}y=\pm 3,\\ x=\dfrac{3}{y}.\end{cases}$$

Отже, задане рівняння має два розв’язки:

$$z_1=1+3i,\ z_2=-1-3i.$$

Відповідь: $z_1=1+3i,\ z_2=-1-3i.$

Завдання для самостійної роботи

Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел:

2.1.1. $\left(1+4i\right)^4+\left(1-4i\right)^4$; 2.1.2. $\dfrac{(1+4i)(1-3i)}{1+2i}+\dfrac{(1+i)(1+3i)}{1-2i}$;

2.1.3. $\left(1+i\right)^8+\left(2-2i\right)^6$; 2.1.4. $\dfrac{(2+4i)(2-3i)}{1+i}+\dfrac{(2-i)(1+3i)}{1-i}$;

2.1.5. $\dfrac{(1+4i)^2+(1-3i)^2}{(1+2i)^4}$; 2.1.6. $\dfrac{(1+2i)^2+(1+5i)^2}{(1+3i)^3}$;

2.1.7. $\dfrac{(1+i)^2(1-3i)}{1+i^7}+\dfrac{(1-i)^4(1+3i)}{1+i^9}$; 2.1.8. $\left(\dfrac{1+i^9}{1-i^{13}}\right)^{2021}$;

2.1.9. $\dfrac{\left(2+i^7\right)\left(2-3i^8\right)}{1+i^5}+\dfrac{\left(2-i^3\right)\left(1+5i^5\right)}{1-i^7}$; 2.1.10. $\left(\dfrac{1+i^{2021}}{1-i^{2019}}\right)^7$.

Розв’язати рівняння:

2.1.11. $\overline{z}=7-z$; 2.1.12. $\overline{z}=-4z+1-5i$;

2.1.13. $z^2+2z-3=0$; 2.1.14. $z^2+2z-15=0$;

2.1.15. $z\overline{z} - 4z + 2 + 4i = 0$; 2.1.16. $z\overline{z} - 2z - 4 + 2i = 0$;

2.1.17. $z^2 + z\overline{z} - 32 - 24i = 0$; 2.1.18. $z^2 - z\overline{z} + 2 - 28i = 0$;

2.1.19. $z^2 - \overline{z}^2 + 4z + 4 - 8i = 0$; 2.1.20. $z^2 + \overline{z}^2 + 2z + 2 - 4i = 0$.

2.2. Тригонометрична форма комплексного числа, дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Приклади розв'язань задач

Задача № 9. Використовуючи тригонометричну форму комплексного числа, обчислити $\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{60}$.

Розв'язання.

Запишемо числа $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі. Для цього знайдемо модулі й аргументи цих чисел, виходячи з геометричної інтерпретації комплексного числа.

$z_1 = 1 + i$; $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; якщо $\arg z_1 = \phi_1$, то

$$\begin{cases} \sin\phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

звідки $\phi_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Отже, $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$; якщо $\arg z_2 = \phi_2$, то

$$\begin{cases} \sin\phi_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\phi_2 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

звідки $\phi_2 = \dfrac{5\pi}{3}$. Отже, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Поділимо z_1 на z_2 у тригонометричній формі.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

За формулою Муавра обчислимо $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{60}$.

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{60} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{60} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{60}\left(\cos\frac{7\cdot 60\pi}{12} + i\sin\frac{7\cdot 60\pi}{12}\right) =$$

$$= 2^{-30}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) = 2^{-30}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{-30}.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{60} = -2^{-30}$.

Задача № 10. Знайти корені 6-го степеня з числа $-i$.

Розв'язання.

Запишемо число $-i$ у тригонометричній формі: $-i = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$.

За формулою знаходження коренів із комплексного числа маємо:

$$\sqrt[6]{-i}=\sqrt[6]{1}\cdot\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}\right)=\cos\frac{3\pi+4\pi k}{12}+i\sin\frac{3\pi+4\pi k}{12},$$

$k=0,1,2,3,4,5.$

1. $k=0.$ $\omega_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. $k=1.$ $\omega_2=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12};$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{7\pi}{6}\right)}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{7\pi}{6}\right)}==\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Отже, $\omega_2=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$

3. $k=2.$ $\omega_3=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12};$

$$\cos\frac{11\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{11\pi}{6}\right)}=-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};$$

$$\sin\frac{11\pi}{12}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{11\pi}{6}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Отже, $\omega_3=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

4. $k=3.$ $\omega_4=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

5. $k=4$.

$$\omega_5=\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}=-\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

6. $k=5$.

$$\omega_6=\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}=-\cos\frac{11\pi}{12}-i\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

В і д п о в і д ь:

$$\omega_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \omega_2=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};$$

$$\omega_3=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; \qquad \omega_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_5=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; \qquad \omega_6=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи тригонометричну форму комплексного числа, обчислити:

2.2.1. $\left(\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{50}$; 2.2.2. $\sqrt[4]{4+4i}$;

2.2.3. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{100}$; 2.2.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{25}$;

2.2.5. $\sqrt[6]{-5}$; 2.2.6. $\sqrt[5]{-i}$;

2.2.7. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{30}$; 2.2.8. $\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{35}$;

2.2.9. $\sqrt[5]{-1+i}$; 2.2.10. $\sqrt[4]{-1-i}$.

§ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Арифметичний n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність векторів

Приклади розв'язань задач

Задача № 11. Користуючись лише означенням, перевірити систему векторів на лінійну залежність:

а) $\overline{a}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 3)$; $\overline{a}_2 = (-1,\ 1{,}4,\ 2)$; $\overline{a}_3 = (1,\ 2,\ -1,\ 0)$;

б) $\overline{a}_1 = (1,3,-1,4)$; $\overline{a}_2 = (-2,1,3,1)$; $\overline{a}_3 = (3,2,-2,-4)$; $\overline{a}_4 = (1,10,2,6)$.

Розв'язання.

а) Знайдемо умови, при яких лінійна комбінація заданих векторів дорівнює нуль-вектору:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 = \overline{0} \Leftrightarrow \lambda_1(1,\ 2,\ 0,\ 3) + \lambda_2(-1,\ 1,\ 4,\ 2) + \lambda_3(1,\ 2, -1,\ 0) = \overline{0} \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3,\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3,\ 4\lambda_2 - \lambda_3,\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману вище систему рівнянь методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (4)\ (5) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \big| & 0 \end{pmatrix}\left(-\frac{2}{3}\right)\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 = \overline{0}$ тоді і лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Відповідь: система векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ – лінійно незалежна.

б) Знайдемо умови, при яких лінійна комбінація заданих векторів дорівнює нуль-вектору:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 + \lambda_4\overline{a}_4 = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1,\ 3,\ -1,\ 4) + \lambda_2(-2,\ 1,\ 3,\ 1) + \lambda_3(3,\ 2, -2, -4) + \lambda_4(1,\ 10, 2, 6) = \overline{0};$$

$$(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4,\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 10\lambda_4,\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4, 4\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6\lambda_4) = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 10\lambda_4 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману вище систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}(-3)(1)(-4) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -16 & 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{7}\right)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -16 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)(-9) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержали, що ступінчата система

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \qquad\quad \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \qquad\qquad\quad \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

рівносильна даній і має три рівняння та чотири невідомих. Вважаємо змінну λ_4 вільною змінною та знаходимо через неї решту змінних: $\lambda_3 = -\lambda_4,\ \lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4 = -2\lambda_4,\ \lambda_1 = 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 = -2\lambda_4$.

Отже, маємо загальний розв'язок $\{(-2\lambda_4, -2\lambda_4, -\lambda_4, \lambda_4) | \lambda_4 \in \mathrm{R}\}$ даної системи. Поклавши $\lambda_4 = -1$, дістанемо $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$. Тоді $2\overline{a}_1 + 2\overline{a}_2 + \overline{a}_3 - \overline{a}_4 = \overline{0}$. За означенням система векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3, \overline{a}_4$ – лінійно залежна.

Відповідь: система векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3, \overline{a}_4$ – лінійно залежна.

Завдання для самостійної роботи

Користуючись лише означенням, перевірити систему векторів на лінійну залежність:

3.1.1. $\overline{a}_1 = (1, 2, 3, -2)$; $\overline{a}_2 = (-5, 0, 5, 2)$; $\overline{a}_3 = (-2, 1, 4, 0)$;

3.1.2. $\overline{a}_1=(1,\ -1,3,2)$; $\overline{a}_2=(2,\ -2,4,0)$; $\overline{a}_3=(1,\ -2,3,4)$;

3.1.3. $\overline{a}_1=(2,\ -1,3,2)$; $\overline{a}_2=(1,2,3,4)$; $\overline{a}_3=(3,1,2,\ -2)$;

3.1.4. $\overline{a}_1=(-2,3,1,-1)$; $\overline{a}_2=(-1,2,1,0)$; $\overline{a}_3=(-1,0,-1,-2)$;

3.1.5. $\overline{a}_1=(1,3,0,4)$; $\overline{a}_2=(2,-1,1,0)$; $\overline{a}_3=(1,10,-1,12)$;

3.1.6. $\overline{a}_1=(-3,0,1,2)$; $\overline{a}_2=(7,2,\ -5,6)$; $\overline{a}_3=(2,1,\ -2,4)$;

3.1.7. $\overline{a}_1=(1,1,\ -1,0)$; $\overline{a}_2=(2,\ -2,3,4)$; $\overline{a}_3=(0,4,1,\ -1)$;

3.1.8. $\overline{a}_1=(2,0,\ -1,1)$; $\overline{a}_2=(-1,2,3,\ -3)$; $\overline{a}_3=(0,3,2,1)$;

3.1.9. $\overline{a}_1=(1,2,-2,3)$; $\overline{a}_2=(2,-1,2,1)$; $\overline{a}_3=(-2,6,-8,4)$;

3.1.10. $\overline{a}_1=(0,1,1,2)$; $\overline{a}_2=(4,1,4,1)$; $\overline{a}_3=(1,\ -2,1,3)$.

3.2. Базис і ранг системи векторів. Ранг матриці

Приклади розв'язань задач

Задача № 12. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

залежно від значення λ.

Розв'язання.

За допомогою елементарних перетворень зводимо матрицю до ступінчастого вигляду. На першому кроці переставляємо місцями другий і четвертий стовпці, а далі використовуємо рядкові перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\lambda \\ 0 & 0 & -6 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -6 & 2-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\lambda \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 0{,}5$ у ступінчастій матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -6 & 2-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

буде три ненульових рядки, а при $\lambda \neq 0{,}5$ – чотири. Отже, при $\lambda = 0{,}5$ ранг заданої матриці дорівнює 3, при всіх інших значеннях λ – ранг дорівнює 4.

Відповідь: якщо $\lambda = 0{,}5$, то ранг дорівнює 3; якщо $\lambda \neq 0{,}5$, то ранг дорівнює 4.

Задача № 13. Знайти ранг, який-небудь базис системи векторів і виразити всі її вектори, що не входять до знайденого базису, через цей базис:

$\overline{a}_1 = (1,\ 0,\ 2, -2),\ \ \overline{a}_2 = (2,\ 1,\ 1, -3),\ \ \overline{a}_3 = (-1, -1,\ 1,\ 1),\ \ \overline{a}_4 = (5,\ 2,\ 4, -8).$

Розв'язання.

Запишемо матрицю, складену з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$, і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 \\ \overline{a}_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 - 2\overline{a}_1 \\ \overline{a}_3 + \overline{a}_1 \\ \overline{a}_4 - 5\overline{a}_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 - 2\overline{a}_1 \\ (\overline{a}_3 + \overline{a}_1) + (\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) \\ (\overline{a}_4 - 5\overline{a}_1) - 2(\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) \end{matrix} .$$

У ступінчастому вигляді матриця має два ненульові рядки, отже, ранг заданої системи векторів дорівнює 2, тобто базис системи векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ складається з двох векторів. Нехай це будуть вектори $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$. Внаслідок зведення матриці до ступінчастого виду ми одержали, що $(\overline{a}_3 + \overline{a}_1) + (\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) = \overline{0}$ і $(\overline{a}_4 - 5\overline{a}_1) - 2(\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) = \overline{0}$. Перетворивши ці співвідношення, знайдемо розклад векторів $\overline{a}_3$ і $\overline{a}_4$ за базисними векторами $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$:

$$\begin{cases} (\overline{a}_3 + \overline{a}_1) + (\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) = \overline{0}, \\ (\overline{a}_4 - 5\overline{a}_1) - 2(\overline{a}_2 - 2\overline{a}_1) = \overline{0}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a}_3 + \overline{a}_2 - \overline{a}_1 = \overline{0}, \\ \overline{a}_4 - \overline{a}_1 - 2\overline{a}_2 = \overline{0}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a}_3 = \overline{a}_1 - \overline{a}_2, \\ \overline{a}_4 = \overline{a}_1 + 2\overline{a}_2. \end{cases}$$

Відповідь: ранг заданої системи векторів дорівнює 2; вектори $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$ утворюють один із її базисів; $\overline{a}_3 = \overline{a}_1 - \overline{a}_2$, $\overline{a}_4 = \overline{a}_1 + 2\overline{a}_2$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ранг матриць залежно від значень λ:

3.2.1. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix}$;

3.2.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$;

3.2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$;

3.2.4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

3.2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

3.2.6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 7 & 5 \\ -1 & \lambda & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

3.2.7. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -2 & 7 \\ 7 & 17 & \lambda & 11 \end{pmatrix}$;

3.2.8. $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 18 & 5 & 7 \\ 5 & 28 & \lambda & 11 \end{pmatrix}$;

3.2.9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$;

3.2.10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг, який-небудь базис системи векторів і виразити всі її вектори, що не входять до знайденого базису, через цей базис:

3.2.11. $\overline{a}_1 = (1,-1,0,2)$; $\overline{a}_2 = (2,-2,3,1)$; $\overline{a}_3 = (-3,3,-6,0)$; $\overline{a}_4 = (5,-5,9,1)$;

3.2.12. $\overline{a}_1 = (2,0,1,-1)$; $\overline{a}_2 = (1,2,1,-1)$; $\overline{a}_3 = (-1,1,0,3)$; $\overline{a}_4 = (1,-5,-1,-2)$;

3.2.13. $\overline{a}_1 = (1,2,-1,0)$; $\overline{a}_2 = (-1,1,2,3)$; $\overline{a}_3 = (2,-2,0,4)$; $\overline{a}_4 = (-7,4,5,-2)$;

3.2.14. $\overline{a}_1 = (2,-2,3,4)$; $\overline{a}_2 = (1,0,-2,3)$; $\overline{a}_3 = (3,-4,8,5)$; $\overline{a}_4 = (5,-2,-3,13)$;

3.2.15. $\overline{a}_1 = (-1,3,4,2)$; $\overline{a}_2 = (0,2,1,-1)$; $\overline{a}_3 = (-2,0,5,7)$; $\overline{a}_4 = (-3,11,13,5)$;

3.2.16. $\overline{a}_1 = (1,2,-2,3)$; $\overline{a}_2 = (-1,0,4,-1)$; $\overline{a}_3 = (2,2,-6,4)$; $\overline{a}_4 = (1,4,0,5)$;

3.2.17. $\overline{a}_1 = (-2,0,1,3)$; $\overline{a}_2 = (1,2,-2,1)$; $\overline{a}_3 = (0,2,1,-2)$; $\overline{a}_4 = (-5,4,2,8)$;

3.2.18. $\overline{a}_1 = (1,0,4,-1)$; $\overline{a}_2 = (2,1,3,1)$; $\overline{a}_3 = (1,2,-1,3)$; $\overline{a}_4 = (3,-1,12,-4)$;

3.2.19. $\overline{a}_1 = (1,2,1,0)$; $\overline{a}_2 = (2,-1,3,1)$; $\overline{a}_3 = (0,5,-1,-1)$; $\overline{a}_4 = (-5,0,-7,-2)$;

3.2.20. $\overline{a}_1 = (3,1,-1,2)$; $\overline{a}_2 = (1,0,-1,2)$; $\overline{a}_3 = (6,1,-4,8)$; $\overline{a}_4 = (0,1,2,-4)$.

3.3. Дослідження систем лінійних рівнянь.
Системи лінійних однорідних рівнянь

Приклади розв'язань задач

Задача № 14. Дослідити на сумісність і визначеність систему рівнянь

$$\begin{cases} (\lambda-1)x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нам потрібно з'ясувати, при яких значеннях λ система несумісна (не має розв'язку), а при яких – сумісна і невизначена, визначена.

Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до ступінчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 & 6 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ \lambda-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right).$$

(На першому кроці поміняли місцями перший і четвертий рядки, а на останньому кроці – перший і четвертий стовпці.)

Отже, ми одночасно перетворили матрицю системи в ступінчасту матрицю

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix},$$

а її розширену матрицю в ступінчасту матрицю

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right).$$

Якщо $\lambda=1$, то

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси одержуємо, що при $\lambda = 1$ ранг матриці системи дорівнює 2, а ранг її розширеної матриці дорівнює 3, отже дана система несумісна.

Якщо $\lambda = 2$, то

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матриці A збігається з рангом матриці $\overline{A}$ і дорівнює 3. У цьому випадку ранг матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці і менший від кількості невідомих, тому система сумісна і невизначена.

Якщо $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 2$, то ранги матриць A і $\overline{A}$ рівні 4. Отже, ранг матриці коефіцієнтів системи дорівнює рангу її розширеної матриці і дорівнює числу невідомих. Система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною.

Відповідь: якщо $\lambda = 1$, то система несумісна; якщо $\lambda = 2$, то система сумісна і невизначена; якщо $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 2$, то система сумісна і визначена.

Задача № 15. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 12x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ -7x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Розв’яжемо задану систему рівнянь методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 12 & -5 & 13 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) (1)\ (-2)\ (-5) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & -6 & 16 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) (0,5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) (1) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 12x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ -7x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 7x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = \dfrac{3x_3 - 8x_4}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3 - 5x_4}{7}, \\ x_2 = \dfrac{3x_3 - 8x_4}{7}. \end{cases}$$

Отже, $X = \left\{ \left(\dfrac{x_3 - 5x_4}{7},\ \dfrac{3x_3 - 8x_4}{7},\ x_3,\ x_4 \right) \middle|\, x_3, x_4 \in R \right\}$ – загальний розв’язок початкової системи.

Щоб дістати із загального розв’язку фундаментальну систему розв’язків, візьмемо послідовно $x_3 = 1,\ x_4 = 0$ та $x_3 = 0,\ x_4 = 1$:

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \overline{b_1} = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \ 1, \ 0 \right);$$

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1 \Rightarrow \overline{b_2} = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{8}{7}, \ 0, \ 1 \right).$$

Отже, вектори $\overline{b_1} = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \ 1, \ 0 \right)$ та $\overline{b_2} = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{8}{7}, \ 0, \ 1 \right)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків початкової системи, а її загальний розв'язок можна записати так:

$$X = \left\{ \lambda_1 \overline{b_1} + \lambda_2 \overline{b_2} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in R \right\}.$$

В і д п о в і д ь: вектори $\overline{b_1} = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \ 1, \ 0 \right)$ та $\overline{b_2} = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{8}{7}, \ 0, \ 1 \right)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи рівнянь, $X = \left\{ \lambda_1 \overline{b_1} + \lambda_2 \overline{b_2} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in R \right\}$ – її загальний розв'язок.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на сумісність і визначеність системи рівнянь:

3.3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

3.3.2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 5x_2 + 13x_3 - x_4 - 6x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 1; \end{cases}$

3.3.3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$

3.3.4. $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 9x_3 + x_4 + 6x_5 = -3, \\ 11x_1 + 5x_2 + 13x_3 - x_4 - 6x_5 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 4; \end{cases}$

3.3.5. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2, \\ 10x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 14x_4 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ \lambda x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 6; \end{cases}$ 3.3.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2, \\ x_1 + 9x_2 + 15x_3 + 28x_4 = 16, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -3, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 8; \end{cases}$

3.3.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 8x_2 - 2x_3 + \lambda x_4 = -5; \end{cases}$

3.3.8. $\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 3; \end{cases}$

3.3.9. $\begin{cases} (9 - \lambda)x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2\lambda x_4 = 0, \\ x_1 + (9 - \lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10 - \lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \lambda x_4 = 0; \end{cases}$

3.3.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + (\lambda + 1)x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + (\lambda + 1)\, x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

Знайти загальний розв’язок та фундаментальну систему розв’язків системи рівнянь:

3.3.11. $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 6x_4 - 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ -11x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 12x_2 - 4x_3 - 11x_4 + 13x_5 = 0; \end{cases}$

3.3.12. $$\begin{cases} 4x_1+7x_2- \quad 7x_4+x_5=0, \\ -2x_1-7x_2+x_3+7x_4+x_5=0, \\ 2x_1+ \quad x_3+ \quad +2x_5=0, \\ 6x_1+7x_2+x_3-7x_4+3x_5=0; \end{cases}$$

3.3.13. $$\begin{cases} 2x_1+x_2 \quad +8x_4+4x_5=0, \\ 4x_1 \quad +2x_3-6x_4-x_5=0, \\ 10x_1+x_2+4x_3-4x_4+2x_5=0, \\ 8x_1+2x_2+2x_3+10x_4+7x_5=0; \end{cases}$$

3.3.14. $$\begin{cases} x_1 \quad -5x_3+6x_4-3x_5=0, \\ 7x_2-5x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-7x_2 \quad +13x_4-5x_5=0, \\ x_1+7x_2-10x_3-x_4 \quad -x_5=0; \end{cases}$$

3.3.15. $$\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3-7x_4+6x_5=0, \\ 7x_1-x_2-2x_3-5x_4+3x_5=0, \\ -12x_1+3x_2+11x_3+3x_4 \quad =0, \\ 11x_1+x_2+12x_3-19x_4+15x_5=0; \end{cases}$$

3.3.16. $$\begin{cases} -3x_1+x_2+6x_3+6x_4-7x_5=0, \\ 5x_1-5x_2-2x_3+5x_4-7x_5=0, \\ 8x_1-6x_2-8x_3-x_4 \quad =0, \\ -2x_1+4x_2-4x_3-11x_4+14x_5=0; \end{cases}$$

3.3.17. $$\begin{cases} x_1-5x_2-6x_3-7x_4-3x_5=0, \\ 7x_1+5x_2- \quad x_5=0, \\ 6x_1+10x_2+6x_3+7x_4+2x_5=0, \\ 13x_1+15x_2+6x_3+7x_4+x_5=0; \end{cases}$$

3.3.18. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 \qquad\quad + 4x_3 - 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 12x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

3.3.19. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 7x_4 \qquad\quad = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 5x_5 = 0, \\ 11x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 15x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

3.3.20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\quad = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = 0, \\ 11x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

§ 4. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ. УНІТАРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

4.1. Лінійні простори. Підпростори лінійного простору

Приклади розв'язань задач

Задача № 16. Довести, що всі дійсні $m \times n$ матриці, в яких перший рядок нульовий, утворюють векторний простір.

Розв'язання.

Нехай L множина дійсних матриць порядку $m \times n$, в яких перший рядок нульовий. Множина L є підмножиною множини $R^{m \times n}$, яку утворюють дійсні матриці порядку $m \times n$. Відомо, що $R^{m \times n}$ – векторний простір відносно операцій додавання матриць і множення матриць на дійсні числа. Оскільки довільний підпростір векторного простору є також векторним простором, то нам досить показати, що L – підпростір простору $R^{m \times n}$. Для цього досить довести:

1) замкненість операції додавання дійсних матриць із нульовим рядком;
2) замкненість операцій множення дійсних матриць із нульовим рядком на дійсні числа.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

– довільні елементи із множини L, λ – довільне дійсне число.

Оскільки

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in L,$$

$$A+B=\lambda A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in L,$$

то множина L замкнена відносно операції додавання матриці і операцій множення матриць на дійсні числа.

Отже L – векторний простір, як підпростір простору $R^{m\times n}$.

Задача № 17. Нехай V – векторний простір усіх дійсних функцій над полем дійсних чисел R. Які з указаних множин є підпросторами простору V:

а) $L_1=\left\{ f(x)\in \mathrm{V} \middle| f(0)=0 \right\}$;

б) $L_2=\left\{ f(x)\in \mathrm{V} \middle| f(0)=1 \right\}$;

в) $L_3=\left\{ f(x)\in \mathrm{V} \middle| \forall x\in R\left(\left| f(\mathrm{x}) \right| <1 \right) \right\}$?

Розв'язання.

а) Нехай $f(x), g(x)\in L_1$. Тоді $f(0)=g(0)=0$, $f(0)+g(0)=0$, звідки $f(x)+g(x)\in L_1$. Це доводить, що множина L_1 замкнена відносно операції додавання.

Нехай $f(x)\in L_1, \lambda\in R$. Тоді $f(0)=0$ і $\lambda f(0)=0$, звідки $\lambda f(\mathrm{x})\in L_1$. Отже, множина L_1 замкнена відносно операції множення на дійсні числа її елементів.

Попередні міркування доводять, що L_1 – підпростір простору V.

б) Нехай $f(x), g(x) \in L_2$. Тоді $f(0) = g(0) = 1$ і $f(0) + g(0) = 2$, звідки $f(x) + g(x) \notin L_2$. Отже операція додавання не є бінарною алгебраїчною операцією на множині L_2, а сама множина L_2 – не замкнена відносно операції додавання. Аналогічний висновок можна зробити відносно замкненості L_2 щодо множення її елементів на дійсні числа.

Отже, L_2 не є підпростором простору V.

в) L_3 також не є підпростором простору V. Для прикладу візьмемо $f(x) = 0,7$ і $\mathrm{g}(x) = 0,5$. Тоді $f(x), \mathrm{g}(x) \in L_3$ і $\left| f(x) + \mathrm{g}(x) \right| = 1,2 > 1$, звідки $f(x) + \mathrm{g}(x) \notin L_3$. Це означає, що множина L_3 – не замкнена відносно операції додавання функцій.

Завдання для самостійної роботи

4.1.1. Чи утворюють векторний простір над полем раціональних чисел Q такі підмножини множини дійсних чисел:

а) додатні дійсні числа;

б) невід’ємні дійсні числа;

в) раціональні числа із знаменником, який не перевищує 100;

г) числа виду $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in Q$?

4.1.2. Кожна з умов виділяє деяку множину векторів трьохвимірного арифметичного векторного простору R^3. Які з цих множин утворюють векторний простір відносно стандартних операцій, визначених в R^3:

а) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$;

б) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$;

в) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$;

г) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0$?

4.1.3. З'ясувати чи утворюють підпростори в арифметичному векторному просторі R^n такі системи векторів ($n \geq 3$):

а) усі вектори, сума координат кожного з яких дорівнює 0;

б) усі вектори, добуток координат яких дорівнює 0;

в) усі вектори, передостання координата яких дорівнює 0;

г) усі вектори, які мають хоча б одну нульову координату;

д) усі вектори, координати яких цілі числа;

е) усі вектори, в кожного з яких координата, починаючи з другої, дорівнює подвоєній попередній.

4.2. Координати вектора

Приклади розв'язань задач

Задача № 18. Знайти матрицю переходу і скласти формули перетворення координат при переході від базису

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

до базису

$$\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

і навпаки.

Розв'язання.

Нехай A – матриця, стовпцями якої є координати векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$, B – матриця, стовпцями якої є координати векторів $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю переходу T від базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ до базису $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ обчислюємо за формулою $T = A^{-1}B$. Обернена до неї матриця $T^{-1} = B^{-1}A$ очевидно буде матрицею переходу від базису $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ до базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. У нашому випадку:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, а $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – координатні стовпці вектора $\overline{x}$ в базисах $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ і $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ відповідно. Тобто $\overline{x} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = y_1\overline{b}_1 + y_2\overline{b}_2 + y_3\overline{b}_3$.

Враховуючи, що $X = TY$ і $Y = T^{-1}X$, дістанемо такі формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2, \\ x_3 = y_1 + y_2 + y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = 0,5x_1 - 0,5x_3, \\ y_3 = 0,5x_1 - x_2 + 0,5x_3. \end{cases}$$

Задача № 19. Вектори $\overline{a}_1 = (1,\ 2,\ -3)$, $\overline{a}_2 = (7,\ 1,\ 2)$, $\overline{a}_3 = (2,\ 0,\ 1)$, $\overline{x} = (2,\ 1,\ 3)$ задані своїми координатами в деякому базисі. Довести, що вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\overline{x}$ у цьому базисі.

Перевіримо вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ на лінійну залежність. Для цього обчислимо визначник матриці, складеної з координат даних векторів.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, отже, вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ – лінійно незалежні.

Відомо, що будь-які три лінійно незалежні вектори утворюють базис трьохвимірного векторного простору, отже, вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ утворюють базис.

За означенням матриці переходу від одного базису до іншого

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

– це матриця переходу від базису, в якому були задані вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ та вектор $\overline{x}$, до базису $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 7 & -23 & -13 \end{pmatrix};$$

$$M'(\overline{x}) = T^{-1} \cdot M(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ 7 & -23 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ -48 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\overline{x} = -7\,\overline{a}_1 + 15\,\overline{a}_2 - 48\,\overline{a}_3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти матрицю переходу і скласти формули перетворення координат при переході від базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ до базису $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ і навпаки:

4.2.1. $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

4.2.2. $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

4.2.3. $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$

4.2.4. $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

4.2.5. $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ та вектор $\overline{x}$ задані своїми координатами в деякому базисі. Довести, що вектори $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\overline{x}$ у цьому базисі:

4.2.6. $\overline{a}_1 = (-5,0,-1);\ \overline{a}_2 = (-5,-7,-3);\ \overline{a}_3 = (-2,-2,-1);\ \overline{x} = (1,-2,3);$

4.2.7. $\overline{a}_1 = (-7,1,-1);\ \overline{a}_2 = (5,-2,3);\ \overline{a}_3 = (-5,-2,4);\ \overline{x} = (-1,2,-2);$

4.2.8. $\overline{a}_1 = (-1,0,1);\ \overline{a}_2 = (-3,-1,4);\ \overline{a}_3 = (-7,6,0);\ \overline{x} = (2,-1,3);$

4.2.9. $\overline{a}_1 = (3,-1,2);\ \overline{a}_2 = (2,3,2);\ \overline{a}_3 = (-6,-3,-5);\ \overline{x} = (5,1,-3);$

4.2.10. $\overline{a}_1 = (0,-6,-1);\ \overline{a}_2 = (-4,5,-4);\ \overline{a}_3 = (5,0,6);\ \overline{x} = (4,-3,1);$

4.2.11. $\overline{a}_1 = (5,0,-6);\ \overline{a}_2 = (-2,3,1);\ \overline{a}_3 = (-3,-5,6);\ \overline{x} = (-1,4,-3);$

4.2.12. $\overline{a}_1 = (-6,-1,3);\ \overline{a}_2 = (-5,2,6);\ \overline{a}_3 = (0,-4,-5);\ \overline{x} = (3,-3,1);$

4.2.13. $\overline{a}_1 = (-6,4,3);\ \overline{a}_2 = (-7,2,1);\ \overline{a}_3 = (-1,-3,-3);\ \overline{x} = (0,-3,4);$

4.2.14. $\overline{a}_1 = (-7,-5,1);\ \overline{a}_2 = (-6,1,-6);\ \overline{a}_3 = (-5,-3,0);\ \overline{x} = (4,1,-5);$

4.2.15. $\overline{a}_1 = (-5,1,-4);\ \overline{a}_2 = (-2,3,-1);\ \overline{a}_3 = (-4,2,-3);\ \overline{x} = (-5,0,-3).$

4.3. Унітарні евклідові простори. Ортонормовані базиси евклідового й унітарного просторів

Приклади розв'язань задач

Задача № 20. Ортогоналізувати систему векторів $\overline{a}_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $\overline{a}_2 = (2,-1,\ 1)$, $\overline{a}_3 = (-1,\ 2,\ 1)$.

Розв'язання.

Відомо, що ортогоналізувати можна лише лінійно незалежну систему векторів, тому спочатку перевіримо систему векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ на лінійну залежність.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

отже, система векторів $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ – лінійно незалежна.

За перший вектор $\overline{b}_1$ шуканого ортогонального базису візьмемо вектор $\overline{a}_1$. Вектор $\overline{b}_2$ будемо шукати у вигляді $\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \lambda \overline{b}_1$; $(\overline{b}_1, \overline{b}_2) = 0$, тому $\overline{b}_1\ (\overline{a}_2 + \lambda \overline{b}_1) = 0$, звідки $\lambda = -\dfrac{(\overline{b}_1, \overline{a}_2)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} = -\dfrac{1}{2}$;

$$\overline{b}_2 = (2,\ -1,\ 1) - \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 0) = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\right).$$

Вектор $\overline{b}_3$ будемо шукати у вигляді $\overline{b}_3 = \overline{a}_3 + \alpha \overline{b}_1 + \beta \overline{b}_2$; $(\overline{b}_1, \overline{b}_3) = 0$, тому $\overline{b}_1\ (\overline{a}_3 + \alpha \overline{b}_1 + \beta \overline{b}_2) = 0$. Враховуючи те, що $(\overline{b}_1,\ \overline{b}_2) = 0$, одержимо: $\alpha = -\dfrac{(\overline{b}_1, \overline{a}_3)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} = -\dfrac{1}{2}$; аналогічно з умови $(\overline{b}_1,\ \overline{b}_3) = 0$ отримаємо: $\beta = -\dfrac{(\overline{b}_2, \overline{a}_3)}{(\overline{b}_2, \overline{b}_2)} = \dfrac{7}{11}$. Отже, $\overline{b}_3 = (-1,\ 2,\ 1) - \dfrac{1}{2}(1,\ 1,\ 0) + \dfrac{7}{11}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ 1\right) = \left(-\dfrac{6}{11}, \dfrac{6}{11}, \dfrac{18}{11}\right)$.

Відповідь: вектори $\overline{b}_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $\overline{b}_2 = \left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ 1\right)$, $\overline{b}_3 = \left(-\dfrac{6}{11}, \dfrac{6}{11}, \dfrac{18}{11}\right)$ утворюють ортогональну систему векторів.

Задача № 21. Перевірити, чи вектори $\overline{a}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\overline{a}_2 = (1, 1, 0, 2)$ ортогональні, і, якщо так, доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 = 1 + 1 + 0 - 2 = 0$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ – ортогональні. Знайдемо ненульовий вектор $\overline{a}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, який ортогональний до кожного з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2$. Тоді, маємо систему двох однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + \quad 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Нам потрібно знайти ненульовий розв'язок цієї системи. Візьмемо $x_1 = x_2 = 1$. Із другого рівняння системи одержимо $x_4 = -1$, а з першого рівняння маємо $x_3 = 3$. Отже, $\overline{a}_3 = (1,1,3,-1)$ ортогональний до $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$.

Нехай $\overline{a}_4 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ортогональний до кожного з векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. Тоді маємо систему

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - \ y_3 - y_4 = 0, \\ y_1 + y_2 + \qquad 2y_4 = 0, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо за допомогою методу Гаусса її загальний розв'язок. Зводимо матрицю даної системи до ступінчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} (-4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Отже, дана система рівносильна такій ступінчастій системі

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 - \quad y_4 = 0, \\ \qquad\qquad y_3 + \ 3y_4 = 0, \\ \qquad\qquad\quad -12y_4 = 0, \end{cases}$$

з якої одержуємо $y_3 = y_4 = 0$, а $y_1 = -y_2$. Узявши $y_2 = -1$, одержимо ненульовий розв'язок $\overline{a}_4 = (1,-1,0,0)$.

Оскільки вектори $\overline{a}_1 = (1,1,-1,-1)$, $\overline{a}_2 = (1,1,0,2)$, $\overline{a}_3 = (1,1,3,-1)$, $\overline{a}_4 = (1,-1,0,0)$ ненульові і попарно ортогональні, то вони утворюють ортогональний базис чотирьохвимірного арифметичного дійсного векторного простору R^4.

Відповідь: $\overline{a}_1 = (1,1,-1,-1)$, $\overline{a}_2 = (1,1,0,2)$, $\overline{a}_3 = (1,1,3,-1)$, $\overline{a}_4 = (1,-1,0,0)$.

Задача № 22. Знайти вектори, які доповнюють дану систему векторів $\overline{a}_1 = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\overline{a}_2 = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ до ортонормованого базису простору, в якому розглядаються дані вектори.

Розв'язання.

Вектори $\overline{a}_1 = \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ і $\overline{a}_2 = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ є ортогональними і нормованими, так як $\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$ і $\overline{a}_1^{\,2} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$, $\overline{a}_2^{\,2} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$.

Знайдемо ненульовий вектор $\overline{b} = (x_1, x_2, x_3)$, ортогональний до $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$ одночасно. Тоді його координати задовольняють систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 0. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на (-1) і додамо до другого. У результаті одержимо $3x_2 - 3x_3 = 0$, звідки $x_2 = x_3$. Підставляємо цей результат у перше рівняння, тоді $2x_1 + x_3 = 0,\ x_1 = -\frac{1}{2}x_3$. Отже, маємо загальний розв'язок $\left\{\left(-\frac{1}{2}x_3, x_3, x_3\right) \middle| x_3 \in R\right\}$. Узявши $x_3 = 2$, одержимо $\overline{b} = (-1, 2, 2)$. Тоді $\overline{a}_3 = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ – шуканий вектор, який доповнює $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ до ортонормованого базису.

Відповідь: $\overline{a}_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Завдання для самостійної роботи

Ортогоналізувати систему векторів:

4.3.1. $\overline{a}_1 = (0, -1, 1)$; $\overline{a}_2 = (-1, -2, -1)$; $\overline{a}_3 = (1, 6, -2)$;

4.3.2. $\overline{a}_1 = (6, 1, 3)$; $\overline{a}_2 = (5, 2, -5)$; $\overline{a}_3 = (7, 2, -2)$;

4.3.3. $\overline{a}_1 = (-3, -5, 2)$; $\overline{a}_2 = (3, 2, -1)$; $\overline{a}_3 = (-4, 1, 0)$;

4.3.4. $\overline{a}_1 = (-7, 3, -5)$; $\overline{a}_2 = (-5, 4, -3)$; $\overline{a}_3 = (2, -2, 1)$;

4.3.5. $\overline{a}_1 = (2, -7, 6)$; $\overline{a}_2 = (1, 5, -1)$; $\overline{a}_3 = (4, 1, 5)$;

4.3.6. $\overline{a}_1 = (1, 6, 5)$; $\overline{a}_2 = (-4, 3, 2)$; $\overline{a}_3 = (3, 7, 6)$;

4.3.7. $\overline{a}_1 = (-2, 1, 4)$; $\overline{a}_2 = (-7, 2, 4)$; $\overline{a}_3 = (3, -1, -3)$;

4.3.8. $\overline{a}_1 = (5, -2, -7)$; $\overline{a}_2 = (4, -3, 3)$; $\overline{a}_3 = (-5, 3, 1)$;

4.3.9. $\overline{a}_1 = (1,-1,6)$; $\overline{a}_2 = (6,1,4)$; $\overline{a}_3 = (3,2,-5)$;

4.3.10. $\overline{a}_1 = (1,0,-5)$; $\overline{a}_2 = (-7,5,4)$; $\overline{a}_3 = (0,1,-6)$.

Перевірити, чи вектори $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ ортогональні, і, якщо так, доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються:

4.3.11. $\overline{a}_1 = (1,1,1)$, $\overline{a}_2 = (1,1,-2)$;

4.3.12. $\overline{a}_1 = (1,2,3)$, $\overline{a}_2 = (3,-3,1)$;

4.3.13. $\overline{a}_1 = (1,5,1)$, $\overline{a}_2 = (-2,1,-3)$;

4.3.14. $\overline{a}_1 = (1,2,-1,-1)$, $\overline{a}_2 = (4,1,3,3)$;

4.3.15. $\overline{a}_1 = (1,2,3,4)$, $\overline{a}_2 = (4,3,-2,-1)$.

Знайти вектори, які доповнюють систему векторів $\overline{a}_1$ та $\overline{a}_2$ до ортонормованого базису простору, в якому розглядаються дані вектори:

4.3.16. $\overline{a}_1 = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $\overline{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{1}{2}\right)$;

4.3.17. $\overline{a}_1 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\overline{a}_2 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$;

4.3.18. $\overline{a}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\overline{a}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$;

4.3.19. $\overline{a}_1 = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)$, $\overline{a}_2 = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right)$;

4.3.20. $\overline{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$, $\overline{a}_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

§ 5. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ. СТРУКТУРА ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

5.1. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора

Приклади розв'язань задач

Задача № 23. З'ясувати, чи є оператор ϕ, що заданий у просторі V_3 координатами вектора $\phi(\overline{x}) = (x_1 + x_3, 0, -x_2)$ як функціями координат вектора $\overline{x}$, лінійним. У випадку лінійності знайти його матрицю в тому базисі, в якому задано координати векторів $\overline{x}$ і $\phi(\overline{x})$.

Розв'язання.

Перевіримо виконання умов лінійності. Нехай $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – два довільні вектори простору V_3.

Тоді

$$\phi(\overline{a} + \overline{b}) = \phi(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3, 0, -\alpha_2 - \beta_2);$$

$$\phi(\overline{a}) + \phi(\overline{b}) = \phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \phi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \alpha_3, 0, -\alpha_2) + (\beta_1 + \beta_3, 0, -\beta_2) =$$
$= (\alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3, 0, -\alpha_2 - \beta_2)$, звідки

$$\phi(\overline{a} + \overline{b}) = \phi(\overline{a}) + \phi(\overline{b}).$$

$$\phi(\lambda\overline{a}) = \phi(\lambda\alpha_1, \lambda\,\alpha_2, \lambda\alpha_3) = (\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_3, 0, -\lambda\alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_3, 0, -\alpha_2) = \lambda\phi(\overline{a}),$$

звідки

$$\phi(\lambda\overline{a}) = \lambda\phi(\overline{a}).$$

Отже, оператор ϕ – лінійний.

Знайдемо матрицю даного оператора. Оскільки

$$\phi(\overline{e}_1) = \phi(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \quad \phi(\overline{e}_2) = \phi(0, 1, 0) = (0, 0, -1),$$
$$\phi(\overline{e}_3) = \phi(0, 0, 1) = (1, 0, 0),$$

то

$$M(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: оператор $\phi-$ лінійний, $M(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача № 24. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1=(0,-2,-3)$, $\overline{a}_2=(1,-1,-4)$, $\overline{a}_3=(3,2,-4)$ має матрицю

$$M(\phi)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього оператора у базисі $\overline{b}_1=(2,2,-1)$, $\overline{b}_2=(-1,2,0)$, $b_3=(1,5,4)$.

Розв'язання.

Нехай $T-$ матриця переходу від базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ до базису $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$, A – матриця, стовпцями якої записані координати відповідно векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$, $B-$ матриця, стовпцями якої записані координати відповідно векторів $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$T=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 12 & -8 & 5 \\ -14 & 9 & -6 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -45 & -28 & -8 \\ 52 & 32 & 7 \\ -18 & -11 & -2 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -32 & -60 \\ 22 & 54 & 101 \\ 4 & -9 & -16 \end{pmatrix};$$

$$M'(\phi) = T^{-1} \cdot M(\phi) \cdot T = \begin{pmatrix} -13 & -32 & -60 \\ 22 & 54 & 101 \\ 4 & -9 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -45 & -28 & -8 \\ 52 & 32 & 7 \\ -18 & -11 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -54 & -116 & -233 \\ 91 & 195 & 392 \\ -15 & -30 & -61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -45 & -28 & -8 \\ 52 & 32 & 7 \\ -18 & -11 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 592 & 363 & 86 \\ -1011 & -620 & -147 \\ 213 & 131 & 32 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: оператор ϕ у базисі $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ має матрицю

$$\begin{pmatrix} 592 & 363 & 86 \\ -1011 & -620 & -147 \\ 213 & 131 & 32 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

З'ясувати, чи є оператор ϕ, що заданий у просторі V_3 координатами вектора $\phi(\overline{x})$ як функціями координат вектора $\overline{x}$, лінійним. У випадку лінійності знайти його матрицю в тому базисі, в якому задано координати векторів $\overline{x}$ і $\phi(\overline{x})$:

5.1.1. $\phi(\overline{x}) = (x_1 - 2x_3, x_2, -x_3)$;

5.1.2. $\phi(\overline{x}) = (x_3, x_2, x_1)$;

5.1.3. $\phi(\overline{x}) = (x_1 + x_2 - x_3, 0, -x_1)$;

5.1.4. $\phi(\overline{x}) = (x_1^2, x_1 + x_3, 0)$;

5.1.5. $\phi(\overline{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$;

5.1.6. $\phi(\overline{x}) = (2 + x_1, 2 + x_2, 2 + x_3)$;

5.1.7. $\phi(\overline{x})=(x_3^2,x_1+1,-x_2)$;

5.1.8. $\phi(\overline{x})=(x_1-x_2+x_3,x_2-x_3,4+x_1+x_2+x_3)$;

5.1.9. $\phi(\overline{x})=(x_1+x_3,-x_2^3,0)$;

5.1.10. $\phi(\overline{x})=(x_1-x_2-x_3,x_2-x_1-x_3,x_3-x_2-x_1)$.

Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\overline{a}_3$ має матрицю $M(\phi)$. Знайти матрицю цього оператора у базисі $\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,\overline{b}_3$:

5.1.11. $\overline{a}_1=(4,-4,-3),\ \overline{a}_2=(0,3,-2),\ \overline{a}_3=(3,-5,-1),\ \overline{b}_1=(-6,-5,-2)$,

$$\overline{b}_2=(-3,0,-5),\ \overline{b}_3=(4,1,5),\ M(\phi)=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix};$$

5.1.12. $\overline{a}_1=(-2,-7,-2),\ \overline{a}_2=(1,-2,-3),\ \overline{a}_3=(2,0,-3),\ \overline{b}_1=(2,1,-1)$,

$$\overline{b}_2=(-6,-5,0),\ \overline{b}_3=(-7,-4,3),\ M(\phi)=\begin{pmatrix}1&3&0\\-3&-2&1\\0&2&-2\end{pmatrix};$$

5.1.13. $\overline{a}_1=(-2,1,1),\ \overline{a}_2=(1,-4,1),\ \overline{a}_3=(-7,5,3),\ \overline{b}_1=(-6,4,-7)$,

$$\overline{b}_2=(-1,-1,0),\ \overline{b}_3=(-1,2,-2),\ M(\phi)=\begin{pmatrix}0&0&4\\-3&2&3\\1&-1&2\end{pmatrix};$$

5.1.14. $\overline{a}_1=(-2,-2,5),\ \overline{a}_2=(6,1,-3),\ \overline{a}_3=(-7,-1,3),\ \overline{b}_1=(3,4,2)$,

$$\overline{b}_2=(1,4,-7),\ \overline{b}_3=(0,-1,3),\ M(\phi)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&6&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix};$$

5.1.15. $\overline{a}_1=(5,4,1),\ \overline{a}_2=(-4,1,-6),\ \overline{a}_3=(6,5,1),\ \overline{b}_1=(1,1,1)$,

$$\overline{b_2}=(1,-4,-6),\ \overline{b_3}=(4,-4,-7),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

5.1.16. $\overline{a_1}=(-5,1,4),\ \overline{a_2}=(-6,1,5),\ \overline{a_3}=(-2,5,-4),\ \overline{b_1}=(1,0,-1),$

$$\overline{b_2}=(4,-5,-3),\ \overline{b_3}=(3,1,-3),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

5.1.17. $\overline{a_1}=(-1,2,-3),\ \overline{a_2}=(0,3,-7),\ \overline{a_3}=(-4,3,0),\ \overline{b_1}=(5,-2,6),$

$$\overline{b_2}=(-4,-3,-4),\ \overline{b_3}=(5,4,5),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

5.1.18. $\overline{a_1}=(6,-7,-7),\ \overline{a_2}=(0,1,0),\ \overline{a_3}=(-5,6,6),\ \overline{b_1}=(1,-6,1),$

$$\overline{b_2}=(5,1,0),\ \overline{b_3}=(4,1,0),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

5.1.19. $\overline{a_1}=(6,-7,-2),\ \overline{a_2}=(3,-3,-2),\ \overline{a_3}=(1,-1,-1),\ \overline{b_1}=(-3,4,4),$

$$\overline{b_2}=(-2,-3,-4),\ \overline{b_3}=(6,3,5),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

5.1.20. $\overline{a_1}=(-4,-1,2),\ \overline{a_2}=(-1,-5,3),\ \overline{a_3}=(3,-2,0),\ \overline{b_1}=(0,-6,-1),$

$$\overline{b_2}=(1,2,-6),\ \overline{b_3}=(0,-1,0),\ M(\phi)=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Операції над лінійними операторами. Область значень і ядро лінійного оператора

Приклади розв'язань задач

Задача № 25. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1 = (1,3)$, $\overline{a}_2 = (0,-1)$ має матрицю $M(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі, $\overline{b}_1 = (3,1)$, $\overline{b}_2 = (2,1)$ має матрицю $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi + \varphi$ у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

Розв'язання.

Нехай вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1, \overline{b}_2$ задані своїми координатами в деякому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2$. Тоді, за означенням матриці переходу від одного базису до іншого, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ – це матриця переходу від базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ до базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, а тому $T_1 = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ – це матриця переходу від базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ до базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$; аналогічно, якщо $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $T_2 = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ – це матриця переходу від базису $\overline{b}_1, \overline{b}_2$ до базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$.

Знайдемо матриці операторів ϕ та φ у базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2$:

$$M'(\phi) = T_1^{-1} M(\phi) T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}; \; M'(\varphi) = T_2^{-1} M(\varphi) T_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 17\\ -4 & 10\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю оператора $\phi+\varphi$ у базисі $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2$:

$$M'(\phi+\varphi)=M'(\phi)+M'(\varphi)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 17\\ -4 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 18\\ -14 & 15\end{pmatrix}.$$

Відповідь: оператор $\phi+\varphi$ у базисі $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2$ має матрицю

$$\begin{pmatrix}-7 & 18\\ -14 & 15\end{pmatrix}.$$

Задача № 26. Побудувати ядро $Ker\varphi$, область значень $\mathrm{Im}\varphi$ та знайти ранг r і дефект d лінійного оператора φ дійсного чотирьохвимірного арифметичного векторного простору R^4, який у деякому базисі $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2, \overline{e}_3,\ \overline{e}_4$ цього простору задано матрицею

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 4 & 1\\ -1 & 5 & 12 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Нехай

$$\overline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \overline{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \overline{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \overline{e}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$\overline{x}=\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+\alpha_3\overline{e}_3+\alpha_4\overline{e}_4$ – довільний вектор простору R^4. Оскільки φ – лінійний оператор, то $\varphi(\overline{x})=x_1\varphi(\overline{e}_1)+x_2\varphi(\overline{e}_2)+x_3\varphi(\overline{e}_3)+x_4\varphi(\overline{e}_4)$. А це означає, що підпростір $\mathrm{Im}\varphi$ породжений системою векторів:

$$\varphi(\overline{e}_1) = \mathrm{A}\cdot\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\overline{e}_2) = \mathrm{A}\cdot\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\overline{e}_3) = \mathrm{A}\cdot\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\overline{e}_4) = \mathrm{A}\cdot\overline{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За базис простору $\mathrm{Im}\,\varphi$ візьмемо довільну максимальну лінійно незалежну підсистему векторів системи $\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \varphi(\overline{e}_3), \varphi(\overline{e}_4)$.

Обчислюючи стовпцевий ранг матриці *A*, легко встановити, що $\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \varphi(\overline{e}_3)$ – лінійно незалежні, а $\varphi(\overline{e}_4) = -\frac{3}{11}\varphi(\overline{e}_1) + \frac{16}{11}\varphi(\overline{e}_2) - \frac{6}{11}\varphi(\overline{e}_3)$. Тоді за базис простору $\mathrm{Im}\,\varphi$ можна взяти $\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \varphi(\overline{e}_3)$, тобто $\mathrm{Im}\,\varphi = L(\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \varphi(\overline{e}_3))$. Оскільки система твірних $\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \varphi(\overline{e}_3)$ є базисом $\mathrm{Im}\,\varphi$, то $\text{ранг}\,\varphi = 3$.

Побудуємо ядро $Ker\varphi$ оператора φ. Оскільки $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 + x_4\overline{e}_4$ належить $Ker\varphi$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(\overline{x}) = \overline{0}$, тобто координатний стовпець вектора $\overline{x}$ є розв'язком матричного рівняння $AX = 0$, яке рівносильне такій системі лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 12x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо її загальний розв'язок за допомогою методу Гаусса. Запишемо матрицю системи і зведемо її до ступінчастого виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 12 & 1 \end{pmatrix} (1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 2 \end{pmatrix} (-4)(-7) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 22 & -12 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, нам потрібно знайти загальний розв'язок ступінчастої системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 11x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого по черзі, заходимо: $x_3 = \frac{6}{11}x_4$, $x_2 = -\frac{16}{11}x_4$, $x_1 = \frac{3}{11}x_4$. Тоді

$\left\{\left(\frac{3}{11}x_4,-\frac{16}{11}x_4,\frac{6}{11}x_4,x_4\right)\middle| x_4\in R\right\}$ – загальний розв’язок системи. Поклавши $x_4=11$, одержуємо вектор $3\overline{e_1}-16\overline{e_2}+6\overline{e_3}+11\overline{e_4}$, який складає фундаментальну систему розв’язків.

Отже, $Ker\varphi=\left\{c(3\overline{e_1}-16\overline{e_2}+6\overline{e_3}+11\overline{e_4})\middle| c\in R\right\}$ – ядро оператора φ. Очевидно, що дефект $\varphi=\dim Ker\varphi=1$.

Завдання для самостійної роботи

5.2.1. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1}=(1,-3)$, $\overline{a_2}=(2,1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1}=(-2,1)$, $\overline{b_2}=(2,-2)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi+\varphi$ у базисі $\overline{a_1},\overline{a_2}$.

5.2.2. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1}=(0,-3)$, $\overline{a_2}=(1,4)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1}=(-1,4)$, $\overline{b_2}=(3,-1)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi\varphi$ у базисі $\overline{b_1},\overline{b_2}$.

5.2.3. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1}=(2,0)$, $\overline{a_2}=(-2,1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1}=(-1,-2)$,

$\overline{b}_2=(2,3)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi\varphi$ у базисі $\overline{a}_1,\overline{a}_2$.

5.2.4. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1=(-2,3)$, $\overline{a}_2=(-2,1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b}_1=(2,0)$, $\overline{b}_2=(-2,4)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi+\varphi$ у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

5.2.5. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1=(-1,0)$, $\overline{a}_2=(3,-1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b}_1=(-1,2)$, $\overline{b}_2=(0,-2)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi+\varphi$ у базисі $\overline{b}_1,\overline{b}_2$.

5.2.6. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1=(2,3)$, $\overline{a}_2=(1,-1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b}_1=(-1,-1)$, $\overline{b}_2=(2,-2)$ має матрицю $M(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi\varphi$ у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

5.2.7. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a}_1=(1,-2)$, $\overline{a}_2=(3,1)$ має матрицю $M(\phi)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b}_1=(-2,0)$,

$\overline{b_2} = (3,2)$ має матрицю $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi + \varphi$ у базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

5.2.8. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1} = (-1,-2)$, $\overline{a_2} = (2,1)$ має матрицю $M(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1} = (1,-1)$, $\overline{b_2} = (0,2)$ має матрицю $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi\varphi$ у базисі $\overline{b_1}, \overline{b_2}$.

5.2.9. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1} = (1,-1)$, $\overline{a_2} = (-2,1)$ має матрицю $M(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1} = (-3,1)$, $\overline{b_2} = (2,0)$ має матрицю $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi\varphi$ у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

5.2.10. Лінійний оператор ϕ у базисі $\overline{a_1} = (1,-2)$, $\overline{a_2} = (-2,1)$ має матрицю $M(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; лінійний оператор φ у базисі $\overline{b_1} = (2,-1)$, $\overline{b_2} = (0,3)$ має матрицю $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\phi + \varphi$ у базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Побудувати ядро $Ker\varphi$, область значень $\mathrm{Im}\varphi$ та знайти ранг r і дефект d лінійного оператора φ дійсного чотирьохвимірного арифметичного векторного простору R^4, який у деякому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ цього простору задано матрицею:

5.2.11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 5.2.12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 11 & 15 \end{pmatrix}$;

5.2.13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$; 5.2.14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 16 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

5.2.15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 9 & 13 \end{pmatrix}$; 5.2.16. $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

5.2.17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 5.2.18. $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

5.2.19. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; 5.2.20. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 & 11 \\ 0 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$.

5.3. Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Лінійний оператор із простим спектром

Приклади розв’язань задач

Задача № 27. Знайти власні вектори і власні значення лінійного оператора ϕ дійсного векторного простору R_3, заданого в деякому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ цього простору матрицею

$$\begin{pmatrix} 13 & 33 & 43 \\ 4 & 14 & 15 \\ -6 & -18 & -21 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

Складемо характеристичне рівняння і, розв’язавши його, знайдемо власні значення даного оператора:

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 33 & 43 \\ 4 & 14-\lambda & 15 \\ -6 & -18 & -21-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (13-\lambda)(14-\lambda)(-21-\lambda) + 4(-18)43 -$$

$$-6\cdot 33\cdot 15 + 6\cdot 43(14-\lambda) + 18\cdot 15(13-\lambda) - 4\cdot 33(-21-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-1) - 5\lambda(\lambda-1) + 6(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow (\lambda=1) \vee (\lambda=2) \vee (\lambda=3).$$

Отже, даний лінійний оператор має власні значення $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$

Координати власного вектора $\overline{b_1} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$, що належить власному значенню $\lambda = 1$, знаходимо як ненульовий розв’язок системи

$$\begin{cases} 12x_1 + 33x_2 + 43x_3 = 0, \\ 4x_1 + 13x_2 + 15x_3 = 0, \\ 6x_1 + 18x_2 + 22x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо загальний розв'язок даної однорідної системи. Застосуємо метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 33 & 43 & 0 \\ 4 & 13 & 15 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 0 \end{array}\right)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & -2 & 0 \\ 4 & 13 & 15 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}(-0,5)\\ \\ (-1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 0 \end{array}\right)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси $x_3 = -3x_2$, $x_1 = 8x_2$. Фундаментальна система розв'язків містить лише один вектор, наприклад (8,1,–3). Тому загальним розв'язком однорідної системи є вектор $(8a_1, a_1, -3a_1)$, де $a_1 \in R$.

Отже, власний вектор, що належить власному значенню $\lambda = 1$ має вигляд $\overline{b_1} = a_1(8\overline{e_1} + \overline{e_2} - 3\overline{e_3})$, де a_1 – ненульове дійсне число.

Для координат власних векторів $\overline{b_2}$ *і* $\overline{b_3}$, що належать власним значенням $\lambda_2 = 2$ і $\lambda_3 = 3$ відповідно, маємо:

$\lambda = 2$

$$\begin{cases} 11x_1 + 33x_2 + 43x_3 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 0, \\ 6x_1 + 18x_2 + 23x_3 = 0; \end{cases}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{cases} 10x_1 + 33x_2 + 43x_3 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Знову ж таки, за допомогою методу Гаусса знаходимо фундаментальні системи розв'язків цих систем. Ними відповідно будуть: $\{(-3,1,0)\}$, $\{(-1,-1,1)\}$. Власний вектор $\overline{b_2}$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$, можна зобразити так: $\overline{b_2} = a_2\left(-3\overline{e_1} + \overline{e_2}\right)$, а власний вектор $\overline{b_3}$, який відповідає власному значенню $\lambda_3 = 3$, так: $\overline{b_3} = a_3\left(-\overline{e_1} - \overline{e_2} + \overline{e_3}\right)$, де a_2, a_3 – дійсні числа, відмінні від нуля.

Завдання для самостійної роботи

Знайти власні вектори і власні значення лінійного оператора ϕ дійсного векторного простору R_3, заданого в деякому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ цього простору матрицею A:

5.3.1. $A=\begin{pmatrix} 29 & -6 & -6 \\ 53 & -11 & -11 \\ 81 & -18 & -16 \end{pmatrix}$; 5.3.2. $A=\begin{pmatrix} 17 & 3 & -7 \\ 26 & 7 & -12 \\ 42 & 9 & -18 \end{pmatrix}$;

5.3.3. $A=\begin{pmatrix} -1 & -6 & -10 \\ 5 & 16 & 18 \\ -3 & -9 & -9 \end{pmatrix}$; 5.3.4. $A=\begin{pmatrix} -12 & -39 & -53 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 14 \end{pmatrix}$;

5.3.5. $A=\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -11 & 13 & -3 \\ -15 & 18 & -4 \end{pmatrix}$; 5.3.6. $A=\begin{pmatrix} -18 & -54 & -74 \\ 3 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 14 \end{pmatrix}$;

5.3.7. $A=\begin{pmatrix} -22 & 3 & 5 \\ -37 & 4 & 9 \\ -57 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; 5.3.8. $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -8 & -24 & -29 \\ 6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$;

5.3.9. $A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$; 5.3.10. $A=\begin{pmatrix} -12 & -26 & 33 \\ 3 & 7 & -9 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 6. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЕВКЛІДОВОМУ ТА УНІТАРНОМУ ПРОСТОРАХ. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

6.1. Спряжені та самоспряжені лінійні оператори

Приклади розв'язань задач

Задача № 27. В ортонормованому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ евклідового простору E^2 дано лінійний оператор φ:

$$\varphi(\overline{x}) = \varphi(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2) = (5x_1 + 4x_2)\overline{e}_1 + (4x_1 - x_2)\overline{e}_2 .$$

Шляхом переходу до нового ортонормованого базису звести матрицю цього оператора до діагонального виду.

Розв'язання.

Оскільки $\varphi(\overline{e}_1) = 5\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$, $\varphi(\overline{e}_2) = 4\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, то матриця даного оператора симетрична і має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, дана задача для симетричного оператора завжди має розв'язок. Спочатку складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння матриці A.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(-1-\lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0 .$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 7$ є власними значеннями матриці A.

Власні вектори знаходимо із системи

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + \quad 4x_2 = 0, \\ \quad 4x_1 - (1+\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = -3$ одержимо

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_2 = -2x_1$. За розв'язок системи можна взяти $x_1 = 1, x_2 = -2$. Нормуючи цей розв'язок, знаходимо власний вектор одиничної довжини, що належить власному значенню $\lambda_1 = -3$:

$$\overline{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{e}_2.$$

При $\lambda_2 = 7$ одержимо

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0, \\ \;\;4x_1 - 8x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1 = 2x_2$. Тоді $x_1 = 2, x_2 = 1$ – частинний розв'язок,

$$\overline{e}_2' = \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{e}_2.$$

В ортонормованому базисі $\overline{e}_1', \overline{e}_2'$ матриця лінійного оператора φ має такий вигляд:

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача № 28. Знайти новий ортонормований базис, у якому матриця лінійного оператора φ евклідового простору E^3 буде діагональною. Знайти цю матрицю, якщо в ортонормованому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ оператор φ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

За умовою $A = A^T$ – симетрична матриця, тому всі її власні значення є дійсні числа. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння матриці A.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(3-\lambda) + 2 + 2 - 4(3-\lambda) + \lambda + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0.$$

Корені цього рівняння такі: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

Власні вектори, що належать власному значенню λ, знаходимо із системи

$$\begin{cases} -\lambda x_1 - \quad x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (3-\lambda)x_2 + \ x_3 = 0, \\ -2x_1 + \quad x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = -2$ одержуємо

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + \ x_3 = 0, \\ -2x_1 + \ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Додаємо до першого рівняння друге, помножене на 2, а до третього рівняння додаємо перше. У результаті система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 9x_2 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + \ x_3 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

і має розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Нормуючи цей розв'язок, знаходимо одиничний власний вектор, що належить власному значенню $\lambda_1 = -2$:

$$\overline{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3.$$

При $\lambda_2 = 1$ дістанемо

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідна ступінчаста система має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

За її розв’язок можна взяти: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Легко знаходимо одиничний власний вектор, що належить значенню $\lambda_2 = 1$:

$$\overline{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3.$$

При $\lambda_3 = 4$ дістанемо

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідна ступінчаста система має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

За її розв’язок можна взяти: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Маємо одиничний власний вектор, що належить значенню $\lambda_3 = 4$:

$$\overline{e}_3' = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_3.$$

Отже, у базисі $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ матриця буде діагональною і матиме вигляд:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\overline{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$, $\overline{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$, $\overline{e}_3' = -\frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_3$; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійної роботи

Лінійний оператор $\varphi : \overline{x} \to \overline{y}$ є оператором евклідового простору E^2 з ортонормованим базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2$. За допомогою переходу до нового ортонормованого базису $\overline{e}_1', \overline{e}_2'$ звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду:

6.1.1. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 5x_1 + 2x_2,\ y_2 = 2x_1 + 2x_2;$

6.1.2. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 2x_2,\ y_2 = 2x_1 + 3x_2;$

6.1.3. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 7x_1 + 3x_2,\ y_2 = 3x_1 - x_2;$

6.1.4. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 2x_2,\ y_2 = 2x_1;$

6.1.5. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = -x_1 - 5x_2,\ y_2 = -5x_1 - x_2;$

6.1.6. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = x_1 + 2x_2,\ y_2 = 2x_1 - 2x_2;$

6.1.7. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = -6x_1 + 2x_2,\ y_2 = 2x_1 - 3x_2;$

6.1.8. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 3x_1 + 3x_2,\ y_2 = 3x_1 - 5x_2;$

6.1.9. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 5x_1 + 2x_2,\ y_2 = 2x_1 + 5x_2;$

6.1.10. $\overline{y} = \varphi(\overline{x}) : y_1 = 3x_1 - 5x_2,\ y_2 = -5x_1 + 3x_2.$

Знайти новий ортонормований базис, в якому матриця лінійного оператора φ евклідового простору E^3 буде діагональною. Знайти цю матрицю, якщо в ортонормованому базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ оператор φ має матрицю A:

6.1.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

6.1.12. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

6.1.13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6.1.14. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

6.1.15. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

6.1.16. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

6.1.17. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6.1.18. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

6.1.19. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

6.1.20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6.2. Квадратичні форми. Дійсні квадратичні форми

Приклади розв'язань задач

Задача № 29. Знайти матрицю і вигляд квадратичної форми $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 - 2x_2^{\ 2}$ у базисі $\overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$.

Розв'язання.

Матрицею квадратичної форми $\varphi(\overline{x})$ у базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ буде матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, а матрицею переходу від базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ до базису $\overline{e}_1', \overline{e}_2'$ буде матриця $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрицю A' квадратичної форми $\varphi(\overline{x})$ в базисі $\overline{e}_1', \overline{e}_2'$ знаходимо за формулою $A' = C^T AC$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 20 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма $\varphi(\overline{x})$ у базисі $\overline{e}_1', \overline{e}_2'$ матиме вигляд

$$\varphi(\overline{x}) = -30y_1^2 + 40y_1y_2 + 3y_2^2.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -30 & 20 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$, $-30y_1^2 + 40y_1y_2 + 3y_2^2$.

Задача № 30. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду квадратичні форми:

а) $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$;

б) $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Розв'язання.

а) Оскільки в квадратичній формі

$$\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$$

коефіцієнт при x_1^2 не дорівнює нулю, то доповнюємо доданки, що містять змінну x_1 до повного квадрату. Тоді отримаємо

$$\varphi(\overline{x}) = 2(x_1^{\ 2} + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2) - 2(2x_2 + x_3)^2 + 6x_2^{\ 2} + 4x_2x_3 +$$
$$+7x_3^{\ 2} = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2^{\ 2} - 4x_2x_3 + 5x_3^{\ 2} = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \varphi_1(\overline{x}),$$

де $\varphi_1(\overline{x}) = -2x_2^{\ 2} - 4x_2x_3 + 5x_3^{\ 2}$.

У квадратичній формі $\varphi_1(\overline{x})$, яка залежить лише від x_2, x_3, коефіцієнт при $x_2^{\ 2}$ не рівний нулю. Тому діємо за попереднім алгоритмом:

$$\varphi_1(\overline{x}) = -2(x_2^{\ 2} + 2x_2x_3 + x_3^{\ 2}) + 7x_3^{\ 2} = -2(x_2 + x_3)^2 + 7x_3^{\ 2}.$$

Тепер $\varphi(\overline{x})$ набуває канонічного вигляду

$$\varphi(\overline{x}) = 2y_1^{\ 2} - 2y_2^{\ 2} + 7y_3^{\ 2},$$

де

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_2 = \qquad x_2 + x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3. \end{cases}$$

Останні формули задають невироджене лінійне перетворення від канонічного базису до початкового. Якщо виразити x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3, то одержимо невироджене лінійне перетворення координат вектора $\overline{x}$ при переході від початкового базису до канонічного

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 - y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

Відповідь: $\varphi(\overline{x}) = 2y_1^{\ 2} - 2y_2^{\ 2} + 7y_3^{\ 2}$; $x_1 = y_1 - 2y_2 + 3y_3$, $x_2 = y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.

б) Нехай $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$. У цьому випадку всі коефіцієнти $\varphi(\overline{x})$ при квадратах координат дорівнюють нулю. Тому на першому етапі застосуємо таке невироджене перетворення координат трьохвимірного простору:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_3.$$

Підставимо x_1, x_2, x_3 у $\varphi(\overline{x})$ і одержимо

$$\varphi(\overline{x}) = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + 2(y_1 - y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 3y_1y_3 - y_2y_3.$$

Внаслідок цього перетворення коефіцієнт біля y_1^2 нерівний нулю, а тому доповнюємо до повного квадрата члени, що містять змінну y_1

$$\varphi(\overline{x}) = \left(y_1^2 + 3y_1y_3 + \frac{9}{4}y_3^2\right) - \frac{9}{4}y_3^2 - y_2y_3 - y_2^2 =$$

$$= \left(y_1 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 - y_2^2 - 2y_2\left(\frac{1}{2}y_3\right) - \frac{1}{4}y_3^2 - 2y_3^2 =$$

$$= \left(y_1 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - 2y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2,$$

де

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{3}{2}y_3, \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{3}{2}z_3, \\ y_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3, \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$

Повертаючись до заміни $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$, виражаємо x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3 і одержуємо невироджене лінійне перетворення

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - 2z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - \ z_3, \\ x_3 = \qquad\qquad z_3, \end{cases}$$

яке зводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду $\varphi(\overline{x}) = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2$.

Перевірка. $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 = (z_1 + z_2 - 2z_3)(z_1 - z_2 - z_3) +$

$$+(z_1 + z_2 - 2z_3)z_3 + 2(z_1 - z_2 - z_3)z_3 = (z_1 + z_2 - 2z_3)(z_1 - z_2) +$$

$$+2(z_1 - z_2)z_3 - 2z_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2.$$

Відповідь: $\varphi(\overline{x}) = z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2$, $x_1 = z_1 + z_2 - 2z_3$, $x_2 = z_1 - z_2 - \ z_3$, $x_3 = z_3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти матриці і вигляд даних квадратичних форм у новому базисі:

6.2.1. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2, \overline{e}_1' = \overline{e}_1 - 3\overline{e}_2, \overline{e}_2' = 2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$;

6.2.2. $\varphi(\overline{x}) = 7x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2, \overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_2' = -2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$;

6.2.3. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \overline{e}_1' = \overline{e}_1 - \overline{e}_2, \overline{e}_2' = 3\overline{e}_1 - \overline{e}_2$;

6.2.4. $\varphi(\overline{x}) = -2x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2, \overline{e}_1' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2, \overline{e}_2' = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$;

6.2.5. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2, \overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2, \overline{e}_2' = 3\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2$;

6.2.6. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_2' = \overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_3' = \overline{e}_3;$$

6.2.7. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_2' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3,\ \overline{e}_3' = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3;$$

6.2.8. $\varphi(\overline{x}) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3,$

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_2' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_3' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 3\overline{e}_3;$$

6.2.9. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_2' = \overline{e}_1 + \overline{e}_3,\ \overline{e}_3' = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 3\overline{e}_3;$$

6.2.10. $\varphi(\overline{x}) = 5x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2,$

$$\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3,\ \overline{e}_2' = -2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3,\ \overline{e}_3' = 2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3.$$

Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду квадратичні форми:

6.2.11. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$

6.2.12. $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3;$

6.2.13. $\varphi(\overline{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3;$

6.2.14. $\varphi(\overline{x}) = x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$

6.2.15. $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 - 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 9x_2x_3;$

6.2.16. $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 - 2x_2x_3;$

6.2.17. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1x_2 + x_1x_3 + 6x_2x_3;$

6.2.18. $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 + 5x_2x_3;$

6.2.19. $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3;$

6.2.20. $\varphi(\overline{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$

6.3. Зведення квадратичної форми до головних осей

Приклади розв'язань задач

Задача № 31. Знайти канонічний вигляд, до якого зводиться квадратична форма $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ за допомогою ортогонального перетворення, не шукаючи це перетворення.

Розв'язання.

Випишемо матрицю A квадратичної форми $\varphi(\overline{x})$. Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння будуть: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.

Отже, дана квадратична форма має такий канонічний вигляд в ортонормованому базисі, який складається із одиничних власних векторів матриці A, що належать власним значенням $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$:

$$\varphi(\overline{x}) = y_1^2 + 6y_2^2.$$

Відповідь: $\varphi(\overline{x}) = y_1^2 + 6y_2^2$

Задача № 32. Знайти ортогонального перетворення, що зводить квадратичну форму $\varphi(\overline{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$ до канонічного вигляду і записати його.

Розв'язання.

Випишемо матрицю A квадратичної форми $\varphi(\overline{x})$. Тоді

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складаємо та розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 5 \\ -2 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)(1-\lambda)^2-40-8(1-\lambda)+25(2+\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3+36\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+6)(\lambda-6)=0.$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-6,\ \lambda_3=6$.

Дана квадратична форма має такий канонічний вигляд

$$\varphi(\overline{x})=-6y_2{}^2+6y_3{}^2.$$

Щоб знайти ортонормований базис у якому квадратична форма має такий вигляд, потрібно відшукати одиничні власні вектори матриці A.

Власні вектори, що належать власному значенню λ, знаходимо із системи

$$\begin{cases} (-2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+(1-\lambda)x_2+5x_3=0, \\ -2x_1+5x_2+(1-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

При $\lambda_1=0$ одержуємо

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+x_2+5x_3=0, \\ -2x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Рівносильна їй ступінчаста система має вигляд

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

і має розв’язок $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$. Нормуючи цей розв’язок, знаходимо одиничний власний вектор, що належить власному значенню $\lambda_1 = 0$:

$$\overline{e_1}' = \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e_2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e_3}.$$

При $\lambda_2 = -6$ одержуємо

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Рівносильна їй ступінчаста система має вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

і має розв’язок $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$. Нормуючи цей розв’язок, знаходимо другий одиничний власний вектор, що належить власному значенню $\lambda_2 = -6$:

$$\overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e_1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e_3}.$$

При $\lambda_3 = 6$ одержуємо

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Рівносильна їй ступінчаста система має вигляд

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 0, \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

і має розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$. Нормуючи цей розв'язок, знаходимо третій одиничний власний вектор, що належить власному значенню $\lambda_2 = 6$:

$$\overline{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3.$$

Отже, в ортонормованому базисі

$$\begin{aligned}
\overline{e}_1' &= \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\overline{e}_3, \\
\overline{e}_2' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3, \\
\overline{e}_3' &= \qquad\quad\ \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3
\end{aligned}$$

квадратична форма має канонічний вигляд $\varphi(\overline{x}) = -6{y_2}^2 + 6{y_3}^2$.

Матрицю переходу T від базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ до канонічного базису $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ складають координатні стовпці векторів $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$ в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Тоді

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Формули перетворення

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3 \end{cases}$$

є формулами ортогонального перетворення, яке зводить квадратичну форму $\varphi(\overline{x})$ до канонічного вигляду.

Відповідь: $\varphi(\overline{x}) = -6y_2^{\,2} + 6y_3^{\,2}$,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_3. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти канонічний вигляд, до якого зводиться квадратична форма за допомогою ортогонального перетворення, не шукаючи це перетворення:

6.3.1. $\varphi(\overline{x}) = 6x_1x_2$;

6.3.2. $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^{\,2} + 6x_1x_2 + 2x_2^{\,2}$;

6.3.3. $\varphi(\overline{x}) = -10x_1^{\,2} - 12x_1x_2 + 25x_2^{\,2}$;

6.3.4. $\varphi(\overline{x}) = 6x_1^{\,2} + 24x_1x_2 - x_2^{\,2}$;

6.3.5. $\varphi(\overline{x}) = -12x_1^{\,2} + 10x_1x_2 + 18x_2^{\,2}$;

6.3.6. $\varphi(\overline{x}) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$

6.3.7. $\varphi(\overline{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

6.3.8. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

6.3.9. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3;$

6.3.10. $\varphi(\overline{x}) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму $\varphi(\overline{x})$ до канонічного вигляду і записати його:

6.3.11. $\varphi(\overline{x}) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2;$

6.3.12. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2;$

6.3.13. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 + 24x_1x_2 - 4x_2^2;$

6.3.14. $\varphi(\overline{x}) = -5x_1^2 - 12x_1x_2 + 30x_2^2;$

6.3.15. $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2;$

6.3.16. $\varphi(\overline{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3;$

6.3.17. $\varphi(\overline{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3;$

6.3.18. $\varphi(\overline{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3;$

6.3.19. $\varphi(\overline{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3;$

6.3.20. $\varphi(\overline{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. Київ : ВПЦ “Київський університет”, 2019. 224 с.
2. Завало С. Т. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч. І. Київ : Вища школа, 1977. 400 с.
3. Завало С. Т., Левіщенко С. С. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч. І. Київ : Вища школа, 1983. 232 с.
4. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри / Булдигін В. В., Жук В. А., Рушицька С. О., Ясінський В. В. Київ : Вища школа, 1999. 192 с.
5. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Діскант В. І., Береза Л. Р., Грижук О. П., Захаренко Л. М. Київ : Вища школа, 2001. 304 с.
6. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв’язання: навч.-метод. посіб. / Дзюбак Л. П. та ін. Харків : НТУ “ХПІ”, 2013. 240 с.
7. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / Булдигін В. В. та ін. : за ред. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / Рудавський Ю. К. та ін. Львів : Видавництво Державного університету “Львівська політехніка”, 1999. 262 с.

9. Москаленко Ю. Д., Редчук К. С. Алгебра : Тренувальні вправи та контрольні роботи для студентів 1 курсу спеціальності „Математика”. Полтава : ПДПУ ім. В. Г. Короленка, 2000. 60 с.
10. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри. Вінниця, 2012. 216 с.
11. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва : Наука, 1984. 336 с.
12. Чарін В. С. Лінійна алгебра. Київ : Техніка, 2005. 416 с.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

МОСКАЛЕНКО Юрій Дмитрович

МОСКАЛЕНКО Оксана Анатоліївна

КОВАЛЕНКО Олена Володимирівна

Лінійна алгебра

Методичні рекомендації до проведення
практичних занять та організації самостійної роботи
студентів предметної спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)

Відповідальний за випуск *Ю. Д. Москаленко*

Комп'ютерний набір та верстка *О. В. Коваленко*